UNIVERS[illegible] HAWAII
LIBR[illegible]RY
193

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
JENA

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY E. HECKE
G. HERGLOTZ E. KÄHLER E. LANDAU
O. PERRON W. THRELFALL H. WEYL

41. BAND

QA1
M88
v.41

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1936

5856-42

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
JENA

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY E. HECKE
G. HERGLOTZ E. KÄHLER E. LANDAU
O. PERRON W. THRELFALL H. WEYL

41. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1936

66 52924

QA1
M88
V.41

Inhaltsverzeichnis

Seite

Avakumović, V. und J. Karamata, Über einige Taubersche Sätze, deren Asymptotik von Exponentialcharakter ist. I. 345
Beck, E., Existenzbeweise zur Wahrscheinlichkeitstheorie 222
Besicovitch, A. S., On differentiation of functions of two variables 402
Blaschke, W., Integralgeometrie 13. Zur Kinematik 465
Blaschke, W., Integralgeometrie 20. Zur elliptischen Geometrie 785
Brauer, R., Eine Bedingung für vollständige Reduzibilität von Darstellungen gewöhnlicher und infinitesimaler Gruppen 330
Chowla, S. and S. S. Pillai, Hypothesis K of Hardy and Littlewood 537
Cramér, H., Über eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion 405
Dinghas, A., Bemerkung zu einer Differentialungleichung von Carleman . . . 713
Doetsch, G., Zerlegung einer Funktion in Gaußsche Fehlerkurven und zeitliche Zurückverfolgung eines Temperaturzustandes. 283
Doetsch, G., Konvexe Kurven und Fußpunktkurven 717
Erdélyi, A., Über die Integration der Mathieuschen Differentialgleichung durch Laplacesche Integrale 653
Fabricius-Bjerre, Fr., Über algebraische Flächen vierter Ordnung im projektiven R_4 686
Fitting, H., Über die Existenz gemeinsamer Verfeinerungen bei direkten Produktzerlegungen einer Gruppe 380
Gentzen, G., Die Widerspruchsfreiheit der Stufenlogik 357
Haack, W., Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe. IV. Über Minimalkomplexe 252
Hadwiger, H., Ein Satz über geschlossene Vektorpolygone des Hilbertschen Raumes 732
Hua, L., A Problem on the additive Theory of Number of several variables . . 708
Ingham, A. E., Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series 367
Kamke, E., Über die partielle Differentialgleichung $f(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+g(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=h(x,y)$ 56
Karamata, J., Über einige reihentheoretische Sätze 67
Karamata, J. und V. Avakumović, Über einige Taubersche Sätze, deren Asymptotik von Exponentialcharakter ist. I. 345
Kienast, A., Über die asymptotische Darstellung gewisser Lösungen der Differenzengleichung der Hermiteschen Polynome 739
Klein-Barmen, F., Dedekindsche und distributive Verbände 261
Koschmieder, L., Adjungierte Extremalflächen im vierstufigen Raume . . . 43
Köthe, G., Das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen im Hilbertschen Raum 137
Köthe, G., Die Gleichungstheorie im Hilbertschen Raum 153
Kraus, Fr., Über konvexe Matrixfunktionen 18
Krull, W., Hauptidealzerlegung in Polynomringen 213
Krull, W., Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche 545
Krull, W., Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. II. v-Ideale und vollständig ganz abgeschlossene Integritätsbereiche 665

Seite

Mitra, S. C., On certain new connections between Legendre and Bessel Functions 680
Moessner, A. und W. Schulz, Über Potenzsummen ganzer rationaler Zahlen 340
Müller, M., Über den Konvergenzbereich des Verfahrens der schrittweisen Näherungen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen 163
Petterson, E. L., Einige Bedingungen für die Anzahl und die Gradzahlen der Faktoren gewisser ganzzahliger Polynome 200
Petterson, E. L., Über die Irreduzibilität gewisser ganzzahliger Polynome . . . 319
Pillai, S. S. and S. Chowla, Hypothesis K of Hardy and Littlewood 537
Raff, H., Lineare Transformationen beschränkter integrierbarer Funktionen. (Erste Mitteilung) 605
Reichardt, H., Über Normalkörper mit Quaternionengruppe 218
Reichardt, H., Eine Bemerkung zur vorstehenden Arbeit von F. K. Schmidt . . 439
Reidemeister, K., Das Dualitätstheorem für Homotopieketten ringe 176
Ridder, J., Denjoysche und Perronsche Integration 184
Rogosinski, W., Abschnittsverhalten bei trigonometrischen und insbesondere Fourierschen Reihen 75
Sauter, I., Zur Theorie der Bogen n-ter (Realitäts-) Ordnung im projektiven R_n. (Erste Mitteilung) 507
Schmidt, F. K., Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen I. Beweis des Riemann-Rochschen Satzes für algebraische Funktionen mit beliebigem Konstantenkörper 415
Schmidt, F. K., Über die Erhaltung der Kettensätze der Idealtheorie bei beliebigen endlichen Körpererweiterungen 443
Schulz, W. und A. Moessner, Über Potenzsummen ganzer rationaler Zahlen 340
Seifert, H., Algebraische Approximation von Mannigfaltigkeiten 1
v. Sz. Nagy, J., Über die Buschenveloppen von H. Brunn 479
v. Sz. Nagy, B., Über eine Frage aus der Theorie der orthogonalen Funktionensysteme 541
Theilheimer, F., Ein Beitrag zur Theorie der charakteristischen Invarianten . 451
Tonolo, A., Zur Integration einer Klasse von Systemen linearer homogener partieller Differentialgleichungen erster Ordnung 754
Trjitzinsky, W. J., Linear Functionals in the Theory of Quasi-Analytic and D-Analytic Classes 493
Varga, O., Integralgeometrie 19. Mittelwerte an dem Durchschnitt bewegter Flächen 768
Wagner, K., Beweis des Jordanschen Kurvensatzes für den Jordanbogen 396
Ward, A. J., The Perron-Stieltjes Integral 578
Wielandt, H., Eine Kennzeichnung der direkten Produkte von p-Gruppen . . 281
Zumbusch, H., Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Die Automorphismen der unbeschränkten eigentlichen Kreiskörper 631
Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft für das Jahr 1938 630

Algebraische Approximation von Mannigfaltigkeiten.

Von

H. Seifert in Dresden.

In den Anwendungen der Topologie hat man es häufig mit Mannigfaltigkeiten zu tun, die nicht nur „stetig" sind, sondern überdies gewisse Differenzierbarkeitseigenschaften besitzen: Die Punkte der m-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^m$ sind z. B. in folgender Weise auf Koordinaten bezogen: Zu jedem Punkte p von $\mathfrak{M}^m$ gibt es eine Umgebung[1]) $\mathfrak{U}(p|\mathfrak{M}^m)$, deren Punkte in umkehrbar eindeutiger, stetiger Weise auf reelle *„örtliche"* Koordinaten $x_1, \ldots, x_m$ bezogen sind derart, daß die Koordinaten $x_1, \ldots, x_m$ und $y_1, \ldots, y_m$ zweier solcher Umgebungen $\mathfrak{U}(p|\mathfrak{M}^m)$ und $\mathfrak{U}(q|\mathfrak{M}^m)$ in den etwa gemeinsamen Punkten durch eine k-mal stetig differenzierbare oder sogar analytische Transformation miteinander zusammenhängen, deren Funktionaldeterminante $\neq 0$ ist. Wir wollen alsdann $\mathfrak{M}^m$ als *k-mal stetig differenzierbare, bzw. analytische Mannigfaltigkeit* bezeichnen. Auf einer solchen Mannigfaltigkeit hat es einen Sinn, von k-mal stetig differenzierbaren, bzw. analytischen Funktionen zu reden. Es ist eine offene Frage, ob sich jede Mannigfaltigkeit zu einer differenzierbaren oder sogar analytischen machen läßt[2]). — Eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^m$ ist sicher k-mal stetig differenzierbar, wenn sie *k-mal stetig differenzierbar* in einen euklidischen Raum $\mathfrak{R}^n$ *eingelagert* ist. Das soll heißen: Zu jedem Punkte p von $\mathfrak{M}^m$ gibt es eine Umgebung $\mathfrak{U}(p|\mathfrak{R}^n)$, in der $\mathfrak{M}^m$ durch $n - m$ Gleichungen

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, f_{n-m}(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

darstellbar ist[3]). Dabei seien $f_1, \ldots, f_{n-m}$ k-mal stetig differenzierbar und ihre Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_{n-m}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{n-m}}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

[1]) Unter Umgebungen verstehen wir im folgenden immer offene Mengen.

[2]) Auf die Wichtigkeit dieser Frage machte gelegentlich Herr C. Carathéodory aufmerksam.

[3]) Die Funktionen $f_1, \ldots, f_{n-m}$ sind also nur in der Umgebung $\mathfrak{U}(p|\mathfrak{R}^n)$ definiert.

habe überall den Rang $n - m$. Sind diese Gleichungen — etwa nach $x_{m+1}, \ldots, x_n$ — auflösbar, so kann man auf $\mathfrak{M}^m$ $x_1, \ldots, x_m$ als örtliche Koordinaten in p benutzen.

Es ist bekannt, daß sich jede m-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^m$ topologisch in einen euklidischen Raum $\mathfrak{R}^n$ von genügend hoher Dimension einbetten läßt, nämlich sicher in den $\mathfrak{R}^{2m+1}$ [4]). Die Einlagerung läßt sich sogar so vornehmen, daß die Simplexe einer beliebigen simplizialen Zerlegung von $\mathfrak{M}^m$ in (geradlinige) Simplexe des $\mathfrak{R}^{2m+1}$ übergehen. $\mathfrak{M}^m$ wird also zwar singularitätenfrei (ohne Selbstdurchdringung), aber nicht differenzierbar eingelagert sein, vielmehr Ecken, Kanten usw. aufweisen. Es liegt nahe, aus einer solchen simplizialen Einlagerung von $\mathfrak{M}^m$ in $\mathfrak{R}^n$ eine differenzierbare durch Abrundung der Ecken, Kanten usw. abzuleiten. Doch scheint dies für $n > 3$ auf erhebliche Schwierigkeiten zu stoßen.

Eine andere hierher gehörige Frage ist es, ob man von einer k-mal stetig differenzierbaren Einlagerung von $\mathfrak{M}^m$ zu einer analytischen, also speziell algebraischen Einlagerung gelangen kann [4a]). Wie wir sehen werden, läßt sich eine geschlossene $\mathfrak{M}^m$, die zweimal stetig differenzierbar in den $\mathfrak{R}^n$ eingelagert ist, in einen reellen Zweig einer algebraischen Mannigfaltigkeit deformieren, falls es auf $\mathfrak{M}^m$ $n - m$ Felder von orientierten Normalen gibt, die in jedem Punkte linear unabhängig sind, wofür wir kurz sagen, daß $\mathfrak{M}^m$ ein Feld von *normalen* $(n - m)$-*Beinen* besitzt. Es ist nun leider nicht so, daß jede geschlossene Mannigfaltigkeit ein solches Feld zuläßt. Zunächst scheiden, wie leicht zu sehen ist, die nichtorientierbaren Mannigfaltigkeiten aus. Aber auch eine orientierbare Mannigfaltigkeit gestattet im allgemeinen kein Feld von normalen $(n-m)$-Beinen [5]). Dagegen gibt es offenbar ein solches Feld im Falle $n-m = 1$ und, wie wir zeigen werden, auch noch für $n - m = 2$.

§ 1.

Stetige Normalenfelder auf Mannigfaltigkeiten.

$\mathfrak{M}^m$ sei eine geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeit, die zweimal stetig differenzierbar in den euklidischen $\mathfrak{R}^n$ eingelagert ist. Unter der

[4]) H. Seifert und W. Threlfall, Topologie (Leipzig 1934), § 11.

[4a]) Zusatz bei der Korrektur: Die Frage nach der analytischen Einlagerung einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit behandelt H. Whitney in der soeben erschienenen Arbeit: Differentiable manifolds in Euclidean space. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 21 (1935), S. 462—464. In der Arbeit: Sphere-spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 21 (1935), S. 464—468, des gleichen Verfassers findet sich auch ohne Beweis der Satz 1 des § 1 ausgesprochen.

[5]) Beispiele hierfür finden sich bei E. Stiefel, Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, Comment. math. Helvet. 8.

ε-Umgebung $\mathfrak{U}_\varepsilon$ von $\mathfrak{M}^m$ verstehen wir die Gesamtheit der Punkte, deren Abstand von $\mathfrak{M}^m$ kleiner als ε ist. Ist P ein fester Punkt aus $\mathfrak{U}_\varepsilon$, p ein variabler von $\mathfrak{M}^m$, so wird wegen der Geschlossenheit von $\mathfrak{M}^m$ die untere Grenze der Strecken Pp von mindestens einem Punkte p^* angenommen. Pp^* ist dann notwendig ein Lot auf $\mathfrak{M}^m$, und die Länge von Pp^* ist $< \varepsilon$[6]). Wir sprechen von einer *normalen Umgebung* $\mathfrak{U}_\varepsilon$, wenn man aus jedem Punkte P von $\mathfrak{U}_\varepsilon$ genau ein Lot auf $\mathfrak{M}^m$ fällen kann, dessen Länge $< \varepsilon$ ist. Da wir die Einlagerung von $\mathfrak{M}^m$ als zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt haben, gibt es stets eine normale Umgebung (Anhang 1). Wir beweisen nun den

Satz 1: *Ist die orientierbare geschlossene Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^m$ in den euklidischen $\mathfrak{R}^{m+1}$ oder $\mathfrak{R}^{m+2}$ zweimal stetig differenzierbar eingelagert, so kann man in jedem Punkt von $\mathfrak{M}^m$ eine orientierte Normale errichten, so daß ein über ganz $\mathfrak{M}^m$ stetiges Normalenfeld entsteht.*

Beweis: a) Der Satz ist klar, wenn $\mathfrak{M}^m$ im $\mathfrak{R}^{m+1}$ liegt. Denn dann gibt es in jedem Punkte von $\mathfrak{M}^m$ genau eine Normale, die wir etwa so orientieren, daß sie vom Innengebiet nach dem Außengebiet weist[7]).

b) Es liege jetzt $\mathfrak{M}^m$ im $\mathfrak{R}^{m+2}$. Im einfachsten Falle $m = 1$ ist $\mathfrak{M}^1$ eine geschlossene Kurve im $\mathfrak{R}^3$. Man bringt in diesem Falle in einem Ausgangspunkte eine beliebige orientierte Normale an und führt sie stetig längs der Kurve herum. Das kann man offenbar immer so einrichten, daß nach einer vollständigen Durchlaufung der Kurve die Normale in die Ausgangslage zurückkehrt. Man braucht dabei garnicht zu benutzen, daß die Kurve gerade im euklidischen Raum liegt. Vielmehr besitzt eine geschlossene Raumkurve in jeder beliebigen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit ein stetiges Normalenfeld.

Dies ändert sich, wenn wir eine Dimension höher steigen. Eine geschlossene Fläche in einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit besitzt im allgemeinen kein stetiges Normalenfeld, wofür die komplexe projektive Gerade — eine Kugelfläche — in der komplexen projektiven Ebene — einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit — ein Beispiel darstellt[8]). Wir müssen also zum Beweise des Satzes 1 im Falle $m > 1$ ausnutzen, daß die einbettende Mannigfaltigkeit der euklidische Raum $\mathfrak{R}^{m+2}$ ist.

---

[6]) Liegt P auf $\mathfrak{M}^m$, so ist die Länge des „Lotes" 0.

[7]) Jede geschlossene, topologisch im $\mathfrak{R}^{m+1}$ gelegene Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^m$ zerlegt den $\mathfrak{R}^{m+1}$ bekanntlich in zwei Gebiete und ist orientierbar.

[8]) Gäbe es ein stetiges Normalenfeld auf der komplexen projektiven Geraden S^2 in der komplexen projektiven Ebene, so könnte man die S^2 durch Verschieben ihrer Punkte in der positiven Normalrichtung in eine punktfremde $'S^2$ deformieren. Daher wäre die Schnittzahl $\mathcal{S}(S^2, S^2) = \mathcal{S}(S^2, {}'S^2) = 0$, während sie in Wahrheit $= 1$ ist (Beweis bei B. L. van der Waerden, Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie, Math. Annalen 102 (1929)).

Wir betrachten zu dem Zwecke neben $\mathfrak{M}^m$ die *Umgebungs-Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{U}^{m+1}$, die von den Endpunkten der sämtlichen an $\mathfrak{M}^m$ angreifenden und auf $\mathfrak{M}^m$ senkrechten Einheitsvektoren (kurz *Einheitsloten*) gebildet wird. Dabei wählen wir die Längeneinheit so klein, daß $\mathfrak{U}^{m+1}$ ganz in einer normalen Umgebung von $\mathfrak{M}^m$ liegt. Da die Einheitslote in einem bestimmten Punkte p von $\mathfrak{M}^m$ eine Einheitskreisscheibe überdecken, so entspricht dem Punkte p eine geschlossene Kurve in $\mathfrak{U}^{m+1}$, nämlich der Rand dieser Kreisscheibe. Durch jeden Punkt von $\mathfrak{U}^{m+1}$ geht genau eine solche Kurve hindurch, da man aus jedem Punkte P von $\mathfrak{U}^{m+1}$ genau ein Einheitslot Pp fällen kann. Wir werden diese Kurven, mit denen $\mathfrak{U}^{m+1}$ übersponnen ist, *Fasern* und $\mathfrak{U}^{m+1}$ einen *gefaserten* Raum nennen. Ferner sagen wir, daß die Punkte einer Faser *über* dem Punkte p von $\mathfrak{M}^m$ liegen, der dieser Faser entspricht. In dem bereits erledigten Falle $m = 1$ würde die Umgebungsmannigfaltigkeit ein Schlauch sein, der die Raumkurve $\mathfrak{M}^1$ umschließt; aus ihm werden die Fasern durch die Normalebenen der Raumkurve ausgeschnitten.

Im Falle eines beliebigen m sei $\mathfrak{w}$ eine Umgebung eines Punktes p von $\mathfrak{M}^m$ und q ein Punkt in $\mathfrak{w}$. Verschiebt man die Normalebene in q parallel nach p und projiziert sie dort orthogonal auf die Normalebene in p, so ist damit, falls $\mathfrak{w}$ hinreichend klein ist, eine umkehrbar eindeutige lineare Abbildung der Normalebene in q auf die in p gegeben, und damit auch eine eineindeutige Beziehung zwischen den Einheitsloten in q und in p. Daraus geht hervor, daß die Gesamtheit $\mathfrak{W}$ der über $\mathfrak{w}$ liegenden Punkte homöomorph zum topologischen Produkte aus der Umgebung $\mathfrak{w}$ und einer Kreislinie H ist.

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{w} \times H,$$

wobei die Fasern von den Produkten $q \times H$ gebildet werden.

Unter einer *Schnittmannigfaltigkeit* von $\mathfrak{U}^{m+1}$ wollen wir eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit $\overline{\mathfrak{M}}^m$ verstehen, die mit jeder Faser genau einen Punkt gemeinsam hat. Die aus den Punkten einer Schnittmannigfaltigkeit auf $\mathfrak{M}^m$ gefällten Normalen bilden offenbar ein stetiges Normalenfeld, und umgekehrt liefert jedes stetige Normalenfeld eine Schnittmannigfaltigkeit. Satz 1 wird also bewiesen sein, wenn wir in $\mathfrak{U}^{m+1}$ eine Schnittmannigfaltigkeit konstruiert haben.

Wir legen eine bestimmte simpliziale Zerlegung von $\mathfrak{M}^m$ zugrunde. Ihre Simplexe der Dimension d seien

$$e_i^d; \quad (i = 1, \ldots, \alpha^d; \; d = 0, 1, \ldots, m).$$

Obere Indizes deuten auf die Dimension hin; α^d ist die Anzahl der d-dimensionalen Simplexe. Wir können die Zerlegung so fein, die Simplexe also

so klein wählen, daß die über e_i^d liegende Punktmenge dem topologischen Produkte

$$e_i^d \times H$$

homöomorph ist.

Zwischen den Simplexen, die wir mit bestimmten Orientierungen versehen, bestehen gewisse Berandungsrelationen. Wir brauchen im folgenden nur die Ränder der Dreiecke:

$$(1,1) \qquad \mathcal{R}d\, e_k^2 = \sum_{l=1}^{\alpha^1} \beta_{kl}\, e_l^1 \qquad (k = 1, \ldots, \alpha^2).$$

Der Zerlegung von $\mathfrak{M}^m$ in die Simplexe e_i^d entspricht eine analoge Zerlegung der Umgebungsmannigfaltigkeit $\mathfrak{U}^{m+1}$ in Produkte $e_i^d \times H$. Insbesondere ist das über einer Strecke e_l^1 liegende Produkt ein gefaserter Kreisring $e_l^1 \times H$ und das über einem Dreieck e_k^2 liegende Produkt ein gefaserter Vollring $e_k^2 \times H$. Wir konstruieren nun die Schnittmannigfaltigkeit Schritt für Schritt, indem wir zunächst über jedem 0-Simplexe e_s^0 einen Punkt E_s^0 der zu konstruierenden Schnittmannigfaltigkeit wählen. Auf den beiden Randkreisen des Kreisringes $e_l^1 \times H$ verbinden wir die bereits gewählten Punkte E_s^0 und E_t^0 durch einen Bogen E_l^1, der jede Faser des Kreisringes genau einmal durchsetzt (Fig. 1) und der der zu konstruierenden Schnittmannigfaltigkeit zugerechnet wird. Man hat bei der Wahl von E_l^1 noch unendlich viele Möglichkeiten,

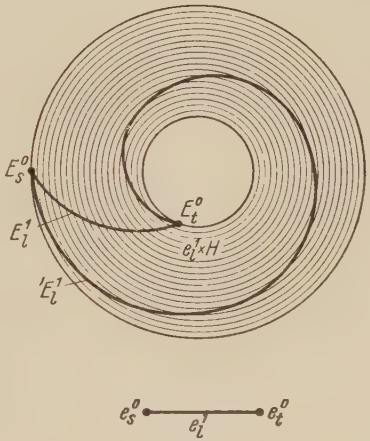

Fig. 1.

da man E_l^1 im einen oder andern Sinn beliebig oft um den Kreisring herumführen kann. (In der Fig. 1 ist außer E_l^1 z. B. $'E_l^1$ ein möglicher Verbindungsbogen.) Wir versuchen nun, die Schnittmannigfaltigkeit, die auf dem Rande eines gefaserten Vollringes $e_k^2 \times H$ bereits definiert ist, stetig ins Innere fortzusetzen. Wir müssen also ein Elementarflächenstück E_k^2 konstruieren, das jede Faser des Vollringes in einem Punkte trifft und den Rand $\Sigma \beta_{kl} E_l^1$ hat. Ein solches Flächenstück gibt es aber nur dann, wenn die geschlossene Kurve $\Sigma \beta_{kl} E_l^1$ im Vollring in einen Punkt zusammenziehbar ist. Das wird im allgemeinen nicht der Fall sein. Vielmehr wird $\Sigma \beta_{kl} E_l^1$ homolog einem Vielfachen der Faser H sein:

$$(1.2) \qquad \sum_{l=1}^{\alpha^1} \beta_{kl} E_l^1 \sim \lambda_k H \qquad (\text{in } e_k^2 \times H).$$

Wir setzen dabei voraus, daß die Fasern in bestimmter Weise orientiert sind und zwar gleichmäßig über die ganze Mannigfaltigkeit $\mathfrak{U}^{m+1}$, was wegen der Orientierbarkeit von $\mathfrak{U}^{m+1}$ und $\mathfrak{M}^m$ möglich ist[9]). Die Konstruktion der Schnittmannigfaltigkeit kommt also bereits hier zum Stillstand, es sei denn, daß alle λ_k verschwinden.

Wir werden nun sehen, daß man durch geeignete Wahl der E_l^1 alle λ_k zu Null machen kann. Zu dem Zwecke betrachten wir neben der gegebenen simplizialen Zerlegung von $\mathfrak{M}^m$ die duale Zellteilung. Die zu e_i^d duale Zelle sei z_i^{m-d} und sie sei so orientiert, daß die Schnittzahl

$$\mathcal{S}(e_i^d, z_i^{m-d}) = +1 \tag{1.3}$$

wird. Dabei ist eine feste Orientierung von $\mathfrak{M}^m$ vorausgesetzt. Entsprechend den Berandungsrelationen (1.1) hat man die dualen Berandungsrelationen

$$\mathcal{R}d\, z_l^{m-1} = \sum_{k=1}^{\alpha^2} \beta_{kl} z_k^{m-2}. \qquad (l = 1, \ldots, \alpha^1) \tag{1.4}$$

Da die Zellen z_k^{m-2} den Simplexen e_k^2 und damit den Zahlen λ_k eindeutig entsprechen, kann man die $(m-2)$-dimensionale Zellenkette

$$z^{m-2} = \sum_{k=1}^{\alpha^2} \lambda_k z_k^{m-2} \tag{1.5}$$

bilden.

Wir beweisen, daß z^{m-2} homolog Null ist. Eine Zellenkette z^{m-2} ist nach dem Kriterium von H. Hopf[10]) dann und nur dann nullhomolog, wenn die Schnittzahl mit jeder beliebigen $\bmod \tau$ geschlossenen Kette $e^2 = \Sigma \varepsilon_k e_k^2$ durch τ teilbar ist; dabei ist τ eine beliebige ganze Zahl > 1. Daß $e^2 \bmod \tau$ geschlossen ist, bedeutet, daß die Koeffizienten in

$$\mathcal{R}d\, e^2 = \Sigma \varepsilon_k \beta_{kl} e_l^1$$

durch τ teilbar sind:

$$\sum_{k=1}^{\alpha^2} \varepsilon_k \beta_{kl} \equiv 0 \pmod{\tau}. \qquad (l = 1, \ldots, \alpha^1) \tag{1.6}$$

Die Schnittzahl $\mathcal{S}(e^2, z^{m-2})$ ist nun nach (1.3)

$$\mathcal{S}\Big(\sum_{k=1}^{\alpha^2} \varepsilon_k e_k^2, \sum_{k=1}^{\alpha^2} \lambda_k z_k^{m-2}\Big) = \sum_{k=1}^{\alpha^2} \varepsilon_k \lambda_k. \tag{1.7}$$

Um zu zeigen, daß $\Sigma \varepsilon_k \lambda_k \equiv 0 \pmod{\tau}$ ist, multiplizieren wir die Homologien (1.2) mit ε_k und addieren:

$$\sum_{l=1}^{\alpha^1} \sum_{k=1}^{\alpha^2} \varepsilon_k \beta_{kl} E_l^1 \sim \sum_{k=1}^{\alpha^2} \varepsilon_k \lambda_k H \qquad (\text{in } \mathfrak{U}^{m+1}). \tag{1.8}$$

---

[9]) $\mathfrak{U}^{m+1}$ ist orientierbar als $(m+1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathfrak{R}^{m+2}$.

[10]) H. Hopf, Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, Math. Ann. 104, S. 657, Hilfssatz I.

Die linke Seite ist nach (1.6) das τ-fache einer Kette K^1:

$$\tau K^1 \sim \sum_{k=1}^{\alpha^2} \varepsilon_k \lambda_k H \qquad \text{(in } \mathfrak{U}^{m+1}\text{)}. \tag{1.9}$$

Nun benutzen wir die Tatsache, daß $\mathfrak{M}^m$ im euklidischen $\mathfrak{R}^{m+2}$ liegt. Die eindimensionalen geschlossenen Ketten K^1 und H sind punktfremd zu $\mathfrak{M}^m$ und haben folglich bestimmte Verschlingungszahlen mit $\mathfrak{M}^m$. Da überdies τK^1 und $\Sigma \varepsilon_k \lambda_k H$ einander homolog sind in $\mathfrak{U}^{m+1}$, also im Außenraum von $\mathfrak{M}^m$, so sind ihre Verschlingungszahlen mit $\mathfrak{M}^m$ gleich [11]):

$$\tau \mathcal{V}(K^1, \mathfrak{M}^m) = \sum_{k=1}^{\alpha^2} \varepsilon_k \lambda_k \mathcal{V}(H, \mathfrak{M}^m). \tag{1.10}$$

$\mathcal{V}(H, \mathfrak{M}^m)$ ist $= \pm 1$. Denn H ist ein Kreis vom Radius 1, der in einer Normalebene von $\mathfrak{M}^m$ liegt. Die Verschlingungszahl ist aber definitionsgemäß gleich der Schnittzahl dieser Kreisscheibe mit $\mathfrak{M}^m$, also ± 1. Aus (1.10) folgt daher

$$\sum_{k=1}^{\alpha^2} \varepsilon_k \lambda_k \equiv 0 \pmod{\tau}.$$

Also ist in der Tat z^{m-2} homolog 0, und es gibt daher eine Kette

$$z^{m-1} = \sum_{l=1}^{\alpha^1} \delta_l z_l^{m-1},$$

deren Rand z^{m-2} ist; daher

$$\lambda_k = \sum_{l=1}^{\alpha^1} \beta_{kl} \delta_l. \tag{1.11}$$

Wir ersetzen nun den Bogen E_l^1 durch den neuen Bogen

$$'E_l^1 = E_l^1 - \delta_l H.$$

Dann erhält man an Stelle von (1.2) mit Hilfe von (1.11) die Homologie

$$\sum_{l=1}^{\alpha^1} \beta_{kl} {}'E_l^1 = \sum_{l=1}^{\alpha^1} \beta_{kl} E_l^1 - \sum_{l=1}^{\alpha^1} \beta_{kl} \delta_l H \sim \lambda_k H - \lambda_k H = 0.$$

Damit ist gezeigt, daß man durch geeignete Wahl der Bogen E_l^1 alle λ_k zu Null machen kann. Wir denken uns von vornherein die E_l^1 in dieser Weise gewählt. Dann läßt sich die Schnittmannigfaltigkeit in $\mathfrak{U}^{m+1}$, die bisher nur über den Simplexen der Dimensionen 0 und 1 von $\mathfrak{M}^m$ definiert ist, auch über den 2-dimensionalen Simplexen definieren. Man hat nur in die nullhomologe Kurve $\Sigma \beta_{kl} E_l^1$ ein Flächenstück E_k^2 einzuspannen, das jede Faser des Vollringes $e_k^2 \times H$ genau einmal trifft.

Ist $m = 2$, so ist damit schon die Existenz der Schnittmannigfaltigkeit bewiesen. Im Falle $m > 2$ betrachten wir ein 3-Simplex e_i^3. Über

---

[11]) Bei der Bildung der Verschlingungszahl ist natürlich $\mathfrak{M}^m$ als m-dimensionale Kette, nicht als Punktmenge zu verstehen.

ihm liegt das Produkt $e_i^3 \times H$. Auf dem Kreise H charakterisieren wir die Punkte durch den Mittelpunktswinkel φ, der von $-\infty$ bis $+\infty$ variieren kann. Da über jedem Punkte p auf dem Rande von e_i^3 bereits ein Punkt P der Schnittmannigfaltigkeit liegt, ist damit jedem Punkte p ein mod 2π bestimmter φ-Wert zugeordnet. Die Funktion $\varphi(p)$ ist zunächst unendlich vieldeutig auf dem Rande von e_i^3. Da dieser Rand aber als Kugelfläche einfach zusammenhängend ist, so zerfällt $\varphi(p)$ in unendlich viele Zweige von lauter eindeutigen Funktionen. Setzt man nämlich $\varphi(p)$ längs eines geschlossenen Weges der Kugelfläche stetig fort, so muß man genau zu dem Ausgangswerte zurückkommen, da sich der Weg stetig zusammenziehen läßt. Wir greifen einen solchen Zweig heraus und setzen die Funktion $\varphi(p)$ in das Innere von e_i^3 stetig fort, wodurch die Schnittmannigfaltigkeit über den 3-Simplexen von $\mathfrak{M}^m$ definiert ist. Damit ist sie zugleich auf der Randsphäre eines 4-Simplexes gegeben, falls deren vorhanden sind, und man kann sie nach dem gleichen Verfahren in deren Inneres fortsetzen. So steigt man Schritt für Schritt bis zu den n-Simplexen auf. Damit ist die Schnittmannigfaltigkeit konstruiert und Satz 1 bewiesen.

Eine unmittelbare Folge von Satz 1 ist es, daß unsere $\mathfrak{M}^m$ im $\mathfrak{R}^{m+2}$ sogar ein stetiges Feld von Zweibeinen besitzt. In der Tat ist in einer Normalebene durch eine orientierte Normale zugleich in der darauf senkrechten Normalen eine bestimmte Orientierung festgelegt, nämlich durch die Forderung, daß die beiden orientierten Normalen zusammen mit einer bestimmten Orientierung von $\mathfrak{M}^m$ eine vorgegebene Orientierung von $\mathfrak{R}^{m+2}$ ergeben sollen.

Wir wollen uns nun Rechenschaft davon geben, an welcher Stelle die Übertragung unserer Konstruktion des Normalenfeldes von dem behandelten Fall ($\mathfrak{M}^m$ im $\mathfrak{R}^{m+2}$) auf den allgemeinen Fall ($\mathfrak{M}^m$ im $\mathfrak{R}^{m+k}$, $k > 2$) versagt. Ist die orientierbare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^m$ in den $\mathfrak{R}^{m+k}$ eingelagert, so kann man die Umgebungsmannigfaltigkeit $\mathfrak{U}^{m+k-1}$ wie bisher als die Gesamtheit der Endpunkte aller Einheitslote definieren. Sie ist durch $(k-1)$-dimensionale Sphären H^{k-1} „gefasert". Die Existenz eines stetigen Normalenfeldes ist gleichbedeutend mit der Existenz einer Schnittmannigfaltigkeit $\overline{\mathfrak{M}}^m$, die jede Faser genau einmal trifft. Versucht man $\overline{\mathfrak{M}}^m$ schrittweise zu konstruieren, indem man sie der Reihe nach über den Simplexen der Dimension 0, 1, ... von $\mathfrak{M}^m$ definiert, so zeigt es sich, daß man bis zu den Simplexen der Dimension k einschließlich gelangen kann. Über der k-dimensionalen Randsphäre s^k eines $(k+1)$-Simplexes e^{k+1} ist dann $\mathfrak{M}^m$ definiert. Es ist also jedem Punkte von s^k ein Punkt von $s^k \times H^{k-1}$ und damit von H^{k-1} zugeordnet. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich diese Ab-

bildung der Sphäre s^k in die Sphäre H^{k-1} in das Innere von e^{k+1} stetig fortsetzen läßt, besteht darin, daß die Abbildung von s^k in H^{k-1} unwesentlich, d. h. in eine Abbildung deformierbar ist, die ganz s^k in einen Punkt überführt. Das ist aber im allgemeinen unmöglich, da es z. B. wesentliche Abbildungen der 3-Sphäre auf die 2-Sphäre gibt [12]).

Es ist nicht bekannt, ob für $k > 2$ nur der Beweis versagt oder der Satz falsch ist. Dagegen weiß man, daß die m-dimensionalen orientierbaren Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}^m$ ungerader Charakteristik kein stetiges normales k-Beinfeld im $\mathfrak{R}^{m+k}$ zulassen [13]). Da andererseits eine $\mathfrak{M}^m$ im $\mathfrak{R}^{m+2}$ ein stetiges Normalenfeld und damit auch ein Zweibeinfeld besitzt, so folgt

Satz 2: *Eine orientierbare m-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^m$ von ungerader Charakteristik läßt sich nicht (zweimal stetig differenzierbar) in den euklidischen $\mathfrak{R}^{m+2}$, also erst recht nicht in den $\mathfrak{R}^{m+1}$ einlagern.*

Daß sich eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^m$ von ungerader Charakteristik N, also von ungerader Dimension auch nicht simplizial in den $\mathfrak{R}^{m+1}$ einlagern läßt, folgt nebenbei bemerkt so: Ließe sich $\mathfrak{M}^m$ simplizial in den $\mathfrak{R}^{m+1}$ einlagern, so würde sie Rand eines $(m+1)$-dimensionalen Innengebietes sein, das zusammen mit $\mathfrak{M}^m$ eine berandete Mannigfaltigkeit $\overline{\mathfrak{M}}^{m+1}$ bildet. Die Verdoppelung [14]) von $\overline{\mathfrak{M}}^{m+1}$ ist eine geschlossene Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{m+1}$ von ungerader Dimension. Ihre Charakteristik ist also $= 0$. Andererseits ist sie, wenn mit $\overline{N}$ die Charakteristik von $\overline{\mathfrak{M}}^{m+1}$ bezeichnet wird, gleich $2\overline{N} - N$, während doch N als ungerade vorausgesetzt wurde.

§ 2.

Algebraische Approximation von Mannigfaltigkeiten.

Satz 3: *Ist eine orientierbare geschlossene Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^m$ zweimal stetig differenzierbar in den euklidischen $\mathfrak{R}^n$ eingelagert und gibt es auf $\mathfrak{M}^m$ $n - m$ unabhängige stetige Felder von orientierten Normalen (nach § 1 sind solche für $n - m = 1$ und 2 stets vorhanden), so läßt sich $\mathfrak{M}^m$ durch eine beliebig kleine isotope Deformation in einen reellen Zweig einer algebraischen Mannigfaltigkeit überführen.*

Es genügt, den Beweis für den Fall $n - m = 2$ zu führen, da er im allgemeinen Falle analog verläuft. — Trägt man auf jeder Normalen

---

[12]) H. Hopf, Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. Math. Ann. 104 (1931), S. 637—665.

[13]) Vgl. Fußnote [5]).

[14]) Vgl. das in Fußnote [4]) angeführte Buch S. 129.

der beiden stetigen Normalenfelder von $\mathfrak{M}^m$ aus in der positiven Richtung die Einheitsstrecke ab, so ergeben sich zwei Felder von normalen Einheitsvektoren

$$\mathfrak{s} = (s_1, \ldots, s_n) \quad \text{und} \quad \mathfrak{t} = (t_1, \ldots, t_n).$$

Von den Komponenten s_i und t_i wissen wir nur, daß sie stetige Funktionen auf $\mathfrak{M}^m$ sind. Wir leiten zunächst aus $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$ zwei differenzierbare Felder von normalen Vektoren $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ ab, etwa auf die folgende Weise: Die auf $\mathfrak{M}^m$ stetigen Funktionen $s_1, \ldots, s_n$ lassen sich nach einem bekannten Satze zu stetigen Funktionen im ganzen $\mathfrak{R}^n$ erweitern [15]). Wir approximieren nun $s_1, \ldots, s_n$ durch Polynome $p_1, \ldots, p_n$ und betrachten das Feld der auf $\mathfrak{M}^m$ angreifenden Vektoren

$$\mathfrak{p} = (p_1, \ldots, p_n).$$

Nimmt man von diesen Vektoren die Normalkomponenten, so erhält man ein Feld $\mathfrak{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, wie wir es suchen. Auf dieselbe Weise ergibt sich aus dem $\mathfrak{t}$-Feld das Feld $\mathfrak{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ normaler Vektoren. Bei hinreichender Genauigkeit der Polynomapproximation werden $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ in jedem Punkte p von $\mathfrak{M}^m$ linear unabhängig sein. — Ein beliebiger in p angreifender normaler Vektor pP läßt sich nun in der Form $F\mathfrak{u} + G\mathfrak{v}$ schreiben. Die hiermit definierten Funktionen F und G von P sind in einer gewissen normalen Umgebung $\mathfrak{U}_\eta$ eindeutig und besitzen stetige Ableitungen erster Ordnung (Anhang 2). Sie lassen sich in der durch den Punkt p von $\mathfrak{M}^m$ gehenden Normalebene als affine Koordinaten auffassen, wobei die Basisvektoren des Koordinatensystems die in p angreifenden Vektoren $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ sind. Die gemeinsamen Nullstellen von F und G in $\mathfrak{U}_\eta$ erfüllen gerade die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^m$. Nach dem Weierstraßschen Approximationssatze existieren nun zwei Polynome $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ und $\Psi(x_1, \ldots, x_n)$, so daß in einer vorgegebenen, abgeschlossenen normalen Umgebung $\overline{U}_\omega \subset U_\eta$

$$|F - \Phi| < \omega, \qquad |G - \Psi| < \omega \tag{2.1}$$

und außerdem für die Ableitungen

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \Phi}{x_\nu}\right| < \delta, \qquad \left|\frac{\partial G}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \Psi}{\partial x_\nu}\right| < \delta, \tag{2.2}$$

gilt, wobei $\delta\,(>0)$ beliebig klein vorgegeben werden kann [15a]). Schlägt man um einen Punkt p von $\mathfrak{M}^m$ in der Normalebene von p den Kreis mit dem Radius ω, so liegt dieser „ω-Kreis" ganz in $\overline{\mathfrak{U}}_\omega$. Φ und Ψ sind im ω-Kreise Polynome in den affinen Koordinaten F und G. Die Größe δ

---

[15]) v. Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie (Berlin 1923), S. 75.

[15a]) De la Vallée Poussin. Cours d'Analyse inf. II (2. Aufl.), S. 134.

in den Formeln (2. 2) sei nun so klein gewählt, daß die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(\Phi, \Psi)}{\partial(F, G)} > 0 \tag{2.3}$$

in jedem ω-Kreise ist. Alsdann besitzen Φ und Ψ im ω-Kreise genau eine gemeinsame Nullstelle. Denn die Funktionen $\Phi = \Phi(F, G)$ und $\Psi = \Psi(F, G)$ vermitteln eine Selbstabbildung der FG-Ebene, die innerhalb des ω-Kreises dieser Ebene definiert ist. Die Abbildung der ω-Kreisscheibe läßt sich wegen (2. 1) in die identische deformieren, ohne daß bei der Deformation ein Randpunkt den Nullpunkt überstriche; man hat nur jeden Bildpunkt auf der Verbindungsstrecke mit dem Originalpunkt in diesen zu verschieben (Fig. 2). Also ist der Abbildungsgrad im Nullpunkt gleich dem Abbildungsgrad der identischen Abbildung, also $= 1$, also ist der Nullpunkt Bildpunkt von mindestens einem Punkte. Es können sich auch nicht mehrere Punkte in den Nullpunkt abbilden, da wegen (2. 3) eine hinreichend kleine Umgebung eines jeden inneren Punktes der Kreisscheibe topologisch mit dem Grad 1 abgebildet wird.

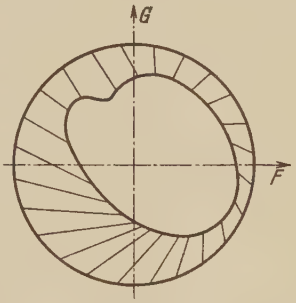

Fig. 2.

Die Mannigfaltigkeit

$$\Phi = 0, \qquad \Psi = 0,$$

so weit sie in der ω-Umgebung von $\mathfrak{M}^m$ liegt, schneidet also jeden ω-Kreis in genau einem Punkte. Diese Punkte bilden die reellen Punkte einer algebraischen Mannigfaltigkeit oder einen reellen Zweig einer solchen, und $\mathfrak{M}^m$ ist in diesen isotop deformierbar, was wir beweisen wollten.

Ob sich $\mathfrak{M}^m$ sogar in eine aus einem einzigen reellen Zweige bestehende algebraische Mannigfaltigkeit deformieren läßt, bleibt unentschieden. Nur für die Fälle $n - m = 1$ ($\mathfrak{M}^m$ im $\mathfrak{R}^{m+1}$) und $n = 3$, $m = 1$ (Knoten im $\mathfrak{R}^3$) werden wir den Beweis erbringen.

Satz 4: *Eine orientierbare geschlossene Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{n-1}$, die zweimal stetig differenzierbar in den $\mathfrak{R}^n$ eingelagert ist, läßt sich durch eine beliebig kleine isotope Deformation in eine (aus einem einzigen reellen Zweige bestehende) algebraische Mannigfaltigkeit überführen.*

Beweis: $F(x_1, \ldots, x_n)$ sei der Abstand des Punktes (x) von $\mathfrak{M}^{n-1}$, den wir negativ oder positiv rechnen, je nachdem (x) innerhalb oder außerhalb von $\mathfrak{M}^{n-1}$ liegt. F ist in ganz $\mathfrak{R}^n$ stetig und besitzt in einer hinreichend kleinen normalen Umgebung $\mathfrak{U}_\eta$ von $\mathfrak{M}^{n-1}$ stetige Ableitungen erster Ordnung (Anhang 3). Wir schlagen nun um den Koordinatenanfangspunkt eine $(n-1)$-dimensionale Sphäre $\mathfrak{S}$ mit einem so

großen Radius r_0, daß $\mathfrak{U}_\eta$ ganz im Innern von $\mathfrak{S}$ liegt. Ferner wählen wir eine abgeschlossene normale Umgebung $\overline{\mathfrak{U}}_\omega \subset \mathfrak{U}_\eta$ von $\mathfrak{M}^{n-1}$. Nach dem Weierstraßschen Approximationssatz existiert ein Polynom Φ, so daß innerhalb $\mathfrak{S}$

$$|F - \Phi| < \omega$$

und für die Ableitungen von F in $\overline{\mathfrak{U}}_\omega$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu}\right| < \delta$$

gilt, wobei $\delta\,(>0)$ beliebig klein vorgegeben werden kann. Die Nullstellen von Φ liegen dann sämtlich in $\overline{\mathfrak{U}}_\omega$ und eventuell außerhalb $\mathfrak{S}$. Sind A und B die beiden Punkte auf der Normalen in einem (variabeln) Punkte p von $\mathfrak{M}^{n-1}$, die von p den Abstand ω haben, so ist Φ im Punkte A, der im Innern von $\mathfrak{M}^{n-1}$ liegen möge, negativ und im Punkte B positiv, also hat Φ auf der Strecke AB mindestens eine Nullstelle. Wir nehmen weiter an, daß δ so klein gewählt war, daß auf jeder Strecke AB

$$\frac{\partial \Phi}{\partial F} > 0$$

wird. Alsdann liegt auf AB genau eine Nullstelle von Φ. Sollte Φ außerhalb $\mathfrak{S}$ noch Nullstellen besitzen, so kann man diese dadurch beseitigen, daß man zu Φ das Polynom

$$\left(\frac{r^2}{r_0^2}\right)^k$$

hinzufügt, wobei $r^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ ist. Für genügend großes k ist dieses Polynom einschließlich seiner ersten Ableitungen im Innern von $\mathfrak{S}$ praktisch null, während es außerhalb $\mathfrak{S}$ sehr rasch anwächst. Das Polynom

$$\overline{\Phi} = \Phi + \left(\frac{r^2}{r_0^2}\right)^k$$

wird dann nur in Punkten von $\overline{\mathfrak{U}}_\omega$ verschwinden und zwar auf jeder Strecke AB genau einmal. $\overline{\Phi} = 0$ stellt also eine algebraische Mannigfaltigkeit $\overline{\mathfrak{M}}^{n-1}$ dar, die ganz in $\overline{\mathfrak{U}}_\omega$ liegt und jede normale Strecke AB genau einmal trifft. Dann kann man aber $\mathfrak{M}^{n-1}$ in $\overline{\mathfrak{M}}^{n-1}$ deformieren, indem man die Punkte von $\mathfrak{M}^{n-1}$ auf ihren Normalen verschiebt.

§ 3.

Approximation von Knoten durch algebraische Kurven.

Satz 5: *Zu jedem Knoten des euklidischen $\mathfrak{R}^3$ gibt es eine nur aus einem Zweige bestehende algebraische Kurve, die ebenso verknotet ist.*

Beweis: Ist der Knoten als doppelpunktfreier, geschlossener Streckenzug gegeben, so führen wir ihn durch geeignete Abrundung der Ecken in einen äquivalenten Knoten $\mathfrak{M}^1$, der zweimal stetig differenzierbar im $\mathfrak{R}^3$ liegt, über. $\mathfrak{U}_\varepsilon$ sei eine normale ε-Umgebung von $\mathfrak{M}^1$; wir können

annehmen, indem wir ε hinreichend klein wählen, daß sich aus jedem Punkte der Begrenzung $\mathfrak{M}^2$ von $\mathfrak{U}_\varepsilon$ genau ein Lot von der Länge ε auf $\mathfrak{M}^2$ fällen läßt. $\mathfrak{M}^2$ ist dann eine Ringfläche und $\mathfrak{U}_\varepsilon$ ihr Inneres. Wir führen nun ein Lot pP von der Länge ε mit seinem Fußpunkte p auf dem Knoten $\mathfrak{M}^1$ herum und richten es so ein, daß der Punkt P auf $\mathfrak{M}^1$ eine geschlossene Kurve c beschreibt, die mit $\mathfrak{M}^1$ die Verschlingungszahl 0 hat, oder, was dasselbe besagt, so daß c im Außenraum $\mathfrak{R}^3 - \mathfrak{U}_\varepsilon$ nullhomolog ist[16]). Dieses stetige Feld von Vektoren pP auf $\mathfrak{M}^1$ wird nun, wie beim Beweise des Satzes 3 durch ein differenzierbares Feld von normalen Vektoren $\mathfrak{u}$ ersetzt, und auf die gleiche Weise wird ein weiteres Feld $\mathfrak{v}$ konstruiert, so daß $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ in jedem Punkte von $\mathfrak{M}^1$ linear unabhängig sind. Sind dann F und G die affinen Koordinaten in den Normalebenen von $\mathfrak{M}^1$ mit den Basisvektoren $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$, so sind $F = 0$ und $G = 0$ zwei sich in $\mathfrak{M}^1$ schneidende und von Normalen von $\mathfrak{M}^1$ gebildete Regelflächen, die wir nur innerhalb $\mathfrak{U}_\varepsilon$ betrachten, wo sie zwei durch $\mathfrak{M}^1$ gehende Bänder bilden. c_1 und c_3 seien die beiden Randkurven des Bandes $F = 0$, c_2 und c_4 die des Bandes $G = 0$. Es sind doppelpunktfreie punktfremde Kurven auf der Ringfläche $\mathfrak{M}^2$, die sämtlich im Außenraum $\mathfrak{R}^3 - \mathfrak{U}_\varepsilon$ nullhomolog sind. Es gibt dann in $\mathfrak{R}^3 - \mathfrak{U}_\varepsilon$ vier singularitätenfreie orientierbare berandete Flächen $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_4$, die untereinander punktfremd sind und bzw. die Kurven $c_1, \ldots, c_4$ zum Rand haben (Anhang 4). Das Band $F = 0$ zusammen mit $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_3$ ist eine geschlossene Fläche F, die mit der aus dem Band $G = 0$, $\mathfrak{D}_2$ und $\mathfrak{D}_4$ bestehenden geschlossenen Fläche $\mathfrak{G}$ genau den Knoten $\mathfrak{M}^1$ gemeinsam hat. Wir setzen nun die Funktionen F und G, die bisher nur in $\mathfrak{U}_\varepsilon + \mathfrak{M}^2$ definiert sind, in den Außenraum $\mathfrak{R}^3 - \mathfrak{U}_\varepsilon$ stetig fort, so daß F genau in den Punkten von $\mathfrak{F}$ und G in den Punkten von $\mathfrak{G}$ verschwindet.

Zu dem Zwecke bemerken wir, daß die abgeschlossene Punktmenge $\mathfrak{U}_\varepsilon + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{F}$ den $\mathfrak{R}^3$ in genau zwei Gebiete $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{A}$ zerlegt. Da F auf der Fläche $\mathfrak{F}$ überall verschwinden soll, ist F auf der Begrenzung von $\mathfrak{I}$ und ebenso auf der Begrenzung von $\mathfrak{A}$ bereits definiert, und zwar ist auf der Begrenzung des einen Gebietes, etwa von $\mathfrak{A}$, überall $F \geqq 0$, auf der Begrenzung von $\mathfrak{I}$ dagegen $F \leqq 0$. Dann läßt sich aber F stetig in $\mathfrak{A}$ und ebenso in $\mathfrak{I}$ fortsetzen, so daß in $\mathfrak{A}$ überall $F > 0$, in $\mathfrak{I}$ dagegen $F < 0$ wird[17]). Analog wird die Funktion G auf

---

[16]) Vgl. das in Fußnote [4]) angeführte Buch S. 281.

[17]) Ist z. B. Q ein Punkt in $\mathfrak{A}$, P ein variabler Punkt auf der Begrenzung $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ und bezeichnen (Q, P) und $(Q, \mathfrak{B})$ die Abstände des Punktes Q von P, bzw. $\mathfrak{B}$, so setze man

$$F(Q) = (Q, \mathfrak{B}) + \max \frac{(Q, \mathfrak{B})}{(Q, P)} F(P).$$

Vgl. Fußnote [15]).

den ganzen $\mathfrak{R}^3$ erweitert. Man schließt nun die Flächen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ in eine große Kugel $\mathfrak{S}$ ein und approximiert F und G innerhalb $\mathfrak{S}$ durch Polynome Φ und Ψ, so daß Φ und Ψ außerhalb $\mathfrak{S} \neq 0$ werden, was man wie beim Beweise von Satz 4 erreicht. Die gemeinsamen Nullstellen von Φ und Ψ liegen dann bei genügend genauer Approximation in $\mathfrak{U}_\varepsilon$ und bilden (man vergleiche den Beweis des Satzes 3) einen in $\mathfrak{M}^1$ isotop deformierbaren Knoten, der somit aus allen reellen Punkten einer algebraischen Kurve besteht.

Anhang 1. (S. 3).

Existenz der normalen Umgebung von $\mathfrak{M}^m$.

Es genügt, den Fall $n - m = 2$ zu betrachten, da der Beweis im allgemeinen Falle analog verläuft. In einer Umgebung $\mathfrak{U}(p|\mathfrak{R}^n)$ eines Punktes p von $\mathfrak{M}^m$ mit den Koordinaten $a_1, \ldots, a_n$ läßt sich $\mathfrak{M}^m$ durch die Gleichungen

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad g(x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{A. 1}$$

darstellen, wobei f und g stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung besitzen und die Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{A. 2}$$

den Rang 2 hat. Ist nun q mit den Koordinaten $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ ein beliebiger zu dieser Umgebung gehöriger Punkt von $\mathfrak{M}^m$, Q mit den Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ ein Punkt auf der durch q gehenden Normalebene, so bestehen die Gleichungen

$$\begin{gathered} x_\nu - \bar{x}_\nu - \varrho f_\nu(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) - \sigma g_\nu(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = 0, \quad (\nu = 1, \ldots, n), \\ f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = 0, \quad g(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = 0. \end{gathered} \tag{A. 3}$$

Dabei setzen wir zur Abkürzung $f_\nu = \frac{\partial f}{\partial x_\nu}$, ferner $f_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$ usw. Das System (A. 3) läßt sich nach $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \varrho, \sigma$ auflösen, da die Funktionaldeterminante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + \varrho f_{11} + \sigma g_{11} & \varrho f_{12} + \sigma g_{12} & \cdot & f_1 & g_1 \\ \varrho f_{21} + \sigma g_{21} & 1 + \varrho f_{22} + \sigma g_{22} & \cdot & f_2 & g_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1 & f_2 & \cdot & 0 & 0 \\ g_1 & g_2 & \cdot & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

für $\varrho = \sigma = 0$ in

$$\Delta = \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \begin{vmatrix} f_\mu g_\mu \\ f_\nu g_\nu \end{vmatrix}^2$$

übergeht, also, da der Rang der Funktionalmatrix (A. 2) gleich 2 sein sollte, $\neq 0$ ist. Genauer gibt es nach dem Satze über implizite Funktionen zu dem Punkt $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$ eine Umgebung $\mathfrak{A}$ und zu der Stelle $\bar{x}_1 = a_1, \ldots, \bar{x}_n = a_n$, $\varrho = 0$, $\sigma = 0$ eine $(n+2)$-dimensionale Umgebung $\mathfrak{B}$ derart, daß zu jedem Wertsystem $x_1, \ldots, x_n$ aus $\mathfrak{A}$ ein und nur ein Wertsystem $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$, ϱ, σ aus $\mathfrak{B}$ gehört. — Da die linken Seiten von (A. 3) stetige Ableitungen erster Ordnung besitzen, so haben auch $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$, ϱ, σ, als Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ betrachtet, stetige Ableitungen erster Ordnung.

Nehmen wir nun an, $\mathfrak{M}^m$ besäße keine normale Umgebung, dann gäbe es zu jeder Zahl der Nullfolge $\varepsilon_i = \frac{1}{i}$ einen Punkt Q_i in der ε_i-Umgebung von $\mathfrak{M}^m$, durch den wenigstens zwei Lote von einer Länge $< \varepsilon_i$ hindurchgehen. Diese Punkte haben, weil $\mathfrak{M}^m$ als geschlossen vorausgesetzt wurde, einen Häufungspunkt p auf $\mathfrak{M}^m$, und man darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Folge $Q_1, Q_2, \ldots$ selbst nach p konvergiert. Sei $Q_i q_i$ eines der von Q_i auf $\mathfrak{M}^m$ gefällten Lote. Dann konvergieren auch die Fußpunkte q_i nach p, da die Längen der Lote nach 0 gehen. Sie liegen daher schließlich in der Umgebung $\mathfrak{U}(p \mid \mathfrak{R}^n)$, in der die Darstellung (A. 1) gilt. Es bestehen also für genügend großes i zwischen den Koordinaten $x_1^i, \ldots, x_n^i$ von Q_i und den Koordinaten $\bar{x}_1^i, \ldots, \bar{x}_n^i$ von q_i die Gleichungen (A. 3), in denen man an Stelle von x_ν, $\bar{x}_\nu$, ϱ, σ nur x_ν^i, $\bar{x}_\nu^i$, ϱ^i, σ^i zu schreiben hat. Aus

$$\lim_{i=\infty} (x_\nu^i - \bar{x}_\nu^i) = 0$$

folgt nun wegen (A. 3) und weil die Funktionalmatrix (A. 2) den Rang 2 hat, $\lim \varrho^i = 0$, $\lim \sigma^i = 0$. Für genügend großes i liegen also die Punkte q_i in der Umgebung $\mathfrak{A}$ von p und die Stellen $\bar{x}_1^i, \ldots, \bar{x}_n^i$, ϱ^i, σ^i in der Umgebung $\mathfrak{B}$. Dann sind aber, wie wir gesehen haben, die Werte $\bar{x}_1^i, \ldots, \bar{x}_n^i$, ϱ^i, σ^i eindeutig durch $x_1^i, \ldots, x_n^i$ bestimmt, im Widerspruch zu der Annahme, daß zu jedem Punkte Q_i zwei verschiedene Normalen gehören.

Anhang 2 (S. 10).

Differenzierbarkeitseigenschaften.

Um die benutzten Differenzierbarkeitseigenschaften der Komponenten u_ν, v_ν der Vektoren $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ sowie der Funktionen F, G nachzuweisen, dürfen wir uns auf eine Umgebung des Punktes P von $\mathfrak{M}^{n-2}$ beschränken, in der $\mathfrak{M}^{n-2}$ durch die Gleichungen (A. 1) dargestellt wird. Zwischen den Koordinaten $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ eines Punktes q von $\mathfrak{M}^{n-2}$ und den Koordinaten

$x_1, \ldots, x_n$ eines Punktes Q der durch q gehenden Normalebene bestehen dann die Gleichungen (A. 3), auf Grund welcher die $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$, ϱ, σ stetig differenzierbare Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ sind:

$$\bar{x}_\nu = h_\nu(x_1, \ldots, x_n), \tag{A. 4}$$

$$\varrho = r(x_1, \ldots, x_n), \quad \sigma = s(x_1, \ldots, x_n). \tag{A. 5}$$

Im Punkte q greifen die beiden voneinander unabhängigen Vektoren $\mathfrak{f} = (f_1(\bar{x}_\nu), \ldots, f_n(\bar{x}_\nu))$ und $\mathfrak{g} = (g_1(\bar{x}_\nu), \ldots, g_n(\bar{x}_\nu))$ an, die die Normalebene von q aufspannen; sie werden durch die Substitution (A. 4) stetig differenzierbare Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$. Das Vektorfeld $\mathfrak{p}(x_1, \ldots, x_n)$, das im ganzen $\mathfrak{R}^n$ definiert ist und dessen Komponenten Polynome in $x_1, \ldots, x_n$ sind, betrachten wir nun insbesondere auf $\mathfrak{M}^{n-2}$. Der im Punkte q angreifende Vektor ist

$$\mathfrak{p}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = \mathfrak{p}(h_1(x_\nu), \ldots, h_n(x_\nu)) = \bar{\mathfrak{p}}(x_1, \ldots, x_n).$$

Er ist also stetig differenzierbar in $x_1, \ldots, x_n$. Seine Projektion auf die von $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ aufgespannte Normalebene läßt sich in der Form schreiben

$$\mathfrak{u} = \alpha\mathfrak{f} + \beta\mathfrak{g}, \tag{A. 6}$$

wobei sich α und β aus den Vektorgleichungen

$$(\bar{\mathfrak{p}} - \mathfrak{u}) \cdot \mathfrak{f} = 0, \quad (\bar{\mathfrak{p}} - \mathfrak{u}) \cdot \mathfrak{g} = 0$$

berechnen:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} \bar{\mathfrak{p}}\cdot\mathfrak{f} & \mathfrak{g}\cdot\mathfrak{f} \\ \bar{\mathfrak{p}}\cdot\mathfrak{g} & \mathfrak{g}\cdot\mathfrak{g} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathfrak{f}\cdot\mathfrak{f} & \mathfrak{g}\cdot\mathfrak{f} \\ \mathfrak{f}\cdot\mathfrak{g} & \mathfrak{g}\cdot\mathfrak{g} \end{vmatrix}}, \quad \beta = \frac{\begin{vmatrix} \mathfrak{f}\cdot\mathfrak{f} & \bar{\mathfrak{p}}\cdot\mathfrak{f} \\ \mathfrak{f}\cdot\mathfrak{g} & \bar{\mathfrak{p}}\cdot\mathfrak{g} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathfrak{f}\cdot\mathfrak{f} & \mathfrak{g}\cdot\mathfrak{f} \\ \mathfrak{f}\cdot\mathfrak{g} & \mathfrak{g}\cdot\mathfrak{g} \end{vmatrix}}.$$

α und β sind stetig differenzierbare Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$, da wegen der linearen Unabhängigkeit von $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ der Nenner $\neq 0$ ist. Ebenso beweist man die stetige Differenzierbarkeit der Koeffizienten γ und δ in dem Vektor

$$\mathfrak{v} = \gamma\mathfrak{f} + \delta\mathfrak{g}. \tag{A. 7}$$

Der Vektor von q nach Q ist nun einerseits nach (A. 3) $= \varrho\mathfrak{f} + \sigma\mathfrak{g}$, anderseits $= F\mathfrak{u} + G\mathfrak{v}$. Mit Hilfe von (A. 6) und (A. 7) erhält man daraus für F und G die Ausdrücke

$$F = \frac{\begin{vmatrix} \varrho & \sigma \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}}, \quad G = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \varrho & \sigma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}}.$$

Da $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varrho, \sigma$ stetig differenzierbar sind und der Nenner wegen der linearen Unabhängigkeit von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ nicht verschwindet, sind schließlich F und G stetig differenzierbare Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$.

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
JENA

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY E. HECKE
G. HERGLOTZ E. KÄHLER E. LANDAU
O. PERRON W. THRELFALL H. WEYL

41. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1936

Inhaltsverzeichnis

Seite

Avakumović, V. und J. Karamata, Über einige Taubersche Sätze, deren Asymptotik von Exponentialcharakter ist. I. 345

Beck, E., Existenzbeweise zur Wahrscheinlichkeitstheorie 222

Besicovitch, A. S., On differentiation of functions of two variables 402

Blaschke, W., Integralgeometrie 13. Zur Kinematik 465

Blaschke, W., Integralgeometrie 20. Zur elliptischen Geometrie 785

Brauer, R., Eine Bedingung für vollständige Reduzibilität von Darstellungen gewöhnlicher und infinitesimaler Gruppen 330

Chowla, S. and S. S. Pillai, Hypothesis K of Hardy and Littlewood 537

Cramér, H., Über eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion 405

Dinghas, A., Bemerkung zu einer Differentialungleichung von Carleman . . . 713

Doetsch, G., Zerlegung einer Funktion in Gaußsche Fehlerkurven und zeitliche Zurückverfolgung eines Temperaturzustandes. 283

Doetsch, G., Konvexe Kurven und Fußpunktkurven 717

Erdélyi, A., Über die Integration der Mathieuschen Differentialgleichung durch Laplacesche Integrale 653

Fabricius-Bjerre, Fr., Über algebraische Flächen vierter Ordnung im projektiven R_4 686

Fitting, H., Über die Existenz gemeinsamer Verfeinerungen bei direkten Produktzerlegungen einer Gruppe 380

Gentzen, G., Die Widerspruchsfreiheit der Stufenlogik 357

Haack, W., Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe. IV. Über Minimalkomplexe 252

Hadwiger, H., Ein Satz über geschlossene Vektorpolygone des Hilbertschen Raumes 732

Hua, L., A Problem on the additive Theory of Number of several variables . . 708

Ingham, A. E., Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series 367

Kamke, E., Über die partielle Differentialgleichung $f(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+g(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=h(x,y)$ 56

Karamata, J., Über einige reihentheoretische Sätze 67

Karamata, J. und V. Avakumović, Über einige Taubersche Sätze, deren Asymptotik von Exponentialcharakter ist. I. 345

Kienast, A., Über die asymptotische Darstellung gewisser Lösungen der Differenzengleichung der Hermiteschen Polynome 739

Klein-Barmen, F., Dedekindsche und distributive Verbände 261

Koschmieder, L., Adjungierte Extremalflächen im vierstufigen Raume . . . 43

Köthe, G., Das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen im Hilbertschen Raum 137

Köthe, G., Die Gleichungstheorie im Hilbertschen Raum 153

Kraus, Fr., Über konvexe Matrixfunktionen 18

Krull, W., Hauptidealzerlegung in Polynomringen 213

Krull, W., Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche 545

Krull, W., Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. II. v-Ideale und vollständig ganz abgeschlossene Integritätsbereiche 665

Seite

Mitra, S. C., On certain new connections between Legendre and Bessel Functions 680
Moessner, A. und W. Schulz, Über Potenzsummen ganzer rationaler Zahlen 340
Müller, M., Über den Konvergenzbereich des Verfahrens der schrittweisen Näherungen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen 163
Petterson, E. L., Einige Bedingungen für die Anzahl und die Gradzahlen der Faktoren gewisser ganzzahliger Polynome 200
Petterson, E. L., Über die Irreduzibilität gewisser ganzzahliger Polynome . . . 319
Pillai, S. S. and S. Chowla, Hypothesis K of Hardy and Littlewood 537
Raff, H., Lineare Transformationen beschränkter integrierbarer Funktionen. (Erste Mitteilung) 605
Reichardt, H., Über Normalkörper mit Quaternionengruppe 218
Reichardt, H., Eine Bemerkung zur vorstehenden Arbeit von F. K. Schmidt . . 439
Reidemeister, K., Das Dualitätstheorem für Homotopieketten ringe 176
Ridder, J., Denjoysche und Perronsche Integration 184
Rogosinski, W., Abschnittsverhalten bei trigonometrischen und insbesondere Fourierschen Reihen 75
Sauter, I., Zur Theorie der Bogen n-ter (Realitäts-) Ordnung im projektiven R_n. (Erste Mitteilung) 507
Schmidt, F. K., Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen I. Beweis des Riemann-Rochschen Satzes für algebraische Funktionen mit beliebigem Konstantenkörper 415
Schmidt, F. K., Über die Erhaltung der Kettensätze der Idealtheorie bei beliebigen endlichen Körpererweiterungen 443
Schulz, W. und A. Moessner, Über Potenzsummen ganzer rationaler Zahlen 340
Seifert, H., Algebraische Approximation von Mannigfaltigkeiten 1
v. Sz. Nagy, J., Über die Buschenveloppen von H. Brunn 479
v. Sz. Nagy, B., Über eine Frage aus der Theorie der orthogonalen Funktionensysteme 541
Theilheimer, F., Ein Beitrag zur Theorie der charakteristischen Invarianten . 451
Tonolo, A., Zur Integration einer Klasse von Systemen linearer homogener partieller Differentialgleichungen erster Ordnung 754
Trjitzinsky, W. J., Linear Functionals in the Theory of Quasi-Analytic and D-Analytic Classes 493
Varga, O., Integralgeometrie 19. Mittelwerte an dem Durchschnitt bewegter Flächen 768
Wagner, K., Beweis des Jordanschen Kurvensatzes für den Jordanbogen 396
Ward, A. J., The Perron-Stieltjes Integral 578
Wielandt, H., Eine Kennzeichnung der direkten Produkte von p-Gruppen . . 281
Zumbusch, H., Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Die Automorphismen der unbeschränkten eigentlichen Kreiskörper 631
Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft für das Jahr 1938 630

Anhang 3 (S. 11).

In der Umgebung $\mathfrak{U}(p\,|\,\mathfrak{R}^n)$ eines Punktes p von $\mathfrak{M}^{n-1}$, in der für $\mathfrak{M}^{n-1}$ die Darstellung

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

gilt, bestehen zwischen den Koordinaten $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ eines Punktes q von $\mathfrak{M}^{n-1}$ und den Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ eines Punktes Q auf der durch q gehenden Normalen die Gleichungen

$$x_\nu - \bar{x}_\nu - \varrho f_\nu(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = 0, \qquad \left(f_\nu = \frac{\partial f}{\partial x_\nu}\right)$$
$$f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = 0,$$

aus denen sich wie im Anhang 1 die $\bar{x}_\nu$ und ϱ als stetig differenzierbare Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ ergeben. Für den Abstand qQ erhält man dann

$$\sqrt{\Sigma (x_\nu - \bar{x}_\nu)^2} = \varrho \sqrt{\Sigma f_\nu^2}.$$

Da f zweimal stetig differenzierbar und $\Sigma f_\nu^2 \neq 0$ ist, so ist dies eine stetig differenzierbare Funktion von $x_1, \ldots, x_n$. Die Quadratwurzel ist positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem der Vektor grad f in das Außen- oder Innengebiet von $\mathfrak{M}^m$ weist.

Anhang 4 (S. 13).

$\mathfrak{R}^3 - \mathfrak{U}_\varepsilon$ ist eine von der Ringfläche $\mathfrak{M}^2$ berandete dreidimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^3$, die wir mit einer bestimmten simplizialen Zerlegung versehen. Auf der Ringfläche $\mathfrak{M}^2$ sei c_1' eine doppelpunktfreie geschlossene Kurve, die aus Kanten der simplizialen Zerlegung besteht und in $\mathfrak{M}^3$ homolog null ist. Die zweidimensionale Kette, deren Rand c_1' ist, läßt sich nun durch „Umschalten“ [18]) an den Kanten und Ecken in eine singularitätenfreie orientierbare Fläche $\mathfrak{D}_1'$ überführen, die aus Dreiecken einer passenden Unterteilung der gegebenen simplizialen Zerlegung besteht und abgesehen vom Rand c_1' ganz im Innern von $\mathfrak{M}^3$ liegt. Da $\mathfrak{D}_1'$ zweiseitig in $\mathfrak{M}^3$ liegt — denn $\mathfrak{D}_1'$ ist ebenso wie $\mathfrak{M}^3$ orientierbar —, so kann man $\mathfrak{D}_1'$ durch beliebig kleine Deformationen in drei weitere punktfremde Flächen $\mathfrak{D}_2'$, $\mathfrak{D}_3'$, $\mathfrak{D}_4'$ überführen, die abgesehen von ihren Rändern c_2', c_3', c_4' im Innern von $\mathfrak{M}^3$ liegen. Endlich sind die Kurven $c_1', \ldots, c_4'$ durch eine topologische Deformation der Ringfläche $\mathfrak{M}^2$ in die vorgegebenen Kurven $c_1, \ldots, c_4$ überführbar. Diese Deformation läßt sich zu einer Deformation von ganz $\mathfrak{M}^3$ erweitern, wodurch die Flächen $\mathfrak{D}_1', \ldots, \mathfrak{D}_4'$ in die gewünschten in $c_1, \ldots, c_4$ eingespannten Flächen $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_4$ übergehen.

---

[18]) F. Frankl und L. Pontrjagin, Ein Knotensatz mit Anwendung auf die Dimensionstheorie. Math. Ann. 102 (1930), S. 785—789.

(Eingegangen am 11. August 1935.)

Über konvexe Matrixfunktionen *).

Von

Fritz Kraus in Prag.

Einleitung.

Definition einer konvexen Matrixfunktion.

Es sei $f(\omega)$ eine in einem Intervall J (es kann offen, halb offen oder geschlossen sein) erklärte reelle Funktion der reellen Veränderlichen ω. Bekanntlich nennt man sie konvex, wenn für je drei Argumentwerte $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ stets

$$f(\omega_2) \leqq \frac{\omega_3 - \omega_2}{\omega_3 - \omega_1} f(\omega_1) + \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_3 - \omega_1} f(\omega_3)$$

ist. Schreibt man ω_2 in der Form $\omega_2 = (1-t)\,\omega_1 + t\,\omega_3$, so ist t zwischen 0 und 1 gelegen. Man kann also die Konvexitätsbedingung in der Form aussprechen

$$f((1-t)\,\omega_1 + t\,\omega_3) \leqq (1-t)\,f(\omega_1) + t\,f(\omega_3),$$

gültig für je zwei Werte ω_1, ω_3 aus J und jedem beliebigen Wert t aus dem Intervall $(0, 1)$.

In einer keinen der Punkte $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ auszeichnenden Schreibweise kann die Konvexitätsbedingung mit Benutzung des zweiten Differenzenquotienten in der Form

$$\frac{1}{2} Q(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{f(\omega_1)}{(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \omega_3)} + \frac{f(\omega_2)}{(\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 - \omega_3)} + \\ + \frac{f(\omega_3)}{(\omega_3 - \omega_1)(\omega_3 - \omega_2)} \geqq 0$$

geschrieben werden.

Herr Löwner hat den Begriff der *Monotonie* einer skalaren Funktion auf Funktionen von *Matrizen* ausgedehnt [1]). In Analogie hierzu führe ich in dieser Arbeit *konvexe* Matrixfunktionen ein. Die zu $f(\omega)$ gehörige Matrixfunktion n-ter Stufe ist bekanntlich in folgender Weise zu erklären [1]). Man betrachte die Gesamtheit der reellen, symmetrischen Matrizen [2]) n-ten Grades $X_n = (x_{ik})$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, deren Eigenwerte (d. h. Eigenwerte der zugehörigen quadratischen Form) dem Definitionsbereich der Funktion $f(\omega)$ angehören. Unter $f(X_n)$ ist die reelle, symmetrische Matrix zu

*) Diese Arbeit wurde an der naturwissenschaftlichen Fakultät der Deutschen Universität in Prag als Dissertation eingereicht und approbiert.

[1]) Siehe Karl Löwner, Math. Zeitschr. 38, Heft 2, S. 177.

[2]) Im folgenden wollen wir den Zusatz reell symmetrisch bei Matrizen stets weglassen, da andere nicht in Betracht gezogen werden.

verstehen, die aus X_n entsteht, indem jeder Eigenvektor $\mathfrak{v}$ beibehalten, der zugehörige Eigenwert λ jedoch durch $f(\lambda)$ ersetzt wird.

Man betrachte nun zwei Matrizen $X_n^{(1)}$ und $X_n^{(3)}$ aus dem Definitionsbereich der Matrixfunktion und die diese beiden Matrizen verbindende „Gerade" im Matrixraum, d. h. die einparametrige Schar von Matrizen

$$X_n = (1-t)\, X_n^{(1)} + t\, X_n^{(3)}. \tag{1}$$

Beschränkt man t auf das Intervall $0 \leqq t \leqq 1$, so erhält man die die „Punkte" $X_n^{(1)}$ und $X_n^{(3)}$ des Matrixraumes verbindende „Strecke" des Matrixraumes. Man beweist leicht, daß die Eigenwerte eines „Punktes" dieser „Strecke" dem Intervall angehören, das von dem kleinsten und dem größten der $2n$ Eigenwerte von $X_n^{(1)}$ und $X_n^{(3)}$ begrenzt wird. Die ganze „Strecke" gehört also dem Definitionsbereich der Matrixfunktion an.

Wir definieren nun: *Eine Matrixfunktion heiße konvex, wenn für jedes solche Matrixpaar, das außerdem der Ungleichung*

$$X_n^{(1)} \leq X_n^{(3)} \text{ [3]} \tag{2}$$

genügt und für jeden Wert t aus dem Intervall $0 < t < 1$ stets

$$f[(1-t)\, X_n^{(1)} + t\, X_n^{(3)}] \leq (1-t) f(X_n^{(1)}) + t f(X_n^{(3)}) \tag{3}$$

ist. Die skalare Funktion heiße dann *konvex von n-ter Stufe* [4]).

Offenbar ist diese Definition gleichbedeutend mit der Aussage, daß jede skalare Funktion von t: $\varphi(t) = f[(1-t)\, X_n^{(1)} + t\, X_n^{(3)})\ (x, x)$, bei willkürlichem aber nach seiner Wahl festem x im Intervall $0 \leqq t \leqq 1$ im gewöhnlichen Sinne konvex ist.

Man kann daran denken, die Definition in der Weise abzuändern, daß man die Voraussetzung (2) fallen läßt. Die späteren Überlegungen (siehe § 3) werden jedoch zeigen, daß man hierdurch zu keiner spezielleren Funktionenklasse gelangt.

§ 1.

Beweis der zweimal stetigen Differenzierbarkeit einer von höherer Stufe konvexen Funktion [5]).

Zunächst sollen drei Bemerkungen vorausgeschickt werden.

1. Bemerkung: *Eine von n-ter Stufe ($n \geqq 2$) konvexe Funktion ist von jeder niedrigeren* [6]) *Stufe konvex.* Man beweist diesen Satz leicht,

[3]) Daß von zwei Matrizen n-ten Grades A_n und B_n $A_n \leq B_n$ ist, bedeutet, daß für die zugehörigen quadratischen Formen $A_n(x, x)$ und $B_n(x, x)$ identisch die Ungleichung $A_n(x, x) \leq B_n(x, x)$ besteht. Siehe S. 18, Fußnote 1.

[4]) Die Konvexität 1-ter Stufe ist offenbar gleichbedeutend mit der gewöhnlichen Konvexität.

[5]) In diesem Paragraphen wird sogar die Beschränktheit des dritten Differenzquotienten bewiesen werden.

[6]) Insbesondere von erster Stufe.

wenn man beachtet, daß für eine zerfallende Matrix $C_n = \left(\begin{array}{c|c} C_m^{(1)} & 0 \\ \hline 0 & C_{n-m}^{(2)} \end{array}\right)$ offenbar $f(C_n) = \left(\begin{array}{c|c} f(C_m^{(1)}) & 0 \\ \hline 0 & f(C_{n-m}^{(2)}) \end{array}\right)$ ist und daß für ein Paar gleichzerfallender Matrizen $A_n = \left(\begin{array}{c|c} A_m^{(1)} & 0 \\ \hline 0 & A_{n-m}^{(2)} \end{array}\right)$ und $B_n = \left(\begin{array}{c|c} B_m^{(1)} & 0 \\ \hline 0 & B_{n-m}^{(2)} \end{array}\right)$ die Ungleichung $A_n \leq B_n$ mit dem Paar von Ungleichungen $A_m^{(1)} \leq B_m^{(1)}$, $A_{n-m}^{(2)} \leq B_{n-m}^{(2)}$ gleichbedeutend ist.

Aus dieser Bemerkung folgt, daß jede Aussage, die für eine konvexe Funktion von einer bestimmten Stufe gültig ist, auch für konvexe Funktionen jeder höheren Stufe Geltung haben muß. Wenn wir insbesondere im folgenden beweisen werden, daß jede von 2-ter Stufe konvexe Funktion im Innern des Definitionsintervalles zweimal stetig differenzierbar ist, so ist diese Differenzierbarkeitseigenschaft hiermit auch für von höherer Stufe konvexe Funktionen bewiesen.

2. Bemerkung: *Die Beziehung zwischen der Matrix C_n und der ihr zugeordneten Matrix $f(C_n)$ ist orthogonal invariant.* D. h., entsteht allgemein eine Matrix X_n^* aus X_n durch eine feste orthogonale Transformation T, so gehört mit C_n auch C_n^* dem Definitionsbereich von $f(X_n)$ an und es ist $f(C_n^*) = (f(C_n))^*$.

3. Bemerkung: *Die Ungleichung $A_n \leq B_n$ ist invariant gegenüber jeder linearen, also insbesondere gegenüber jeder orthogonalen Transformation.*

Aus diesen Bemerkungen folgt, daß man, wenn die Konvexität einer Matrixfunktion zum Ausdruck gebracht werden soll, annehmen kann, es sei eine der in der Konvexitätsrelation (siehe Einleitung (3)) auftretenden drei Matrizen, etwa $X_n^{(2)} = (1-t)\,X_n^{(1)} + t\,X_n^{(3)}$ auf die Hauptachsen transformiert. Indem wir uns in diesem Paragraphen von nun an auf den Fall $n = 2$ beschränken, bezeichnen wir deren Eigenwerte mit $\lambda_1 \leqq \lambda_2$.

Der Gedankengang des Beweises, der im Titel dieses Paragraphen angegebenen Differenzierbarkeitseigenschaft sei nun angedeutet.

Da nach der Voraussetzung (siehe Einleitung (2)). $X_2^{(1)} \leqq X_2^{(3)}$ und wegen $0 < t < 1$ die Matrix $X_2^{(2)}$ zwischen $X_2^{(1)}$ und $X_2^{(3)}$ gelegen ist, so gilt für die Eigenwerte von $X_2^{(1)}$, die mit $\nu_1 \leqq \gamma$ bezeichnet werden sollen, das Ungleichungspaar

$$\nu_1 \leqq \lambda_1, \quad \gamma \leqq \lambda_2 \tag{1}$$

und für das Paar von Eigenwerten von $X_2^{(3)}$, die $\gamma^* \leqq \nu_2$ heißen mögen

$$\lambda_1 \leqq \gamma^*, \quad \lambda_2 \leqq \nu_2. \tag{2}$$

Wir wollen nun die Konvexitätsbedingung nicht allgemein ansetzen, sondern nur für solche Matrixpaare, für die

(3) $$\gamma = \gamma^*$$

ist.

Nach den Ungleichungen (1) und (2) liegt dann dieser Wert in dem Intervall $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$.

Es wird sich ergeben, daß die zweimalige Differenzierbarkeit bereits aus den Ungleichungen folgt, welche aus der Konvexitätsrelation (siehe Einleitung (3)) in diesem Spezialfall fließen.

Für das folgende ist es nun von besonderer Wichtigkeit, die Frage zu entscheiden, ob bei willkürlicher Wahl von fünf Werten in der Anordnung

(4) $$\nu_1 < \lambda_1 < \gamma < \lambda_2 < \nu_2$$

drei Matrizen $X_2^{(1)}, X_2^{(2)}, X_2^{(3)}$ gefunden werden können, die auf einer „Geraden" liegen und von denen $X_2^{(1)}$ die Eigenwerte ν_1 und γ, ferner $X_2^{(2)}$ die Eigenwerte λ_1 und λ_2 und endlich $X_2^{(3)}$ die Eigenwerte γ und ν_2 besitzt. Daraus, daß $X_2^{(1)}$ und $X_2^{(3)}$ den Eigenwert γ gemein haben und $\nu_1 < \gamma < \nu_2$ ist, folgt, falls die Frage überhaupt eine Lösung besitzt, jedenfalls die Ungleichung $X_2^{(1)} \leqq X_2^{(3)}$, so daß diese früher in die Konvexitätsbedingung eingeführte Ungleichung hier nicht besonders angesetzt werden muß. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir bei der weiteren Untersuchung $\gamma = 0$ annehmen; denn wenn man $(X^{(i)})^* = X^{(i)} - \gamma E$[7]) $(i = 1, 2, 3)$ setzt, so erhält man eine Lösung derselben Aufgabe, in der nur an die Stelle der oben angegebenen fünf Werte die um γ verkleinerten getreten sind.

In dem Spezialfall $\gamma = 0$ muß man also den Ansatz machen

$$X_2^{(2)}(x, x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$$

$$X_2^{(1)}(x, x) = \nu_1 (b_1 x_1 + b_2 x_2)^2 \qquad (b_1^2 + b_2^2 = 1)$$

und

$$X_2^{(3)}(x, x) = \nu_2 (a_1 x_1 + a_2 x_1)^2 \qquad (a_1^2 + a_2^2 = 1).$$

Wir haben jetzt noch analytisch zum Ausdruck zu bringen, daß die drei Matrizen auf einer „Geraden" liegen. Das bedeutet, daß die Differenz $X_2^{(2)} - X_2^{(1)}$ sich von $X_2^{(3)} - X_2^{(2)}$ um einen skalaren Faktor c unterscheidet[8]). Dies drückt sich aber nach Einführung der Bezeichnungen

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 = L_1, \qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 = L_2$$

---

[7]) E sei die Einheitsmatrix.

[8]) Mit dem früher eingeführten Parameter t hängt das c offenbar durch die einfache Relation $c = \frac{t}{1-t}$ zusammen.

durch die Identität

$$(c+1)\,X_2^{(2)}(x,x) = c\,\nu_2 L_2^2 + \nu_1 L_1^2$$

aus. Das bedeutet folgende Koeffizientengleichungen:

$$\begin{aligned}
&\text{I.} && (c+1)\,\lambda_1 &&= c\,\nu_2 a_1^2 + \nu_1 b_1^2.\\
&\text{II.} && (c+1)\,\lambda_2 &&= c\,\nu_2 a_2^2 + \nu_1 b_2^2.\\
&\text{III.} && 0 &&= c\,\nu_2 a_1 a_2 + \nu_1 b_1 b_2.\\
&\text{IV.} && 1 &&= a_1^2 + a_2^2.\\
&\text{V.} && 1 &&= b_1^2 + b_2^2.
\end{aligned}$$

Durch Addition von I. und II. ergibt sich unter Berücksichtigung von IV. und V.

$$(c+1)\,(\lambda_1+\lambda_2) = c\,\nu_2 + \nu_1$$

oder

$$c\,(\lambda_1+\lambda_2-\nu_2) = \nu_1 - (\lambda_1+\lambda_2).$$

Da (siehe (4), worin $\gamma = 0$ zu setzen ist) $\lambda_1+\lambda_2-\nu_2 < 0$ ist, so folgt also weiter

$$c = \frac{\lambda_1+\lambda_2-\nu_1}{\nu_2-(\lambda_1+\lambda_2)}. \tag{5}$$

Wieder ersieht man aus (4), daß der Zähler dieses Ausdruckes positiv ist, also erhält man c als positive Größe, oder, was dasselbe aussagt, *t als eine Zahl zwischen* 0 *und* 1.

Zur Bestimmung von a_i^2 und b_i^2, $(i = 1, 2)$, gehen wir in folgender Weise vor: Aus III. folgt

$$c^2\,\nu_2^2\,a_1^2\,a_2^2 - \nu_1^2\,b_1^2\,b_2^2 = 0.$$

Indem man darin auf Grund von IV. und V. $a_1^2 = 1 - a_2^2$ und $b_1^2 = 1 - b_2^2$ setzt, so ergibt sich

$$c^2\,\nu_2^2\,a_2^2\,(1-a_2^2) - \nu_1^2\,b_2^2\,(1-b_2^2) = 0$$

oder

$$-c^2\,\nu_2^2\,a_2^4 + c^2\,\nu_2^2\,a_2^2 + \nu_1^2\,b_2^4 - \nu_1^2\,b_2^2 = 0. \tag{6}$$

Schreibt man II. in der Form

$$c\,\nu_2\,a_2^2 = (c+1)\,\lambda_2 - \nu_1\,b_2^2$$

und quadriert, so erhält man

$$c^2\,\nu_2^2\,a_2^4 = (c+1)^2\,\lambda_2^2 - 2\,(c+1)\,\lambda_2\,\nu_1\,b_2^2 + \nu_1^2\,b_2^4. \tag{7}$$

Addiert man (6) und (7) so folgt

$$c^2\,\nu_2^2\,a_2^2 + [2\,(c+1)\,\lambda_2\,\nu_1 - \nu_1^2]\,b_2^2 = (c+1)^2\,\lambda_2^2. \tag{8}$$

Dies zusammen mit der früheren Gleichung II gibt ein Paar von linearen Gleichungen zur Bestimmung von b_2^2 und a_2^2. Ihre Determinante ist, wie man nach leichter Rechnung sieht, gleich $c\,\nu_1\,\nu_2\,[2\,(c+1)\,\lambda_2 - \nu_1 - c\,\nu_2]$ oder, nach Einsetzung des bereits gefundenen Wertes von c,

$$\nu_1\,\nu_2\,\frac{(\lambda_1+\lambda_2-\nu_1)\,(\lambda_1-\lambda_2)\,(\nu_1-\nu_2)}{[\nu_2-(\lambda_1+\lambda_2)]^2},$$

also $\neq 0$. Das Gleichungspaar II und (8) bestimmt die Werte b_2^2 und a_2^2 eindeutig und zwar ergibt sich:

$$\text{VI.} \quad a_2^2 = \frac{\lambda_2 (\lambda_1 \nu_1 + \lambda_2 \nu_2 - \nu_1 \nu_2)}{\nu_2 (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_1 + \lambda_2 - \nu_1)}$$

und

$$\text{VII.} \quad b_2^2 = \frac{\lambda_2 (\nu_1 \lambda_2 + \nu_2 \lambda_1 - \nu_1 \nu_2)}{\nu_1 (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_1 + \lambda_2 - \nu_2)}$$

und hieraus

$$\text{VIII.} \quad a_1^2 = \frac{\lambda_1 (\nu_1 \nu_2 - \nu_1 \lambda_2 - \nu_2 \lambda_1)}{\nu_2 (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_1 + \lambda_2 - \nu_1)}$$

und

$$\text{IX.} \quad b_1^2 = \frac{\lambda_1 (\nu_1 \nu_2 - \lambda_1 \nu_1 - \lambda_2 \nu_2)}{\nu_1 (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_1 + \lambda_2 - \nu_2)}.$$

Die gefundenen Größen können nun gewiß nicht als Lösung unserer Aufgabe in Betracht kommen, wenn eine von ihnen negativ ist. Man sieht leicht ein, indem man wieder die Ungleichung (4) beachtet, daß sämtliche Größen dann und nur dann nicht negativ sind, wenn die Ungleichung besteht

$$\nu_1 \lambda_2 + \nu_2 \lambda_1 - \nu_1 \nu_2 \geqq 0. \tag{9}$$

Diese Ungleichung wollen wir im folgenden stets als erfüllt voraussetzen.

Nachdem wir die Quadrate der a_j und b_j ($j = 1, 2$) bestimmt haben, können wir, da wir Ungleichung (9) voraussetzen, Wurzeln ziehen, um zu den Größen selbst zu gelangen. Daß nicht alle Vorzeichen in Betracht kommen, ersieht man aus Gleichung III. Man sieht, daß man bei willkürlicher Wahl der Vorzeichen für die Wurzeln aus den Größen a_2^2 und b_1^2 (die offenbar positiv sind) noch bei a_1 und b_2 die Vorzeichen gleichzeitig ändern darf. Durch Einsetzen der für diese vier Größen gefundenen Werte in I., II., III. verifiziert man nun, daß die gefundenen Größen bei allen angegebenen Vorzeichenkombinationen tatsächlich Lösungen darstellen. IV. und V. sind, wie man aus der Entstehung der Werte sieht, selbstverständlich erfüllt.

Zusammenfassend können wir nun sagen: *Die anfänglich gestellte Frage, ob es möglich ist, nach Vorgabe der fünf Werte in der Anordnung* $\nu_1 < \lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \nu_2$ *drei auf einer „Geraden" liegenden Matrizen* $X_2^{(1)}$, $X_2^{(2)}$, $X_2^{(3)}$ *zu finden, die der Reihe nach die Eigenwertpaare* $\nu_1, 0$; λ_1, λ_2; $0, \nu_2$; *besitzen, ist zu bejahen, falls diese Werte noch die Ungleichung* (9) *erfüllen.*

Für das weitere braucht man orthogonale Matrizen $T_2^{(1)}$ und $T_2^{(3)}$, die die beiden Matrizen $X_2^{(1)}$ bzw. $X_2^{(3)}$ auf Hauptachsen transformieren. D. h. es sollen $T_2^{(1)\prime} X_2^{(1)} T_2^{(1)}$, $T_2^{(3)\prime} X_2^{(3)} T_2^{(3)}$ Diagonalmatrizen sein. Da $X_2^{(1)}$ und $X_2^{(3)}$ zu Quadraten von Linearformen gehören, so sind sie sofort zu finden. Es ist offenbar

$$T_2^{(1)} = \begin{pmatrix} -b_1 & b_2 \\ -b_2, & -b_1 \end{pmatrix} \text{ und } T_2^{(3)} = \begin{pmatrix} -a_1 & a_2 \\ -a_2, & -a_1 \end{pmatrix}$$

ein Lösungssystem unserer Aufgabe, und die übrigen entstehen daraus durch Zeilenvertauschung und Änderung der Vorzeichen bei beiden Matrizen unabhängig voneinander.

Es sei nun $f(\omega)$ eine konvexe Funktion 2-ter Stufe; ihr Definitionsintervall enthalte $\omega = 0$ im Innern. Die vier Werte $\nu_1, \lambda_1, \lambda_2, \nu_2$ aus ihrem Definitionsbereich mögen (4) entsprechend angeordnet sein und der Ungleichung (9) genügen.

Wir bilden nun nach dem eben geschilderten Verfahren die zugehörigen Matrizen $X_2^{(1)}, X_2^{(2)}, X_2^{(3)}$. Wegen der Voraussetzung der Konvexität 2-ter Stufe von $f(\omega)$ ist nun, falls (siehe Fußnote [8]) auf S. 21) $t = \frac{c}{1+c}$ gesetzt wird, da ja $0 < t < 1$ ist,

$$(1-t)\, f(X_2^{(1)}) + t\, f(X_2^{(3)}) - f(X_2^{(2)}) \geq 0.$$

In Matrizenschreibweise bedeutet dies:

$$c\begin{pmatrix} -a_1 & a_2 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(\nu_2) & 0 \\ 0 & f(0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 \\ a_2 & -a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_1 & b_2 \\ -b_2 & -b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(\nu_1) & 0 \\ 0 & f(0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b_1 & -b_2 \\ b_2 & -b_1 \end{pmatrix} - (1+c)\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{pmatrix} \geq 0.$$

Rechnet man die angedeuteten Multiplikationen aus, so erhält man:

$$c\begin{pmatrix} f(0)\,a_2^2 + f(\nu_2)\,a_1^2 & (f(\nu_2) - f(0))\,a_1 a_2 \\ (f(\nu_2) - f(0))\,a_1 a_2 & f(0)\,a_1^2 + f(\nu_2)\,a_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(\nu_1)\,b_1^2 + f(0)\,b_2^2 & (f(\nu_1) - f(0))\,b_1 b_2 \\ (f(\nu_1) - f(0))\,b_1 b_2 & f(\nu_1)\,b_2^2 + f(0)\,b_1^2 \end{pmatrix} - (1+c)\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{pmatrix} \geq 0.$$

Beachtet man, daß auf Grund von VI. und IX. $b_1^2 = c\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{\nu_2}{\nu_1}\,a_2^2$, auf Grund von VII. und VIII. $b_2^2 = c\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\nu_2}{\nu_1}\,a_1^2$, und wegen III. $b_1 b_2 = -c\frac{\nu_2}{\nu_1}\,a_1 a_2$ ist, so ergibt sich weiter:

$$c\begin{pmatrix} f(0)\,a_2^2 + f(\nu_2)\,a_1^2 & (f(\nu_2) - f(0))\,a_1 a_2 \\ (f(\nu_2) - f(0))\,a_1 a_2 & f(0)\,a_1^2 + f(\nu_2)\,a_2^2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} f(\nu_1)\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{\nu_2}{\nu_1}\,a_2^2 + f(0)\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\nu_2}{\nu_1}\,a_1^2 & \frac{\nu_2}{\nu_1}(f(0) - f(\nu_1))\,a_1 a_2 \\ \frac{\nu_2}{\nu_1}(f(0) - f(\nu_1))\,a_1 a_2 & f(\nu_1)\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\nu_2}{\nu_1}\,a_1^2 + f(0)\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{\nu_2}{\nu_1}\,a_2^2 \end{pmatrix} - (1+c)\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{pmatrix}$$

$$= c\begin{pmatrix} \left[f(0)\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\nu_2}{\nu_1} + f(\nu_2)\right]a_1^2 + \left[f(\nu_1)\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{\nu_2}{\nu_1} + f(0)\right]a_2^2 & \left[(f(0) - f(\nu_1))\frac{\nu_2}{\nu_1} + f(\nu_2) - f(0)\right]a_1 a_2 \\ \left[(f(0) - f(\nu_1))\frac{\nu_2}{\nu_1} + f(\nu_2) - f(0)\right]a_1 a_2 & \left[f(\nu_1)\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\nu_2}{\nu_1} + f(0)\right]a_1^2 + \left[f(0)\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{\nu_2}{\nu_1} + f(\nu_2)\right]a_2^2 \end{pmatrix} - (1+c)\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{pmatrix} \geq 0.$$

Man setze nun für $a_1^2\, a_2^2$, bzw. a_1, a_2 die Werte VI. und VIII. bzw. die Wurzeln aus denselben ein und nehme diese etwa beide mit positiven Vorzeichen. Da der allen Elementen gemeinsame Nenner $\nu_2(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_1+\lambda_2-\nu_1)$ und weiter c positiv sind, so kann man, ohne den Sinn der Ungleichung zu ändern, diese mit ersterem multiplizieren und durch c dividieren und erhält so weiter*):

$$\begin{vmatrix} \left[f(0)\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\nu_2}{\nu_1}+f(\nu_2)\right]\lambda_1[\nu_1\nu_2-\nu_1\lambda_2-\nu_2\lambda_1]+\left[f(\nu_1)\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{\nu_2}{\nu_1}+f(0)\right]\lambda_2[\lambda_1\nu_1+\lambda_2\nu_2-\nu_1\nu_2], \\ \left[(f(0)-f(\nu_1))\frac{\nu_2}{\nu_1}+f(\nu_2)-f(0)\right]\sqrt{\lambda_1\lambda_2(\nu_1\nu_2-\nu_1\lambda_2-\nu_2\lambda_1)(\lambda_1\nu_1+\lambda_2\nu_2-\nu_1\nu_2)} \\ \left[(f(0)-f(\nu_1))\frac{\nu_2}{\nu_1}+f(\nu_2)-f(0)\right]\sqrt{\lambda_1\lambda_2(\nu_1\nu_2-\nu_1\lambda_2-\nu_2\lambda_1)(\lambda_1\nu_1+\lambda_2\nu_2-\nu_1\nu_2)}, \\ \left[f(\nu_1)\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\nu_2}{\nu_1}+f(0)\right]\lambda_1[\nu_1\nu_2-\nu_1\lambda_2-\nu_2\lambda_1]+\left[f(0)\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{\nu_2}{\nu_1}+f(\nu_2)\right]\lambda_2[\lambda_1\nu_1+\lambda_2\nu_2-\nu_1\nu_2] \end{vmatrix}$$

$$-\frac{1+c}{c}\,\nu_2(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_1+\lambda_2-\nu_1)\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2)\end{pmatrix}\geqq 0.$$

Multipliziert man noch mit der *negativen* Größe ν_1 und beachtet, daß $\frac{1+c}{c}(\lambda_1+\lambda_2-\nu_1)=\nu_2-\nu_1$ ist, so erhält man die Ungleichung*)

$$(10)\quad \begin{vmatrix} [f(0)\lambda_2\nu_2+\lambda_1\nu_1 f(\nu_2)][\nu_1\nu_2-\nu_1\lambda_2-\nu_2\lambda_1]+[f(\nu_1)\lambda_1\nu_2+\lambda_2\nu_1 f(0)][\lambda_1\nu_1+\lambda_2\nu_2-\nu_1\nu_2]+(\lambda_1-\lambda_2)(\nu_2-\nu_1)\nu_1\nu_2 f(\lambda_1), \\ \left[(f(0)-f(\nu_1))\nu_2+\nu_1(f(\nu_2)-f(0))\right]\sqrt{\lambda_1\lambda_2(\nu_1\nu_2-\nu_1\lambda_2-\nu_2\lambda_1)(\lambda_1\nu_1+\lambda_2\nu_2-\nu_1\nu_2)} \\ \left[(f(0)-f(\nu_1))\nu_2+\nu_1(f(\nu_2)-f(0))\right]\sqrt{\lambda_1\lambda_2(\nu_1\nu_2-\nu_1\lambda_2-\nu_2\lambda_1)(\lambda_1\nu_1+\lambda_2\nu_2-\nu_1\nu_2)}, \\ [f(\nu_1)\lambda_2\nu_2+\lambda_1\nu_1 f(0)][\nu_1\nu_2-\nu_1\lambda_2-\nu_2\lambda_1]+[f(0)\lambda_1\nu_2+\lambda_2\nu_1 f(\nu_2)][\lambda_1\nu_1+\lambda_2\nu_2-\nu_1\nu_2]+(\lambda_1-\lambda_2)(\nu_2-\nu_1)\nu_1\nu_2 f(\lambda_2) \end{vmatrix}\leqq 0.$$

Daß eine zweireihige Matrix nicht positiv ist, kann bekanntlich dadurch zum Ausdruck gebracht werden, daß die Elemente der Hauptdiagonale nicht positiv, die Determinante nicht negativ ist. Die ersten beiden Aussagen

*) Die Elemente jeder Zeile der folgenden Matrix sind wegen Platzmangels nicht wie üblich nebeneinander, sondern, durch einen Beistrich getrennt, untereinander geschrieben.

sind, wie man sich leicht überlegen kann, schon eine Folgerung aus der gewöhnlichen Konvexität und geben nichts für die Konvexität 2-ter Stufe charakteristisches. Sehen wir also zu, was die letzte Aussage, daß nämlich die Determinante der Matrix (10) nicht negativ ist, bedeutet. Bezeichnen wir diese Determinante mit A, so wollen wir also untersuchen, welche Folgerungen sich für die Funktion $f(\omega)$ aus der Ungleichung

$$A \geqq 0 \tag{11}$$

ergeben.

Den Ausdruck für A formen wir nun um, indem wir von folgendem Gedanken ausgehen. Eine von 2-ter Stufe konvexe Funktion bleibt doch konvex, wenn man zu ihr eine ganze lineare Funktion hinzufügt. (Denn man sieht sofort, daß ganze lineare Funktionen konvex von beliebig hoher Stufe sind.) Jedes auf eine solche Funktion bezügliche vollständige System von Ungleichungen zwischen verschiedenen Werten derselben muß sich also derart schreiben lassen, daß darin nur zweite Differenzenquotienten auftreten. Daß A diese Struktur hat, sieht man unmittelbar aus dem Umstande, daß die Matrix (10) bei Hinzufügung einer ganzen linearen Funktion zu $f(\omega)$ überhaupt ungeändert bleibt. Wir nützen dies in der Weise aus, daß wir zwei Funktionswerte, etwa $f(\nu_1)$ und $f(\nu_2)$ (Addition einer passenden linearen Funktion) gleich Null annehmen. Dann wird aus der Determinanten-Ungleichung (11), wenn wir den so umgeformten Ausdruck A mit A_0 bezeichnen nach Division durch die positive Größe $\nu_1 \nu_2 (\lambda_1 - \lambda_2)(\nu_2 - \nu_1)$

$$A_0 = f^2(0)\,\lambda_1 \lambda_2 (\nu_2 - \nu_1)(\lambda_1 - \lambda_2) + f(0)(\nu_2 - \nu_1)[\lambda_2 f(\lambda_2)\{\nu_1 \nu_2 - \lambda_1(\nu_1 + \nu_2)\} - \lambda_1 f(\lambda_1)\{\nu_1 \nu_2 - \lambda_2(\nu_1 + \nu_2)\}] + (\nu_2 - \nu_1)(\lambda_1 - \lambda_2)\nu_1 \nu_2 f(\lambda_1) f(\lambda_2) \geqq 0.$$

Wir bringen nun A_0 in Zusammenhang mit der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} \varkappa(\nu_1, 0, \lambda_1) & \varkappa(\lambda_2, 0, \lambda_1) \\ \varkappa(\nu_1, 0, \nu_2) & \varkappa(\lambda_2, 0, \nu_2) \end{vmatrix}.$$

Unter $\varkappa(\xi, \eta, \zeta)$ verstehen wir allgemein den mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ multiplizierten zweiten Differenzenquotienten der Funktion $f(\omega)$ für die Argumente ξ, η, ζ.

Es ist

$$\begin{aligned} D(\nu_1 - \lambda_1)(\lambda_2 - \nu_2)(\lambda_2 - \lambda_1)(\nu_1 - \nu_2)\lambda_1 \lambda_2 \nu_1 \nu_2 \\ = (\nu_1 - \nu_2) f(0)\{\lambda_2 f(\lambda_2)[\nu_1 \nu_2 - \lambda_1(\nu_1 + \nu_2) + \lambda_1^2] \\ - \lambda_1 f(\lambda_1)[\nu_1 \nu_2 - \lambda_2(\nu_1 + \nu_2) + \lambda_1^2]\} \\ + (\lambda_1 - \lambda_2)(\nu_1 - \nu_2)\nu_1 \nu_2 f(\lambda_1) f(\lambda_2). \end{aligned}$$

Wenn man den Faktor, mit dem D multipliziert erscheint, mit F bezeichnet, so ergibt der Vergleich der für A_0 und DF gewonnenen Ausdrücke

$$A_0 = -DF + (\nu_2 - \nu_1)\lambda_1 \lambda_2 f(0)\left[f(0)(\lambda_1 - \lambda_2) - (\lambda_1 f(\lambda_2) - \lambda_2 f(\lambda_1))\right] \geqq 0,$$

oder, falls man beachtet, daß wegen $\varkappa(\nu_1, 0, \nu_2) = \dfrac{-\frac{f(0)}{\nu_1} + \frac{f(0)}{\nu_2}}{\nu_1 - \nu_2}$

$$f(0) = \nu_1 \nu_2 \varkappa(\nu_1, 0, \nu_2)$$

und wegen $\varkappa(\lambda_1, 0, \lambda_2) = \dfrac{\frac{f(\lambda_1) - f(0)}{\lambda_1} - \frac{f(\lambda_2) - f(0)}{\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2}$

$$f(0)(\lambda_1 - \lambda_2) - [\lambda_1 f(\lambda_2) - \lambda_2 f(\lambda_1)] = (\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_1 \lambda_2 \varkappa(\lambda_1, 0, \lambda_2)$$

ist

$$A_0 = -DF + (\nu_2 - \nu_1)(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_1^2 \lambda_2^2 \nu_1 \nu_2 \varkappa(\nu_1, 0, \nu_2)\varkappa(\lambda_1, 0, \lambda_2) \geqq 0.$$

Offenbar kann man jetzt bei A_0 den Index 0 wieder fortlassen und erhält nach naheliegender Umgestaltung

$$A = D(\nu_1 - \lambda_1)(\nu_2 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)(\nu_2 - \nu_1)\lambda_1 \lambda_2 \nu_1 \nu_2 + \varkappa(\nu_1, 0, \nu_2)\varkappa(\lambda_1, 0, \lambda_2)\lambda_1^2 \lambda_2^2 \nu_1 \nu_2 (\lambda_1 - \lambda_2)(\nu_2 - \nu_1) \geqq 0.$$

Kürzt man durch den gemeinsamen negativen Faktor $(\lambda_1 - \lambda_2)(\nu_2 - \nu_1)\lambda_1 \lambda_2 \nu_1 \nu_2$, so erhält man endgültig

$$\begin{vmatrix} \varkappa(\nu_1, 0, \lambda_1) & \varkappa(\lambda_2, 0, \lambda_1) \\ \varkappa(\nu_1, 0, \nu_2) & \varkappa(\lambda_2, 0, \nu_2) \end{vmatrix} (\nu_1 - \lambda_1)(\nu_2 - \lambda_2) + \varkappa(\nu_1, 0, \nu_2)\varkappa(\lambda_2, 0, \lambda_1)\lambda_1 \lambda_2 \leqq 0$$

oder

$$\varkappa(\nu_1, 0, \lambda_1)\varkappa(\lambda_2, 0, \nu_2)(\nu_1 - \lambda_1)(\nu_2 - \lambda_2) - \varkappa(\nu_1, 0, \nu_2)\varkappa(\lambda_2, 0, \lambda_1)(\nu_1 \nu_2 - \lambda_1 \nu_2 - \lambda_2 \nu_1) \leqq 0.$$

Wir haben bis jetzt aus rein formalen Gründen einen der fünf Werte, mit denen wir operieren, gleich Null gesetzt (siehe S. 21). Indem wir diese Beschränkung jetzt fallen lassen und mit allgemeinen fünf Werten in der Anordnung

$$\nu_1 < \lambda_1 < \xi < \lambda_2 < \nu_2 \tag{12}$$

operieren, können wir das Resultat in folgender endgültiger Form aussprechen.

Satz: *Eine in einem Intervall von 2-ter Stufe konvexe Funktion ist dort auch in gewöhnlichem Sinne konvex. Sie genügt ferner für je fünf Werte in der Anordnung* (12), *die außerdem die Bedingung*

$$(\lambda_1 - \xi)(\nu_2 - \xi) + (\lambda_2 - \xi)(\nu_1 - \xi) - (\nu_1 - \xi)(\nu_2 - \xi) \geqq 0 \tag{13}$$

erfüllen, der Ungleichung

$$\begin{vmatrix} \varkappa(\nu_1, \xi, \lambda_1) & \varkappa(\lambda_2, \xi, \lambda_1) \\ \varkappa(\nu_1, \xi, \nu_2) & \varkappa(\lambda_2, \xi, \nu_2) \end{vmatrix} (\nu_1 - \lambda_1)(\nu_2 - \lambda_2) + \varkappa(\lambda_2, \xi, \lambda_1)\varkappa(\nu_1, \xi, \nu_2)(\lambda_1 - \xi)(\lambda_2 - \xi) \leqq 0 \tag{14'}$$

oder anders geschrieben

$$\varkappa(\nu_1, \xi, \lambda_1)\varkappa(\lambda_2, \xi, \nu_2)(\nu_1 - \lambda_1)(\nu_2 - \lambda_2) - \varkappa(\lambda_2, \xi, \lambda_1)\varkappa(\nu_1, \xi, \nu_2)[(\nu_1 - \xi)(\nu_2 - \xi) - (\lambda_1 - \xi)(\nu_2 - \xi) - (\lambda_2 - \xi)(\nu_1 - \xi)] \leqq 0. \tag{14''}$$

Aus diesem Satz werden wir die zweimal stetige Differenzierbarkeit einer von 2-ter Stufe konvexen Funktion ableiten.

Zunächst ein vorbereitender Hilfssatz: Da eine von 2-ter Stufe konvexe Funktion im gewöhnlichen Sinne konvex ist, so ist der zweite Differenzenquotient für je drei Werte nicht negativ. *Verschwindet dieser auch nur für ein einziges Wertetripel aus dem Innern des Definitionsbereiches, so ist die Funktion dort linear.*

Beweis des Hilfssatzes: Identifiziert man das Wertetripel mit den Werten ν_1, λ_1, ξ, so ergibt die Ungleichung (14″)

$$(15)\quad \varkappa(\lambda_2, \xi, \lambda_1)\,\varkappa(\nu_1, \xi, \nu_2)\,[(\nu_1 - \xi)(\nu_2 - \xi) - (\lambda_1 - \xi)(\nu_2 - \xi) - (\lambda_2 - \xi)(\nu_1 - \xi)] \geqq 0.$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist wegen Voraussetzung (13) nicht positiv, also

$$(16)\quad (\nu_1 - \xi)(\nu_2 - \xi) - (\lambda_1 - \xi)(\nu_2 - \xi) - (\lambda_2 - \xi)(\nu_1 - \xi) \leqq 0.$$

Nehmen wir ihn jetzt streng negativ an, so ist

$$(17)\quad \varkappa(\lambda_2, \xi, \lambda_1)\,\varkappa(\nu_1, \xi, \nu_2) \leqq 0.$$

Da nun wegen des Bestehens der gewöhnlichen Konvexität alle zweiten Differenzenquotienten nicht negativ sind, so muß mindestens einer der Faktoren von (17) verschwinden. Hieraus folgt das Verschwinden von $\varkappa(\lambda_2, \xi, \lambda_1)$; denn das Verschwinden von $\varkappa(\nu_1, \xi, \nu_2)$ hat im Verein mit der gewöhnlichen Konvexität im ganzen Definitionsintervall die Linearität von $f(\omega)$ in $\langle \nu_1, \nu_2 \rangle$ zur Folge, also auch das Verschwinden von $\varkappa(\lambda_2, \xi, \lambda_1)$. Die Voraussetzung des Verschwindens von $\varkappa(\nu_1, \xi, \lambda_1)$ bedeutet im Verein mit dem Bestehen der Konvexität 1-ter Stufe im ganzen Definitionsintervall die Linearität jedenfalls im Intervall $\langle \nu_1, \xi \rangle$. *Wir sehen nun auf Grund der vorangehenden Überlegungen, daß diese in dem größeren Intervall $\langle \nu_1, \lambda_2 \rangle$ besteht.* Wir wollen jetzt bei Festhaltung der Werte ν_1, ξ und ν_2 den Wert λ_1 von links gegen ξ rücken lassen und können dabei, wie man leicht sieht, ohne mit der durch das Größerzeichen verschärften Ungleichung (13) in Widerspruch zu treten, λ_2 in passender Weise gegen ν_2 gehen lassen. So erhält man die Linearität von $f(\omega)$ bis an den Wert ν_2 heran und da man ν_2 selbst in beliebiger Nähe des rechten Endpunktes des Definitionsintervalles annehmen kann, *die Linearität im ganzen Innern rechts von ν_1*. In ganz analoger Weise bekommt man die Linearität links von ν_1, indem man das Wertetripel, für das zweite Differenzenquotient verschwindet, mit dem Wertesystem ξ, λ_2, ν_2 identifiziert. Damit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen. *Wir können uns deshalb von nun an auf streng konvexe Funktionen beschränken.*

Wir gehen nun daran, zunächst die einmal stetige Differenzierbarkeit im Innern des Definitionsintervalles von $f(\omega)$ zu beweisen. Es genügt

bekanntlich hierzu, die Beschränktheit des zweiten Differenzenquotienten in jedem abgeschlossenen Teilintervall im Innern des Definitionsintervalles festzustellen. Daß der *erste* Differenzenquotient dort beschränkt ist, ist bereits eine Folge der *gewöhnlichen* Konvexität. Die Endpunkte des gewählten abgeschlossenen Teilintervalles mögen ν_1' und ν_2' heißen und es sei $\langle \nu_1, \nu_2 \rangle$ ein das Intervall $\langle \nu_1', \nu_2' \rangle$ umfassendes, aber ebenfalls noch im Innern des Definitionsbereiches liegendes Intervall. Unter $\lambda_1 < \xi < \lambda_2$ verstehe man irgend drei Werte aus $\langle \nu_1', \nu_2' \rangle$, die so nahe beieinander liegen, daß der Ausdruck (16)

$$(\nu_1 - \xi)(\nu_2 - \xi) - (\lambda_1 - \xi)(\nu_2 - \xi) - (\lambda_2 - \xi)(\nu_1 - \xi)$$

unter einer negativen Konstanten C bleibt, die zwischen 0 und dem Maximum von $(\nu_1 - \xi)\cdot(\nu_2 - \xi)$ liegt. Das ist offenbar möglich, da er, falls darin $\lambda_1 = \lambda_2 = \xi$ gesetzt wird, zu $(\nu_1 - \xi)(\nu_2 - \xi) < 0$ wird. Man kann dann schreiben:

$$(18) \qquad 0 < \varkappa(\lambda_2, \xi, \lambda_1) \leqq$$

$$\leqq \frac{(\nu_1 - \lambda_1)(\nu_2 - \lambda_2)}{(\nu_1 - \xi)(\nu_2 - \xi) - (\lambda_1 - \xi)(\nu_2 - \xi) - (\lambda_2 - \xi)(\nu_1 - \xi)} \cdot \frac{\varkappa(\nu_1, \xi, \lambda_1)\varkappa(\lambda_2, \xi, \nu_2)}{\varkappa(\nu_1, \xi, \nu_2)} =$$

$$= \frac{1}{(\nu_1 - \xi)(\nu_2 - \xi) - (\lambda_1 - \xi)(\nu_2 - \xi) - (\lambda_2 - \xi)(\nu_1 - \xi)} \cdot \frac{[\varkappa(\nu_1, \xi) - \varkappa(\lambda_1, \xi)][\varkappa(\nu_2, \xi) - \varkappa(\lambda_2, \xi)]}{\varkappa(\nu_1, \xi, \nu_2)}$$

falls man allgemein unter $\varkappa(\eta, \zeta)$ den ersten Differenzenquotienten der Funktion $f(\omega)$ für die Argumentwerte η, ζ versteht. Aus der Annahme über die gegenseitige Lage der Werte folgt, daß in dem Differenzenquotienten 2-ter Ordnung $\varkappa(\nu_1, \xi, \nu_2)$, der im Nenner auftritt, keine zwei Argumentwerte in einen zusammenrücken können. Aus der bereits festgestellten Beschränktheit des *ersten* Differenzenquotienten und der *strengen* Konvexität der Funktion folgt nun leicht, daß die rechte Seite von (18) unter einer festen Schranke bleibt und hieraus die einmal stetige Differenzierbarkeit der Funktion im ganzen Innern ihres Definitionsintervalles.

Nachdem wir die Existenz der ersten Ableitung bewiesen haben, können wir auch von Differenzenquotienten sprechen, bei denen zwei der Argumentwerte zusammenfallen, der dritte aber von ihnen verschieden ist und wollen demgemäß allgemein unter $\varkappa(\xi, \xi, \eta)$ den existierenden Grenzwert von $\varkappa(\xi, \zeta, \eta)$ verstehen, falls ζ in ξ hineinrückt.

Läßt man die Ungleichung (18) $\lambda_1 \to \xi$ rücken, so erhält man dann

$$(19) \qquad \varkappa(\lambda_2, \xi, \xi) \leqq \frac{\varkappa(\nu_1, \xi, \xi)\varkappa(\lambda_2, \xi, \nu_2)}{\varkappa(\nu_1, \xi, \nu_2)},$$

wobei bemerkt sei, daß die vier darin auftretenden Argumentwerte aus dem Innern des Definitionsbereiches von $f(\omega)$ allein der Lagebeschränkung

$$\nu_1 < \xi < \lambda_2 < \nu_2$$

unterworfen sind. Man erkennt dies daraus, daß die linke Seite von (16), falls darin $\lambda_1 = \xi$ gesetzt wird, *negativ* ausfällt.

Aus der Ungleichung (19) werden wir die zweimal stetige Differenzierbarkeit der Funktion $f(\omega)$ erschließen.

Aus ihr folgt sofort

$$\varkappa(\lambda_2, \xi, \xi) - \varkappa(\nu_1, \xi, \xi) \leqq \varkappa(\nu_1, \xi, \xi) \frac{\varkappa(\lambda_2, \xi, \nu_2) - \varkappa(\nu_1, \xi, \nu_2)}{\varkappa(\nu_1, \xi, \nu_2)}$$

und nach Division durch den *positiven* Faktor $(\lambda_2 - \nu_1)$

$$\varkappa(\lambda_2, \xi, \xi, \nu_1) \leqq \varkappa(\nu_1, \xi, \xi) \frac{\varkappa(\lambda_2, \xi, \nu_1, \nu_2)}{\varkappa(\nu_1, \xi, \nu_2)} \text{ [9]}. \tag{20}$$

Läßt man umgekehrt jetzt in der Ungleichung (18) $\lambda_2 \to \xi$ rücken, so entsteht in analoger Weise die Relation

$$\varkappa(\lambda_1, \xi, \xi) - \varkappa(\xi, \xi, \nu_2) \leqq \varkappa(\xi, \xi, \nu_2) \frac{\varkappa(\nu_1, \xi, \lambda_1) - \varkappa(\nu_1, \xi, \nu_2)}{\varkappa(\nu_1, \xi, \nu_2)}.$$

Dividiert man hier durch die *negative* Größe $(\lambda_1 - \nu_2)$, so ergibt sich

$$\varkappa(\lambda_1, \xi, \xi, \nu_2) \geqq \varkappa(\nu_2, \xi, \xi) \frac{\varkappa(\nu_1, \xi, \lambda_1, \nu_2)}{\varkappa(\nu_1, \xi, \nu_2)}. \tag{21}$$

Denkt man sich in der Ungleichung (20) ν_2 festgehalten und läßt die Werte λ_2, ξ und ν_1 in einem Intervall $\langle \nu_1', \nu_2' \rangle$, dessen rechte Grenze links von ν_2 liegt, laufen, so erkennt man aus der Gestalt der rechten Seite der Ungleichung (20), daß $\varkappa(\lambda_2, \xi, \xi, \nu_1)$ dort nach oben beschränkt ist. Man beachte nämlich, daß der Nenner $\varkappa(\nu_1, \xi, \nu_2)$ oberhalb einer positiven Schranke bleibt. Dies folgt daraus, daß beim Zusammenfallen von ν_1 und ξ der entstehende Wert $\varkappa(\xi, \xi, \nu_2)$ wegen der *strengen* Konvexität auch noch positiv ist und $\varkappa(\nu_1, \xi, \nu_2)$ beim freien Variieren der Werte ν_1, ξ im Intervall $\langle \nu_1', \nu_2' \rangle$ wegen der Stetigkeit der ersten Ableitung eine stetige, durchaus positive Funktion darstellt. Die Beschränktheit des Zählers folgt daraus, daß er in der Form

$$\frac{\varkappa(\lambda_2, \xi, \nu_1) - \varkappa(\lambda_2, \xi, \nu_2)}{\nu_1 - \nu_2}$$

geschrieben werden kann. In diesem Ausdruck ist der Zähler als Differenz zweier 2-ter Differenzenquotienten nach vorhergehendem beschränkt, der Nenner $\nu_1 - \nu_2$ kann nicht beliebig nahe an Null herankommen. Endlich

[9]) Allgemein verstehen wir unter $\varkappa(\xi, \eta, \zeta, \omega)$ den mit dem Faktor $\frac{1}{3!}$ multiplizierten dritten Differenzenquotienten der Funktion $f(\omega)$ für die Argumentwerte ξ, η, ζ, ω.

ist $\varkappa(\xi, \xi, \nu_1)$ als Grenzwert eines zweiten Differenzenquotienten unterhalb derselben Schranke gelegen wie dieser.

Wählt man umgekehrt in Ungleichung (21) für ν_1 einen Wert links von ν_1' und läßt die Werte λ_2, ξ und ν_2 in einem Intervall $\langle \nu_1', \nu_2' \rangle$, dessen linke Grenze rechts von ν_1 liegt, so sieht man auf Grund analoger Überlegungen wie vorher, daß $\varkappa(\lambda_1, \xi, \xi, \nu_2)$ in $\langle \nu_1', \nu_2' \rangle$ nach unten beschränkt ist.

Zusammenfassend kann man also sagen, daß $\varkappa(\lambda, \xi, \xi, \nu)$ bei Beschränkung der drei paarweise verschiedenen Werte λ, ξ und ν, wobei ξ ein Wert zwischen λ und ν ist, auf das Intervall $\langle \nu_1', \nu_2' \rangle$ absolut beschränkt ist.

Nun sind wir nahe am Ziel! Nennen wir eine solche Schranke K, so kann die eben gefundene Ungleichung auch in der Form geschrieben werden

$$\left| \frac{d\,\varkappa(\lambda, \xi, \nu)}{d\,\xi} \right| \leqq K. \tag{22}$$

Man nehme nun zwei Werte ξ_1 und ξ_2, die beide zwischen λ und ν liegen; dann ist

$$\frac{1}{\xi_1 - \xi_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\,\varkappa(\lambda, \xi, \nu)}{d\,\xi}\, d\,\xi = \varkappa(\lambda, \xi_1, \xi_2, \nu).$$

Beachtet man aber die Ungleichung (22), so ergibt sich

$$|\varkappa(\lambda, \xi_1, \xi_2, \nu)| \leqq K.$$

Damit ist aber die Beschränktheit des dritten Differenzenquotienten bewiesen, falls man die darin auftretenden Argumentwerte in einem Intervall laufen läßt, dessen Endpunkte dem Inneren des Definitionsintervalles unserer Funktion $f(\omega)$ angehören.

Daraus ergibt sich bekanntlich die zweimal stetige Differenzierbarkeit unserer Funktion im ganzen Inneren ihres Definitionsintervalles.

§ 2.

Einführung des Begriffes der zweimaligen Differenzierbarkeit „im weiteren Sinne“ und Beweis einiger Hilfssätze.

Durch den Beweis des Satzes, daß eine konvexe Funktion 2-ter und damit höherer Stufe mindestens zweimal stetig differenzierbar ist, wird uns die Aufstellung von *notwendigen* und *hinreichenden* Bedingungen für die Konvexität n-ter Stufe wesentlich erleichtert. Es beruht dies auf der Gültigkeit des folgenden

Hilfssatzes 1: *Ist $f(\omega)$ in einem Interval zweimal stetig differenzierbar, so auch die zugehörige Matrixfunktion $f(X_n)$. Das* soll naturgemäß

bedeuten, daß die Elemente der Matrix $f(X_n)$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen der Elemente von X_n sind.

Wir wollen uns jedoch nicht auf den direkten Beweis dieses Hilfssatzes beschränken, sondern bei dieser Gelegenheit einige Fragen aus der „Differentialrechnung" der Matrixfunktionen beantworten, auf die man hier stößt.

Bekanntlich spricht man in der Differentialrechnung der Funktionen von mehreren Veränderlichen, von partieller und eigentlicher Differenzierbarkeit. Eine Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(x)$[10]) heißt an einer Stelle x^0[11]) eigentlich differenzierbar, wenn ein System von Größen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ existiert von folgender Art:

Zu jedem positiven ε kann ein positives $\delta_\varepsilon(x^0)$ so angegeben werden, daß für jeden Punkt x, der auch dem Definitionsbereich der Funktion angehört und der Ungleichung $r = |x - x^0| < \delta_\varepsilon(x^0)$ genügt, stets auch

$$|f(x) - f(x^0) - \sum_{\mathfrak{j}=1}^{m} \alpha_\mathfrak{j}(x_\mathfrak{j} - x_\mathfrak{j}^0)| < \varepsilon r$$

ausfällt. (Aus der eigentlichen Differenzierbarkeit folgt bekanntlich die partielle und es ist $\alpha_\mathfrak{j}$ die erste partielle Ableitung der Funktion nach $x_\mathfrak{j}$ an der Stelle $x = x^0$.) Entsprechend ist eine Funktion an der Stelle $x = x^0$[12]) eigentlich differenzierbar von 2-ter Stufe oder dort zweimal differenzierbar im weiteren Sinne, wenn man neben den Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ noch weitere Konstante $\alpha_{\mathfrak{j},k}$, $(\mathfrak{j}, k = 1, 2, \ldots, m)$ $(\alpha_{\mathfrak{j},k} = \alpha_{k,\mathfrak{j}})$ angeben kann von folgender Art: Zu jedem positiven ε kann ein positives $\delta_\varepsilon(x^0)$ so angegeben werden, daß für jeden Punkt x, der auch dem Definitionsbereich der Funktion angehört und der Ungleichung $r = |x - x^0| < \delta_\varepsilon(x^0)$ genügt, stets auch

$$(1) \quad |f(x) - f(x^0) - \sum_{\mathfrak{j}=1}^{m} \alpha_\mathfrak{j}(x_\mathfrak{j} - x_\mathfrak{j}^0) - \tfrac{1}{2} \sum_{\mathfrak{j},k=1}^{m} \alpha_{\mathfrak{j},k}(x_\mathfrak{j} - x_\mathfrak{j}^0)(x_k - x_k^0)| < \varepsilon r^2$$

ausfällt.

$\alpha_{\mathfrak{j},k}$ ist, wenn die Funktion zweimal stetig differenzierbar ist, die zweite Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_\mathfrak{j} \partial x_k}$ an der Stelle $x = x^0$. Analog kann man

---

[10]) Wir wollen der Kürze halber unter x den Punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, unter x^0 den Punkt $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$, unter $f(x)$ bzw. $f(x_0)$ den Wert der Funktion an der Stelle x bzw. x^0 und unter $|x - x^0|$ den Abstand $r = \sqrt{\sum_{\mathfrak{j}=1}^{m} (x_\mathfrak{j} - x_\mathfrak{j}^0)^2}$ der Punkte x und x^0 verstehen.

[11]) Ihres Definitionsbereiches.

[12]) Ihres Definitionsbereiches.

eine Differenzierbarkeit im weiteren Sinne von höherer als zweiter Stufe einführen. Für uns genügt es, wenn wir lediglich bis zur zweiten Stufe gehen.

Der Begriff der erweiterten Differenzierbarkeit läßt sich ohne weiteres von skalaren auf Matrixfunktionen übertragen. Eine Matrixfunktion $f(X_n)$ heiße im weiteren Sinne differenzierbar von k-ter Stufe, wenn ihre Elemente im weiteren Sinne von k-ter Stufe differenzierbare Funktionen der Elemente der Matrix X_n sind.

Es kommt uns nun vor allem auf den Beweis des folgenden Hilfssatzes 2 an.

Hilfssatz 2: *Ist die skalare Funktion $f(\omega)$ in ihrem Definitionsbereich überall von 2-ter Stufe im weiteren Sinne differenzierbar, so kann dasselbe von der Matrixfunktion $f(X_n)$ behauptet werden.*

Beweis: Zunächst eine terminologische Bemerkung: Wenn im folgenden von einer höheren Ableitung einer im weiteren Sinne differenzierbaren Funktion die Rede ist, so ist damit diejenige Konstante in der Definitionsrelation der im weiteren Sinne differenzierbaren Funktion zu verstehen, die im Falle der gewöhnlichen Differenzierbarkeit die betreffende Ableitung bedeutet.

$f(\omega)$ sei eine im weiteren Sinne zweimal differenzierbare Funktion und $A_n = (a_{i,k})$ eine Matrix, deren Eigenwerte $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots \leqq \lambda_n$ dem Definitionsbereich von $f(\omega)$ angehören. Ich bilde nun ein Interpolationspolynom $\pi(\omega)$, das an den Stellen $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ bis zur zweiten Ordnung mit $f(\omega)$ übereinstimmt. Es ist also

$$\pi(\lambda_i) = f(\lambda_i), \quad \pi'(\lambda_i) = f'(\lambda_i), \quad \pi''(\lambda_i) = f''(\lambda_i).$$

Die Differenz $f(\omega) - \pi(\omega)$ sei $\varrho(\omega)$. Ferner sei $X_n = (x_{i,k})$ eine variable Matrix aus dem Definitionsbereich der Funktion $f(X_n)$; ihre Eigenwerte seien $\xi_1 \leqq \xi_2 \leqq \ldots \leqq \xi_n$. Es muß gezeigt werden, daß $\varrho(X_n)$ an der „Stelle" A_n zweimal im weiteren Sinne differenzierbar ist, denn $\pi(X_n)$ hat als Polynom in X_n gewiß diese Eigenschaft.

Nach Definition von $\varrho(\omega)$ ist, falls in der Nähe von $\omega = \lambda_i$

$$\varrho(\omega) = \eta_i(\omega)(\omega - \lambda_i)^2$$

geschrieben wird

$$\lim_{\omega \to \lambda_i} \eta_i(\omega) = 0.$$

Man grenze um λ_i eine Umgebung $\mathfrak{U}_i$

$$\mathfrak{U}_i : |\omega - \lambda_i| < \delta_\varepsilon$$

ab, in der $|\eta_i| < \varepsilon$ ist.

Es möge nun die Matrix X_n so nahe an A_n liegen, daß der i-te Eigenwert ξ_i der Umgebung $\mathfrak{U}_i$ angehört (für $i = 1, 2, \ldots, n$). Dann ist, falls $\varrho(X_n) = (\varrho_{ik})$ gesetzt wird,

$$\sum_{i=1}^{n} \varrho^2(\xi_i) < \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \lambda_i)^4.$$

Nun ist aber bekanntlich die Summe der Quadrate der Elemente einer symmetrischen Matrix orthogonal invariant; also ist auch

$$\sum_{k,\,l=1}^{n} \varrho_{kl}^2 = \sum_{i=1}^{n} \varrho^2(\xi_i) < \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \lambda_i)^4$$

also auch

$$|\varrho_{kl}| < \varepsilon \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \lambda_i)^4} \leqq \varepsilon \sqrt{[\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \lambda_i)^2]^2} = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \lambda_i)^2.$$

Nun machen wir von einer Extremum-Eigenschaft Gebrauch, die auch bereits in der auf S. 18 zitierten Arbeit verwendet wurde, nämlich

$$\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \lambda_i)^2 \leqq \sum_{k,\,l=1}^{n} (x_{kl} - a_{kl})^2.$$

Daraus folgt weiter

$$|\varrho_{kl}| < \varepsilon \sum_{k,\,l=1}^{n} (x_{kl} - a_{kl})^2$$

gültig für alle oben gekennzeichneten Matrizen. Damit ist der Hilfssatz 2 bewiesen.

Aus dem Hilfssatz 2 läßt sich nun leicht Hilfssatz 1 ableiten, indem man noch den folgenden dritten Hilfssatz hinzunimmt.

Hilfssatz 3: Ist eine skalare Funktion (die wir uns der Einfachheit halber in einem offenen Prisma

$$a_i < x_i < b_i$$

definiert denken) *dort überall eigentlich differenzierbar und kann das in der Definition der Differenzierbarkeit auftretende δ_ε bei jedem positiven ε für alle Punkte gleich gewählt werden (gleichmäßige Differenzierbarkeit im weiteren Sinne!), dann ist die Funktion im ganzen Prisma zweimal stetig differenzierbar.*

Wir wollen zum Beweise von einigen Bemerkungen über quadratische Funktionen $a + bx + \frac{1}{2}cx^2$ ausgehen. Es sei von einer solchen Funktion bekannt, daß

$$|a + bx + \tfrac{1}{2}cx^2| \leqq K \quad \text{für} \quad |x| \leqq R$$

ist und wir suchen hieraus Schranken für die Koeffizienten a, b und c zu gewinnen.

Setzt man $x = 0$, so ergibt sich zunächst

$$|a| \leqq K$$

und hieraus weiter

$$(2') \qquad \left| b\,x + \frac{c}{2}\,x^2 \right| \leqq 2K \quad \text{für} \quad |x| \leqq R.$$

Ersetzt man hierin x durch $-x$, so erhält man

$$(2'') \qquad \left| -b\,x + \frac{c}{2}\,x^2 \right| \leqq 2K.$$

Aus (2') und (2'') erhält man weiter

$$|b\,x| \leqq 2K \quad \text{und} \quad \left| \frac{c}{2}\,x^2 \right| \leqq 2K.$$

Setzt man nun in diesen beiden Ungleichungen $x = R$, so entsteht das Ungleichungspaar

$$|b| \leqq \frac{2K}{R}, \quad |c| \leqq \frac{4K}{R^2}.$$

Die erhaltenen Abschätzungen (die natürlich noch verfeinert werden könnten), wollen wir nun verallgemeinern, indem wir zu quadratischen Funktionen in m Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ übergehen und die Ungleichung $|x| \leqq R$ im Falle einer Veränderlichen durch

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{m} x_j^2} = |x| \leqq R$$

(Kugel vom Radius R um den Nullpunkt des Koordinatensystems) ersetzen.

Wir gehen also von einer Ungleichung von der Form

$$\left| b_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j x_j + \tfrac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{m} b_{jk} x_j x_k \right| \leqq K \quad \text{für} \quad |x| \leqq R.$$

aus.

Man setze nur $x_j = \sigma_j t$, wobei σ_j Konstante sein sollen, deren Quadratsumme gleich 1 ist und führe dies in die obige quadratische Funktion von m Veränderlichen ein. Dann entsteht eine quadratische Funktion von t, $a + bt + \frac{1}{2} ct^2$, mit den Koeffizienten

$$a = b_0, \; b = \sum_{j=1}^{m} b_j \sigma_j, \quad c = \sum_{j,k=1}^{m} b_{j,k} \sigma_j \sigma_k.$$

Da für $|t| \leqq R$ auch $|x| \leqq R$ ist, so gelten die obigen Abschätzungen und es ist also

$$|b_0| \leqq K, \; \left| \sum_{j=1}^{m} b_j \sigma_j \right| \leqq \frac{2K}{R}, \; \left| \sum_{j,k=1}^{m} b_{jk} \sigma_j \sigma_k \right| \leqq \frac{4K}{R^2},$$

gültig für alle Werte σ_j, die der Relation

$$\sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2 = 1$$

genügen.

Hieraus folgt dann, wie man fast unmittelbar sieht,

$$|b_j| \leqq \frac{2K}{R}, \; |b_{jk}| \leqq \frac{4K}{R^2}.$$

Nun kehren wir zur Funktion $f(x)$ zurück, von der wir annehmen, daß sie gleichmäßig differenzierbar von 2-ter Ordnung im erweiterten Sinne ist.

Es seien nun x^1 und x^2 [13]) zwei Punkte aus ihrem Definitionsbereich, deren Distanz $|x^1 - x^2| < \delta_\varepsilon$ ist. Ist nun x ein dritter Punkt aus dem Definitionsbereich von der Art, daß $|x - x^1| < \delta_\varepsilon$, $|x - x^2| < \delta_\varepsilon$ ist, so ist, falls die Ableitungen, die zu dem Punkte x^1 und x^2 gehören, durch obere Indizes 1 und 2 unterschieden werden,

$$|f(x) - f(x^1) - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^1 (x_j - x_j^1) - \tfrac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{m} \alpha_{jk}^1 (x_j - x_j^1)(x_k - x_k^1)| < \varepsilon r_1^2$$

und

$$|f(x) - f(x^2) - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^2 (x_j - x_j^2) - \tfrac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{m} \alpha_{jk}^2 (x_j - x_j^2)(x_k - x_k^2)| < \varepsilon r_2^2.$$

Hierin ist r_1 Abkürzung für $|x - x^1|$ und r^2 für $|x - x^2|$. Aus den beiden letzten Ungleichungen ergibt sich offenbar für die quadratische Funktion, die durch Subtraktion der zwischen den Betragzeichen stehenden Ausdrücke entsteht, die Ungleichung

$$|f(x^2) - f(x^1) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^2 (x_j - x_j^2) - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^1 (x_j - x_j^1)$$
$$+ \tfrac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{m} \alpha_{jk}^2 (x_j - x_j^2)(x_k - x_k^2) - \tfrac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{m} \alpha_{jk}^1 (x_j - x_j^1)(x_k - x_k^1)| < \varepsilon (r_1^2 + r_2^2)$$

und sie gilt für alle Punkte des Definitionsbereiches, die von x^1 und x^2 einen Abstand haben, der kleiner ist als δ_ε, also jedenfalls für alle Punkte des Definitionsbereiches, die der Kugel mit dem Durchmesser, dessen Endpunkte x^1 und x^2 sind, angehören. Für diese ist offenbar

$$r_1^2 + r_2^2 \leqq |x^2 - x^1|^2.$$

Nehmen wir zunächst an, daß die eben betrachtete Kugel dem Definitionsbereich der Funktion angehört, so haben wir eine Abschätzung der früher betrachteten Form mit dem einzigen unwesentlichen Unterschied, daß der Mittelpunkt nicht der Nullpunkt, sondern der Mittelpunkt der Strecke $\overline{x^1, x^2}$ ist, also der Punkt $\frac{x^1 + x^2}{2}$. Die dort auftretenden Konstanten haben die Werte

$$R = \frac{|x^2 - x^1|}{2}, \quad K = \varepsilon |x^2 - x^1|^2.$$

---

[13]) Unter x^n verstehen wir den Punkt $(x_1^n, x_2^n, \ldots, x_m^n)$, unter $f(x^n)$ den Funktionswert an der Stelle x^n und unter $|x - x^n|$ die Distanz $\sqrt{\sum_{j=1}^{m} (x_j - x_j^n)^2}$.

Die obigen Abschätzungen ergeben in unserem Falle, nachdem man die nötige Koordinatenverschiebung durchgeführt hat,

$$(3) \qquad |\alpha_j^2 - \alpha_j^1 - \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} (\alpha_{jk}^1 + \alpha_{jk}^2)(x_k^2 - x_k^1)| \leqq 4\varepsilon |x^2 - x^1|$$

und

$$(4) \qquad |\alpha_{jk}^2 - \alpha_{jk}^1| \leqq 16\varepsilon.$$

Aus der ersten dieser Abschätzungen ergibt sich sofort durch Benutzung der zweiten die weitere Abschätzung

$$(5) \qquad |\alpha_j^2 - \alpha_j^1 - \sum_{k=1}^{m} \alpha_{jk}^1 (x_k^2 - x_k^1)| \leqq (16\sqrt{m} + 4)\varepsilon |x^2 - x^1|.$$

Diese Ungleichung ist unter der Voraussetzung abgeleitet worden, daß die Kugel mit dem Durchmesser $\overline{x^1, x^2}$ ganz dem Definitionsbereich der Funktion angehört.

Wenn man sich auf einen abgeschlossenen Teilbereich des Inneren des Prismas beschränkt und nur mit Punktepaaren x^1, x^2 aus diesem operiert, deren Distanz kleiner ist als die Distanz desselben vom Rande des Prismas, gelten die Ungleichungen und (3), (4), (5) jedenfalls. (5) *zeigt, daß die* α_j *eigentlich differenzierbare Funktionen sind, daß die* α_{jk}[14]) *die Ableitungen von* α_j *nach* x_k *bedeuten und* (4) *zeigt, daß die Ableitungen stetige Funktionen sind.* Damit ist unser dritter Hilfssatz bewiesen.

Der Beweis des ersten Hilfssatzes liegt nun auf der Hand.

Nehmen wir $f(\omega)$ als zweimal stetig differenzierbar im Inneren ihres Definitionsintervalles an, dann ist sie dort, wie man aus der Taylorschen Entwicklung sieht, im erweiterten Sinne zweimal differenzierbar und das offenbar gleichmäßig, wenn man sich auf ein abgeschlossenes Teilintervall des Inneren des Definitionsintervalles beschränkt. Aus dem Beweis des Hilfssatzes 2 ersieht man, daß sich diese Gleichmäßigkeit auch auf die Matrixfunktion überträgt, wenn man sich auf Matrizen X_n beschränkt, deren Eigenwerte dem eben erwähnten abgeschlossenen Teilintervall angehören. Jetzt wende man Hilfssatz 3 an.

§ 3.

Ableitung von notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Konvexität n-ter Stufe.

In diesem Paragraphen sollen notwendige und hinreichende Bedingungen für die Konvexität n-ter Stufe einer in einem offenen Intervall definierten Funktion abgeleitet werden, die die Gestalt von Differentialungleichungen haben.

---

[14]) $k = 1, 2, \ldots, m$.

Daß eine Funktion $f(\omega)$ konvex von n-ter Stufe ist, bedeutet, daß die zugehörige Matrixfunktion $f(X_n)$ auf einer „Geraden“

$$X_n = L_n + t H_n \quad (1)$$

[15]

mit einem $H_n \geqq 0$ die Eigenschaft besitzt, daß die zu $f(L_n + t H_n) = \Phi(t)$ gehörige quadratische Form in n Veränderlichen für jede Wahl derselben eine im gewöhnlichen Sinne konvexe, skalare Funktion von t ist. Nun ist aber bewiesen, daß $f(X_n)$ zweimal stetig differenzierbar von X_n abhängt. Es ist also auch die eben eingeführte skalare Funktion von t zweimal stetig differenzierbar in t. In diesem Falle wird aber bekanntlich die Konvexität durch die Nichtnegativität der zweiten Ableitung vollständig zum Ausdruck gebracht.

Es ist also

$$\Phi''(t) \geqq 0$$

und insbesondere, falls L_n zum Definitionsbereich von $f(X_n)$ gehört,

$$\Phi''(0) \geqq 0, \quad (2)$$

$\Phi''(0)$ ist von der Wahl L_n und H_n abhängig.

Die Konvexität von $f(X_n)$ wird vollständig durch die Ungleichung (2) zum Ausdruck gebracht, wenn man L_n alle möglichen Matrizen, deren Eigenwerte in das Definitionsintervall von $f(\omega)$ hineinfallen, und H_n alle nichtnegativen Matrizen durchlaufen läßt.

Wir wollen nun $\Phi''(0)$ wirklich berechnen. Dazu brauchen wir zunächst den allgemeinen Wert des ersten Differentials von $f(X_n)$ an einer willkürlichen Stelle $X_n = X_n^0$. Ist X_n^0 eine Diagonalmatrix L_n mit den Eigenwerten $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots \leqq \lambda_n$, so ist das erste Differential von $f(X_n)$ an der Stelle $X_n = X_n^0$ durch die Formel gegeben

$$d f(X_n) = (\varkappa(\lambda_i, \lambda_k)\, d x_{ik}) \text{ [16]}.$$

Wir lassen jetzt die Voraussetzung, daß X_n^0 auf die Hauptachsen gebracht ist, fallen. Es sei

$$X_n^0 = T_n^{0\prime} L_n T_n^0$$

(T_n^0 orthogonal, L_n die Diagonalmatrix, welche die Eigenwerte von X_n^0 enthält).

Wir führen nun an Stelle von X_n eine neue Veränderliche vermöge der Gleichung

$$T_n^0 X_n T^{0\prime} = Y_n = (y_{ik}) \text{ oder } X_n = T_n^{0\prime} Y_n T_n^0 \quad (3)$$

ein.

---

[15]) L_n denke man sich jetzt als Diagonalmatrix mit den Eigenwerten $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$.

[16]) Siehe die S. 18 zitierte Arbeit.

Es ist dann

$$f(X_n) = f(T_n^{0'} Y_n T_n^0) = T_n^{0'} f(Y_n) T_n^0.$$

An der Stelle $Y_n = L_n$, die $X_n = X_n^0$ entspricht, ist

$$d f(Y_n) = (\varkappa(\lambda_i, \lambda_k) d y_{ik}).$$

An der Stelle $X_n = X_n^0$ ist also

$$d f(X_n) = T_n^{0'} (\varkappa(\lambda_i, \lambda_k) d y_{ik}) T_n^0. \tag{4}$$

Aus Gleichung (3) folgt ferner

$$(d y_{ik}) = T_n^0 (d x_{ik}) T_n^{0'}. \tag{5}$$

Setzt man (5) in (4) ein, so erhält man die gesuchte Größe.

Nun bilden wir das zweite Differential von $f(X_n)$ aber nur an einer Stelle $X_n = X_n^0$, die auf Hauptachsen gebracht ist und deren Eigenwerte paarweise voneinander verschieden sind. Jede $X_n = X_n^0$ [17]) genügend benachbarte Matrix besitzt ebenfalls lauter paarweise verschiedene Eigenwerte und läßt sich in eindeutiger Weise in der Form schreiben

$$X_n = T_n' M_n T_n,$$

wobei T_n orthogonal ist und M_n die Diagonalmatrix der Eigenwerte $\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n$ von X_n, also

$$M_n = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & \mu_n \end{pmatrix}$$

bedeutet. (Für $X_n \to X_n^0$ geht $T_n \to E$ [18]) und $M_n \to L_n$ über.)

Nach (4) ist

$$d f(X_n) = T_n' (\varkappa(\mu_i, \mu_k) d y_{ik}) T_n,$$

falls $(d y_{ik})$ durch die Gleichung

$$(d y_{ik}) = T_n (d x_{ik}) T_n'$$

erklärt ist.

Wir bilden nun das zweite Differential. Es ist offenbar an der Stelle $X_n = X_n^0$, wo $(d y_{ik}) = (d x_{ik})$ wird,

$$d^2 f(X_n) = d T_n' (\varkappa(\lambda_i, \lambda_k) d x_{ik}) + (\varkappa(\lambda_i, \lambda_k) d x_{ik}) d T_n + (d \varkappa(\mu_i, \mu_k) d x_{ik}) + (\varkappa(\lambda_i, \lambda_k) d^2 y_{ik}), \tag{7}$$

und

$$d^2 Y_n = d T_n d X_n + d X_n d T_n' + d^2 X_n.$$

Es handelt sich jetzt noch darum, wie sich $d T_n$ und $d M_n$ durch $d X_n$ ausdrücken und zwar an der Stelle $X_n = X_n^0 = L_n$. Offenbar ist zunächst allgemein

$$d X_n = d T_n' M_n T_n + T_n' M_n d T_n + T_n' d M_n T_n,$$

---

[17]) X_n^0 sei wieder die Stelle L_n.

[18]) E sei die Einheitsmatrix.

insbesondere also für $X_n = X_n^0 = L_n$

$$d X_n = d T_n' L_n + L_n d T_n + d M_n.$$

Wegen der Orthogonalität von T_n ist ferner

$$T_n' T_n = E,$$

also für $T_n = E$

$$d[T_n' T_n] = d T_n' + d T_n = 0. \tag{8}$$

$d X_n$ kann somit in der Form geschrieben werden

$$d X_n = \left((\lambda_i - \lambda_k) d \tau_{ik}\right) + \left(d \mu_i \varepsilon_{ik}\right),$$

wobei $T_n = (\tau_{ik})$ und $E = (\varepsilon_{ik})$ gesetzt ist. Dafür kann man auch schreiben

$$d x_{ik} = (\lambda_i - \lambda_k) d \tau_{ik} \qquad (i \neq k)$$

und

$$d x_{ii} = d \mu_i.$$

Unter Berücksichtigung dessen und $d \tau_{ii} = 0$ (folgt aus (8)) erhält man bei Annahme $d^2 X_n = 0$ als Wert für das Element in der i-ten Zeile und k-ten Kolonne von $d^2 f(X_n)$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} (9) \qquad & \sum_{l \neq k} \varkappa(\lambda_i, \lambda_l) d x_{il} \frac{d x_{lk}}{\lambda_l - \lambda_k} - \sum_{l \neq i} \varkappa(\lambda_l, \lambda_k) d x_{lk} \frac{d x_{il}}{\lambda_i - \lambda_l} + d \varkappa(\mu_i, \mu_k) d x_{ik} \\ & + \varkappa(\lambda_i, \lambda_k) \left[\sum_{l \neq i} d x_{lk} \frac{d x_{il}}{\lambda_i - \lambda_l} - \sum_{l \neq k} d x_{il} \frac{d x_{lk}}{\lambda_l - \lambda_k} \right], \end{aligned}$$

wobei in den Summen über l von 1 bis n zu summieren ist. Er läßt sich in der folgenden symmetrischen Form schreiben:

$$\sum_{l=1}^{n} \varkappa(\lambda_i, \lambda_k, \lambda_l) d x_{il} d x_{kl}. \tag{10}$$

Wir haben diese Formel unter der Voraussetzung abgeleitet, daß die λ_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) paarweise voneinander verschieden sind. Da aber wegen der zweimal stetigen Differenzierbarkeit von $f(\omega)$ die Differenzenquotienten wohl bestimmten Grenzwerten zustreben, wenn man Argumentwerte zusammenrücken läßt[19]), so gilt sie, wie man aus Stetigkeitsgründen sieht, uneingeschränkt.

Führt man nun in (10) t vermöge der Formel (1)

$$X_n = L_n + t H_n$$

als unabhängige Veränderliche ein und setzt $d^2 t = 0$, so wird

$$d X_n = H_n d t, \quad d^2 X_n = 0$$

und man erhält also folgendes Resultat:

Damit unsere Funktion $f(\omega)$ von n-ter Stufe konvex ist, ist notwendig und hinreichend, daß die Matrix mit den Elementen (10) *bei beliebiger*

[19]) Diese wollen wir dann als Differenzenquotienten für die zusammenfallenden Argumentwerte definieren.

Wahl der λ_i in dem Definitionsintervall der Funktion für jedes $dX_n \geq 0$ selbst nicht negativ ausfällt, daß also

$$\left(\sum_{l=1}^{n} \varkappa(\lambda_i, \lambda_k, \lambda_l)\, dx_{il}\, dx_{kl}\right) \geq 0 \quad \text{für } dX_n \geq 0 \tag{11}$$

ist.

Wir wollen aus ihr Folgerungen ziehen, indem wir die dx_{ik} spezialisieren. Wir setzen $dx_{ik} = h_i h_k dt$ (also $H_n(x,x)$ Quadrat einer Linearform) mit willkürlichen reellen Größen h_i und bekommen die Aussage, daß die Matrix mit den Elementen

$$\sum_{l=1}^{n} \varkappa(\lambda_i, \lambda_k, \lambda_l)\, h_l^2 h_i h_k$$

nicht negativ ist. Das bedeutet für die zugehörige quadratische Form die Aussage

$$\sum_{i,k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \varkappa(\lambda_i, \lambda_k, \lambda_l)\, h_l^2 h_i x_i h_k x_k \geqq 0. \tag{12}$$

Setzt man für den Moment alle h_i ungleich Null voraus, so kann man die neuen Veränderlichen

$$\xi_i = h_i x_i$$

einführen und bekommt die Ungleichung

$$\sum_{i,k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \varkappa(\lambda_i, \lambda_k, \lambda_l)\, h_l^2 \xi_i \xi_k \geqq 0. \tag{13}$$

Setzt man eines der h_l etwa h_m gleich 1 und läßt die übrigen gegen Null konvergieren, so erhält man[20])

$$\sum_{i,k=1}^{n} \varkappa(\lambda_i, \lambda_k, \lambda_m)\, \xi_i \xi_k \geqq 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, n).$$

Umgekehrt folgt aus dem Bestehen der n Ungleichungen (13) (11) zurück. Denn ersetzt man die ξ_i durch $\xi_i dx_{im}$ so entsteht die Ungleichung

$$\left(\varkappa(\lambda_i, \lambda_k, \lambda_m)\, dx_{im}\, dx_{km}\right) \geq 0 \tag{14}$$

und durch Addition derselben über m die Ungleichung (11).

Damit ist erkannt, *daß durch Ungleichung* (13) *notwendige und hinreichende Bedingungen für die Konvexität n-ter Stufe der Funktion $f(\omega)$ gegeben sind.*

Da die Nichtnegativität einer quadratischen Form durch die Nichtnegativität ihrer Hauptminoren ausgedrückt werden kann, so können wir als Hauptergebnis der Arbeit den Satz aussprechen:

---

[20]) Wegen der Stetigkeit einer quadratischen Form gilt Ungleichung (12) auch noch in der Grenze.

Damit eine Funktion in einem offenen Intervall konvex von n-ter Stufe sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie daselbst zweimal stetig differenzierbar ist und daß alle Determinanten von der Form

$$\left|\varkappa\left(\xi_0, \xi_i, \xi_k\right)\right|_{i,k=1}^{p}$$

für $p < n$ bei beliebiger Wahl der $p+1$ Argumente $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ aus dem Definitionsintervall der Funktion $f(\omega)$ und für $p = n$ bei der einzigen Einschränkung, daß ξ_0 mit einem der folgenden ξ_i-Werte zusammenfällt, nicht negativ ausfallen.

Wir schließen mit folgender interessanten Bemerkung:

Die Konvexität n-ter Stufe wurde von uns vollständig zum Ausdruck gebracht durch die Aussage, daß die Matrix mit den Elementen (10) für jedes $dX_n \geq 0$ nicht negativ ausfällt. Man beachte aber, daß aus den Ungleichungen (13) ohne eine Beschränkung über dX_n dieser Tatbestand gefolgert werden konnte. Wir sehen also, daß Konvexität der Matrixfunktion $f(X_n)$ *sogar in dem erweiterten Sinne besteht, daß in der Relation* (1) *für H_n eine beliebige Matrix eingesetzt werden darf.*

(Eingegangen am 19. Juli 1935.)

Adjungierte Extremalflächen im vierstufigen Raume.

Von

Lothar Koschmieder in Brünn[1]).

Bei den Minimalflächen des dreistufigen Raumes R_3 hat sich der Begriff zweier *adjungierter* Flächen dieser Art als fruchtbar erwiesen. Es gelang Haar, ihn auf die Extremalen eines recht allgemeinen, über ein Flächenstück im R_3 erstreckten Doppelintegrals H zu übertragen[2]): Er stellt einem solchen Variationsproblem $\mathfrak{v}$ ein zweites $\bar{\mathfrak{v}}$ als adjungiertes zur Seite (das im Falle der Minimalflächen mit $\mathfrak{v}$ zusammenfällt); die Extremalen $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{v}$ sind dann die adjungierten Flächen zu denen $\bar{\mathfrak{e}}$ von $\bar{\mathfrak{v}}$. Zwischen $\mathfrak{e}$ und $\bar{\mathfrak{e}}$ gibt es eine Fülle geometrischer Beziehungen. Den von Haar[2]) angegebenen hat Berwald[3]) weitere wesentliche hinzugefügt, namentlich solche, die von den zweiten Ableitungen der Koordinaten eines Flächenpunktes abhängen.

Die vorliegende Arbeit setzt es sich zum Ziele, entsprechende Ergebnisse bei dem Variationsproblem $\mathfrak{V}$ eines Doppelintegrals J zu gewinnen, das über ein *zwei*stufiges Flächenstück des *vier*stufigen Raumes R_4 erstreckt[4]) und ähnlich gebaut ist wie H im R_3; die Willkürlichkeit des Integranden schränken wir allerdings noch dadurch ein, daß wir ihn einer partiellen Differentialgleichung unterwerfen[5]).

Zunächst erklären wir zu einer Extremale $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{V}$ eine adjungierte Fläche $\overline{\mathfrak{E}}$ (§ 1). Diese erweist sich (§ 3) als Extremale eines aus $\mathfrak{V}$ herleitbaren Variationsproblems $\overline{\mathfrak{V}}$, das wir das zu $\mathfrak{V}$ adjungierte (§ 2) nennen. Die Beziehung zwischen $\mathfrak{V}$ und $\overline{\mathfrak{V}}$ ist umkehrbar; etwas Verwandtes gilt für das Verhältnis von $\mathfrak{E}$ zu $\overline{\mathfrak{E}}$ (§ 3, Ende). Die zwischen diesen Flächen zustandekommende Abbildung, bei der zusammengehörige Linienelemente aufeinander senkrecht stehen (§ 1), hat folgende Haupteigenschaft (§ 4): Sie stellt sich als *Verbiegung* dar, wenn man auf $\mathfrak{E}$ und $\overline{\mathfrak{E}}$ durch eine geeignete quadratische Differentialform eine Maßbestimmung $\mathfrak{M}$ einführt.

---

[1]) Über den Inhalt dieser Arbeit hat Verf. beim 11. Deutschen Mathematikertag in Stuttgart am 24. September 1935 vorgetragen.

[2]) A. Haar, Math. Annalen 100 (1928), S. 481—502.

[3]) L. Berwald, Monatsh. f. Math. u. Phys. 38 (1931), S. 89—108.

[4]) Wir führen also Haars Gedanken hier nicht in dem Sinne weiter, daß wir ein *drei*faches Integral über eine *Über*fläche des R_4 betrachteten.

[5]) [Zusatz bei der Druckprobe.] Tatsächlich liegt hierin *keine* wesentliche Einschränkung; siehe Fußnote[11]).

Die aufgezählten Ergebnisse bedeuten eine ziemlich weit reichende Verallgemeinerung von Sätzen, die man in dem nächstliegenden Sonderfalle, dem der Minimalflächen $\mathfrak{E}_0$ des R_4, kennt[6]). Dieser ist in unserm Begriffsgebiete dadurch ausgezeichnet, daß das zugehörige Variationsproblem sich selbst adjungiert ist.

Das Vorbild von $\mathfrak{M}$, das Berwald durch seine Maßbestimmung m auf $e, \bar{e}$ gegeben hat, kann man, wie dieser zeigt[7]), aus einem Linienelemente herleiten, das ich auf einer beliebigen Fläche $\mathfrak{f}$ im Zusammenhange mit einem allgemeinen über sie erstreckten Doppelintegrale erklärt habe[8]). Ob man aus einem allgemeinen Doppelintegrale über irgendeine Fläche $\mathfrak{F}$ des R_4 eine Maßbestimmung auf $\mathfrak{F}$ gewinnen kann, als deren Sonderfall auf $\mathfrak{E}$ sich $\mathfrak{M}$ auffassen ließe, bleibt noch dahingestellt. Wie auf diese, so hoffe ich später auf eine zweite naheliegende Frage zurückzukommen: Gibt es im R_4 Gegenstücke zu Berwalds genannten Sätzen? — also zu Sätzen, die die Eigenschaften zweiter Ordnung von e, $\bar{e}$ betreffen und z. B. den Satz von Bonnet verallgemeinern, nach dem sich die Krümmungslinien einer Minimalfläche auf die Asymptotenlinien der adjungierten abbilden. Um die Antwort zu finden, muß man auf den schon hervorgehobenen und im Schrifttum eingehend behandelten Sonderfall der Flächen $\mathfrak{E}_0$[9]) zurückgreifen. Es käme darauf an, die bei ihnen erzielten geometrischen Ergebnisse mit den von Kommerell geschaffenen flächentheoretischen Hilfsmitteln[10]) zu vervollständigen und den allgemeineren Extremalen $\mathfrak{E}$ nutzbar zu machen.

§ 1.

Die zu einer Extremale adjungierte Fläche.

Haar[2]) nimmt an, daß der Integrand von H nur von den drei Funktionaldeterminanten abhängt, die man von den drei Koordinaten der Punkte einer Fläche des R_3 nach deren Parametern bildet. Um im R_4 einen entsprechenden Ansatz zu gewinnen, bezeichnen wir dort mit x, y, z, w

[6]) Die Sätze über die $\mathfrak{E}_0$ sind von L. Pf. Eisenhart aufgestellt, Amer. Journal of Math. 34 (1912), S. 215—236.

[7]) Berwald[3]), S. 90, 102 – 105.

[8]) Koschmieder, Proc. Akad. van Wetensch. Amsterdam 31 (1928), S. 473—475.

[9]) Vgl. außer[6]) A. R. Forsyth, Geometry of four dimensions II (Cambridge 1930), S. 312—320. — Zu den $\mathfrak{E}_0$ gehören gewisse funktionentheoretisch bedeutsame Flächen; siehe: K. Kommerell, Math. Annalen 60 (1905), S. 586—589; Eisenhart[6]), S. 228—230; K. Reinhardt, Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. 36 (1927), S. 193—197.

[10]) Kommerell[9]), S. 548—568; Die Krümmung der zweidimensionalen Gebilde im ebenen Raum von vier Dimensionen, Diss. Tübingen 1897.

rechtwinklige Punktkoordinaten. Einer Fläche $\mathfrak{F}$ des R_4 kommt eine Darstellung durch zwei Parameter u, v zu, die etwa laute:

$$(1.1)\quad x = X(u,v),\quad y = Y(u,v),\quad z = Z(u,v),\quad w = W(u,v).$$

Wir setzen

$$(1.2)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} = p_{12} = \theta_1,\quad \frac{\partial(X,Z)}{\partial(u,v)} = p_{13} = \theta_2,\quad \frac{\partial(X,W)}{\partial(u,v)} = p_{14} = \theta_3,\\ &\frac{\partial(Z,W)}{\partial(u,v)} = p_{34} = \theta_4,\quad \frac{\partial(W,Y)}{\partial(u,v)} = p_{42} = \theta_5,\quad \frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)} = p_{23} = \theta_6; \end{aligned}$$

zwischen diesen $p_{ik} = -p_{ki}$ besteht die Plückersche Identität

$$(1.3)\quad p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Das Grundintegral besitze die Gestalt

$$(1.4)\quad J = \iint \Phi(p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23})\, du\, dv.$$

Hierin sei Φ eine von den Koordinaten freie positive Funktion der p_{ik}, genügend oft nach diesen ableitbar und in ihnen positiv-homogen von erster Stufe, so daß

$$(1.5)\quad \sum p_{ik}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{ik}} = \sum_{\alpha}^{1,6} \theta_\alpha \frac{\partial\Phi}{\partial\theta_\alpha} = \Phi$$

ist; J ist dann parameterinvariant. Ferner genüge die Grundfunktion Φ der partiellen Differentialgleichung

$$(1.6)\quad \frac{\partial\Phi}{\partial p_{12}}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{34}} + \frac{\partial\Phi}{\partial p_{13}}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{42}} + \frac{\partial\Phi}{\partial p_{14}}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{23}} = 0\ ^{11});$$

---

[11]) [Zusatz bei der Druckprobe (siehe Fußnote [5])]. Herr H. Kneser-Greifswald, der meinen Vortrag [1]) angehört hatte, teilte mir am 8. Oktober 1935 freundlicherweise mit, daß Φ *durch die Voraussetzung* (1.6) *nicht wesentlich eingeschränkt wird*, wenn Φ unter der Annahme (1.3) allein für $\theta_1 = \ldots = \theta_6 = 0$ verschwindet. Er begründet dies wie folgt: $\varphi(q)$ sei eine Funktion von 6 Veränderlichen q_α, in ihnen positiv-homogen von erster Stufe. Es werde

$$\Omega(q) = \sum_{\alpha}^{1,3} q_\alpha q_{\alpha+3},\qquad \varphi_\alpha = \frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha},\qquad \Lambda(\varphi) = \sum_{\alpha}^{1,3} \varphi_\alpha \varphi_{\alpha+3}$$

gesetzt; Zeiger sind mod. 6 zu verstehen. Gibt es eine Funktion $\psi(q)$, in den q_α positiv-homogen von erster Stufe und von der Art, daß $\Lambda(\psi) = 0$ ist und ψ für $q_\alpha = \theta_\alpha$, d. h. auf der Überfläche $\Omega(\theta) = 0$ des q-Raumes $\mathfrak{Q}$, die p heiße, mit φ übereinstimmt? Diese Frage wird durch folgende Erwägungen bejaht:

I. Leicht ist $\Lambda(\psi) = 0$ auf p zu erreichen: $\psi = \varphi - \dfrac{\Lambda(\varphi)}{\varphi}\,\Omega$.

II. Es sei also $\Lambda(\varphi) = 0$ auf p. Dann ermitteln wir die Charakteristiken $\mathfrak{C}$

im übrigen bleibt sie willkürlich[12]). — Die Extremalen $\mathfrak{E}$

$$x = \xi(u, v), \quad y = \eta(u, v), \quad z = \zeta(u, v), \quad w = \omega(u, v) \tag{1.7}$$

des zu dem Grundintegrale (1.4) gehörigen Variationsproblems $\mathfrak{V}$

$$\delta \iint \Phi(p_{ik})\, du\, dv = 0 \tag{1.8}$$

bestimmen sich aus den Eulerschen Gleichungen

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_u} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_v} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial \eta_u} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial \Phi}{\partial \eta_v} = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_u} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_v} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial \omega_u} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial \Phi}{\partial \omega_v} = 0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

---

der Differentialgleichung $\Lambda(\psi) = 0$ und ordnen jedem Punkte $Q(q_\alpha)$ der Umgebung von p den Schnittpunkt der Kurve $\mathfrak{C}$ durch Q mit p zu. Jetzt setzen wir

$$\psi(q) = \varphi(\theta).$$

Um das im einzelnen zu erörtern, bilden wir die Differentialgleichungen der Kurven $\mathfrak{C}$,

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \psi_\alpha} = \psi_{\alpha+3}, \quad \frac{d\psi}{dt} = \sum \psi_\alpha \frac{\partial \Lambda}{\partial \psi_\alpha} = 2\Lambda = 0, \quad \frac{d\psi_\alpha}{dt} = -\frac{\partial \Lambda}{\partial q_\alpha} - \psi_\alpha \frac{\partial \Lambda}{\partial \psi} = 0.$$

Sie geben integriert

$$\psi = \text{const.}, \quad \psi_\alpha = \text{const.}, \quad q_\alpha = \theta_\alpha + \psi_{\alpha+3}\, t;$$

als Anfangswerte sind dabei $q_\alpha = \theta_\alpha$, $\psi = \varphi(\theta)$, $\psi_\alpha = \varphi_\alpha(\theta)$ gewählt — Werte auf p, die die Gleichung $\Lambda(\psi) = 0$ befriedigen. Die Kurven $\mathfrak{C}$ bedecken die Umgebung jedes Punktes Θ von p (außer dem genannten Nullpunkt von Ω) einfach. Das ist erwiesen, sobald die Funktionaldeterminante D_0 der

$$q_\alpha = \theta_\alpha + \varphi_{\alpha+3}(\theta)\, t$$

nach $\theta_1, \ldots, \theta_5, t$ [wegen (1.3) ist $\theta_6 = -(\theta_1\theta_4 + \theta_2\theta_5)\theta_3^{-1}$] in Θ, d. h. für $t = 0$ als $\neq 0$ erkannt ist. Um sich davon zu überzeugen, bedenke man, daß man durch eine geeignete lineare Einsetzung, die Ω und Λ in sich überführt, den Punkt Θ in die bequeme Lage E (0, 0, 1, 0, 0, 0) bringen kann. In E, also für $t = 0$ wird dann

$$D_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\theta_4\theta_3^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\theta_5\theta_3^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & (\theta_1\theta_4 + \theta_2\theta_5)\theta_3^{-2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\theta_1\theta_3^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\theta_2\theta_3^{-1} \\ \varphi_4 & \varphi_5 & \varphi_6 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{vmatrix}$$

$$= (\theta_4\varphi_4 + \theta_5\varphi_5 + \theta_6\varphi_6 + \theta_1\varphi_1 + \theta_2\varphi_2)\theta_3^{-1} + \varphi_3 = \varphi\theta_3^{-1} \neq 0.$$

III. Die Homogenität der Funktion ψ ergibt sich daraus, daß dem Punkte (λq_α) der Punkt $(\lambda\theta_\alpha)$ zugehört; daher ist

$$\psi(\lambda q) = \varphi(\lambda\theta) = \lambda\varphi(\theta) = \lambda\psi(q).$$

[12]) Welchen Vorrat von Integralen der Ansatz (1.4) umfaßt, ermißt man nach einem allgemeinen Satze von W. Groß über parameterinvariante Integrale [Monatsh. f. Math. u. Phys. 27 (1916), S. 81—84], der im vorliegenden Falle folgendes besagt: Hängt die Grundfunktion — außer von den Koordinaten — nur von deren ersten Ableitungen ab, so treten diese in ihr nach Rücksicht auf (1.3) nur in den Verbindungen p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42} auf.

Nach Haars Vorgang beim Problem $\delta H = 0$ kann man sie, indem man vier Hilfsfunktionen $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$, $\bar{\omega}$ von u, v einführt, durch folgendes System von Differentialgleichungen erster Ordnung ersetzen:

$$(1.10)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_u} = \bar{\xi}_v, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_v} = -\bar{\xi}_u, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_u} = \bar{\eta}_v, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_v} = -\bar{\eta}_u, \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_u} = \bar{\zeta}_v, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_v} = -\bar{\zeta}_u, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_u} = \bar{\omega}_v, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_v} = -\bar{\omega}_u. \end{aligned}$$

Dieses regt dazu an, auch im R_4 die Variationsrechnung der Doppelintegrale in der von Haar bezeichneten Richtung[13]) weiter zu entwickeln — also ohne die höheren als ersten Ableitungen der Extremalfunktionen als vorhanden vorauszusetzen; doch gehe ich hier darauf nicht ein.

Aus (1.10) ergeben sich als Werte der Differentiale $d\bar{\xi}, \ldots, d\bar{\omega}$

$$d\bar{\xi} = \bar{\xi}_u\, du + \bar{\xi}_v\, dv = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_v} du + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_u} dv \quad \text{usw.}$$

In ihnen führen wir die Ableitungen von Φ nach den — fortan auf $\mathfrak{E}$ bezogenen — Größen p_{ik} durch die Formeln ein

$$(1.11)\quad \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_u} &= \frac{\partial \Phi}{\partial p_{12}} \eta_v + \frac{\partial \Phi}{\partial p_{13}} \zeta_v + \frac{\partial \Phi}{\partial p_{14}} \omega_v, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_v} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial p_{12}} \eta_u - \frac{\partial \Phi}{\partial p_{13}} \zeta_u - \frac{\partial \Phi}{\partial p_{14}} \omega_u \quad \text{usw.}; \end{aligned}$$

dann erhalten wir

$$(1.12)\quad \begin{aligned} d\bar{\xi} &= \quad * \quad + \frac{\partial \Phi}{\partial p_{12}} d\eta + \frac{\partial \Phi}{\partial p_{13}} d\zeta + \frac{\partial \Phi}{\partial p_{14}} d\omega, \\ d\bar{\eta} &= \frac{\partial \Phi}{\partial p_{21}} d\xi \quad * \quad + \frac{\partial \Phi}{\partial p_{23}} d\zeta + \frac{\partial \Phi}{\partial p_{24}} d\omega, \\ d\bar{\zeta} &= \frac{\partial \Phi}{\partial p_{31}} d\xi + \frac{\partial \Phi}{\partial p_{32}} d\eta \quad * \quad + \frac{\partial \Phi}{\partial p_{34}} d\omega, \\ d\bar{\omega} &= \frac{\partial \Phi}{\partial p_{41}} d\xi + \frac{\partial \Phi}{\partial p_{42}} d\eta + \frac{\partial \Phi}{\partial p_{43}} d\zeta \quad * \quad . \end{aligned}$$

Durch die Werte (1.12) ist eine Fläche

$$(1.13)\quad x = \bar{\xi}(u, v), \quad y = \bar{\eta}(u, v), \quad z = \bar{\zeta}(u, v), \quad w = \bar{\omega}(u, v)$$

bis auf Parallelverschiebungen eindeutig bestimmt; wie in (1.12) die in den p_{ik} von 0-ter Stufe homogenen Größen $\partial \Phi / \partial p_{ik}$, ist sie von der Wahl der Parameter u, v unabhängig. Sie heißt *die zu* $\mathfrak{E}$ (1.7) *in bezug auf* (1.8) *adjungierte Fläche* $\bar{\mathfrak{E}}$.

Zu einer *Minimal*fläche $\mathfrak{E}_0$ hat Eisenhart a. a. O.[6]), S. 233 eine adjungierte Fläche $\bar{\mathfrak{E}}_0$ erklärt; man bestätigt leicht[14]), daß $\bar{\mathfrak{E}}_0$ auch in unserm Sinne zu $\mathfrak{E}_0$ adjungiert ist.

---

[13]) Haar, Abh. aus d. Math. Sem. d. Hamburgischen Univ. 8 (1930), S. 1—27, bes. § 2.

[14]) Wie, zeigen wir unten im Anschluß an (4.12), (4.13).

Aus (1. 12) entspringt eine *Abbildung* von $\mathfrak{E}$ auf $\overline{\mathfrak{E}}$, bei der wir solche Punkte dieser Flächen einander zuordnen, die zu denselben Wertepaaren u, v gehören. *Entsprechende Linienelemente von* $\mathfrak{E}$ *und* $\overline{\mathfrak{E}}$ *stehen aufeinander senkrecht*; denn aus (1. 12) folgt

$$d\xi\, d\bar{\xi} + d\eta\, d\bar{\eta} + d\zeta\, d\bar{\zeta} + d\omega\, d\bar{\omega} = 0. \tag{1.14}$$

Auf $\overline{\mathfrak{E}}$ wird man sich nach (1. 2) der Bezeichnung bedienen

$$\frac{\partial(\bar{\xi}, \bar{\eta})}{\partial(u, v)} = \bar{p}_{12} = \bar{\theta}_1 \quad \text{usw.;} \tag{1.15}$$

wir wollen diese Größen durch die p_{ik} ausdrücken. Dazu bemerken wir, daß sich $\bar{p}_{12}$ nach (1. 12) als Produkt zweier Matrizen darstellen läßt,

$$\bar{p}_{12} = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{\partial \Phi}{\partial p_{12}} & \frac{\partial \Phi}{\partial p_{13}} & \frac{\partial \Phi}{\partial p_{14}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p_{21}} & 0 & \frac{\partial \Phi}{\partial p_{23}} & \frac{\partial \Phi}{\partial p_{24}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \xi_u & \eta_u & \zeta_u & \omega_u \\ \xi_v & \eta_v & \zeta_v & \omega_v \end{Vmatrix};$$

seine Entwicklung nach den Produkten ihrer entsprechenden zweireihigen Determinanten gibt

$$\bar{p}_{12} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p_{12}}\right)^2 p_{12} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_{12}} \frac{\partial \Phi}{\partial p_{13}} p_{13} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_{12}} \frac{\partial \Phi}{\partial p_{14}} p_{14}$$
$$+ \frac{\partial \Phi}{\partial p_{12}} \frac{\partial \Phi}{\partial p_{23}} p_{23} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_{12}} \frac{\partial \Phi}{\partial p_{24}} p_{24} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p_{13}} \frac{\partial \Phi}{\partial p_{24}} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_{14}} \frac{\partial \Phi}{\partial p_{23}}\right) p_{34}.$$

Hier greift die Voraussetzung (1. 6)[11]) ein: kraft ihrer nimmt die Vorzahl von p_{34} im letzten Gliede rechts den Wert $\frac{\partial \Phi}{\partial p_{12}} \frac{\partial \Phi}{\partial p_{34}}$ an, und daher findet man mit Rücksicht auf (1. 5)

$$\bar{p}_{12} = \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial p_{12}}.$$

Entsprechend wird allgemein in der zweifachen Schreibweise (1. 2)

$$\bar{p}_{ik} = \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial p_{ik}}, \tag{1.16}$$

$$\bar{\theta}_a = \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_a}. \tag{1.17}$$

Hieraus folgt nach (1. 6), entsprechend (1. 3),

$$\bar{p}_{12}\bar{p}_{34} + \bar{p}_{13}\bar{p}_{42} + \bar{p}_{14}\bar{p}_{23} = 0. \tag{1.18}$$

§ 2.

Das adjungierte Variationsproblem.

Adjungierten wir soeben der Fläche $\mathfrak{E}$ eine andere $\overline{\mathfrak{E}}$, so adjungieren wir nunmehr dem Variationsproblem $\mathfrak{V}$ (1. 8) selbst ein anderes $\overline{\mathfrak{V}}$

$$\delta \iint \overline{\Phi}(\bar{p}_{ik})\, du\, dv = 0 \quad \text{oder} \tag{2.1}$$

$$\delta \iint \overline{\Phi}(\bar{\theta}_a)\, du\, dv = 0, \tag{2.2}$$

dessen Grundfunktion $\bar{\Phi}$ so entsteht: Man löst die Gleichungen (1.17) nach den θ_α auf und setzt die so erhaltenen Funktionen der $\bar{\theta}_\beta$[15]) in Φ für die θ_α ein,

$$\Phi(\theta_\alpha) = \bar{\Phi}(\bar{\theta}_\alpha), \quad \text{kurz} \quad \Phi = \bar{\Phi}. \tag{2.3}$$

$\bar{\Phi}$ ist in den $\bar{\theta}_\alpha$ homogen von erster Stufe.

Die Umkehrung der Formeln (1.17) gelingt wie folgt[16]): Setzt man sie mit θ_α zusammen, so findet man nach (1.5)

$$\Phi^2 = \theta_\alpha \bar{\theta}_\alpha \text{ [17]}); \tag{2.4}$$

hieraus ergibt sich für Φ, θ_α, $\bar{\theta}_\alpha$ als Funktionen von u, v

$$2\,\Phi\, d\Phi = \theta_\alpha\, d\bar{\theta}_\alpha + \bar{\theta}_\alpha\, d\theta_\alpha. \tag{2.5}$$

Nun schließt man aber aus (1.17), daß

$$\bar{\theta}_\alpha\, d\theta_\alpha = \Phi\, d\Phi \tag{2.5a}$$

ist; folglich vereinfacht sich (2.5) zu

$$\Phi\, d\Phi = \theta_\alpha\, d\bar{\theta}_\alpha$$

oder wegen (2.3) zu

$$\theta_\alpha\, d\bar{\theta}_\alpha = \bar{\Phi}\, d\bar{\Phi} = \bar{\Phi}\,\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{\theta}_\alpha}\, d\bar{\theta}_\alpha. \tag{2.5b}$$

Entfernt man $d\bar{\theta}_6$ mit Hilfe der aus (1.18) folgenden Beziehung

$$\sum_{\alpha}^{1,6} \bar{\theta}_\alpha\, d\bar{\theta}_{\alpha+3} = 0 \quad \text{(Zeiger mod. 6 zu verstehen)}$$

und vergleicht dann auf beiden Seiten von (2.5b) die Vorzahlen der unabhängigen $d\bar{\theta}_1, \ldots, d\bar{\theta}_5$, so erhält man

$$\theta_\alpha = \bar{\Phi}\,\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{\theta}_\alpha} + \mathsf{M}\,\bar{\theta}_{\alpha+3}$$

mit noch unbestimmtem M. Daß entsprechend (1.6) auch gelte

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{\theta}_1}\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{\theta}_4} + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{\theta}_2}\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{\theta}_5} + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{\theta}_3}\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{\theta}_6} = 0, \tag{2.6}$$

bewirkt man gerade durch die Bestimmung $\mathsf{M} = 0$; sie macht

$$\theta_\alpha = \bar{\Phi}\,\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{\theta}_\alpha}, \qquad \text{oder} \qquad p_{ik} = \bar{\Phi}\,\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{p}_{ik}}. \tag{2.7, 2.8}$$

Damit sind die θ_α durch die $\bar{\theta}_\beta$ dargestellt, und zwar durch Formeln von demselben Bau wie (1.17), (1.16). So ist folgende Einsicht gewonnen:

---

[15]) Griechische Zeiger laufen wie schon in (1.5) von 1 bis 6.

[16]) Wir bleiben bei der homogenen Form; dies wäre natürlich auch bei dem Integrale H möglich, bei dem Haar a. a. O.[2]), S. 486—488 zu der unhomogenen Form zurückkehrt.

[17]) Über doppelt auftretende Zeiger wird hier und weiterhin in § 2 summiert.

Das zu $\mathfrak{V}$ (1.8) *adjungierte Variationsproblem* $\overline{\mathfrak{V}}$ (2.1) *ist mit* $\mathfrak{V}$ *durch die Beziehungen* (1.16), (2.3), (2.8)[18]) *verbunden; diese zeigen zugleich, daß das zu* $\overline{\mathfrak{V}}$ *adjungierte Variationsproblem wiederum* $\mathfrak{V}$ *ist.*

Es ist für manche Zwecke vorteilhaft, ähnlich wie Berwald a. a. O.[3]), S. 91 beim Integrale H im R_3 verfahren ist, hier im R_4 die Sechservektoren

$$\vartheta_\alpha = \frac{\theta_\alpha}{\Phi(\theta_\beta)}, \tag{2.9}$$

$$\overline{\vartheta}_\alpha = \frac{\overline{\theta}_\alpha}{\overline{\Phi}(\overline{\theta}_\beta)} \tag{2.10}$$

einzuführen. Dann ist wegen der Homogenität der Funktion Φ, deren Argumente wir nun wieder anschreiben,

$$\Phi(\vartheta_\alpha) = 1, \tag{2.11}$$

ferner nach (2.4) und (2.3) auch

$$\vartheta_\alpha \vartheta_\alpha = 1. \tag{2.12}$$

Hieraus erhält man

$$\vartheta_\alpha d\overline{\vartheta}_\alpha + \overline{\vartheta}_\alpha d\vartheta_\alpha = 0. \tag{2.13}$$

Nun folgt aus (2.5a) wegen (2.9), (2.12)

$$\overline{\vartheta}_\alpha d[\Phi(\theta_\beta)\,\vartheta_\alpha] = d\Phi(\theta_\beta),$$

$$\overline{\vartheta}_\alpha d\vartheta_\alpha = 0; \tag{2.14}$$

mithin ist nach (2.13) auch

$$\vartheta_\alpha d\overline{\vartheta}_\alpha = 0. \tag{2.15}$$

Indem wir die geometrische Deutung der zwischen den Vektoren ϑ_α, $\overline{\vartheta}_\alpha$ gefundenen Beziehungen hier beiseite lassen, vermerken wir noch die Ausdrücke der $\overline{\vartheta}_\alpha$ durch die ϑ_β bzw. der ϑ_α durch die $\overline{\vartheta}_\beta$: Nach (1.17), (2.7) ist

$$\overline{\vartheta}_\alpha = \frac{\partial\Phi(\theta_\beta)}{\partial\theta_\alpha}, \tag{2.16}$$

$$\vartheta_\alpha = \frac{\partial\overline{\Phi}(\overline{\theta}_\beta)}{\partial\overline{\theta}_\alpha}; \tag{2.17}$$

die rechten Seiten sind in den θ_β bzw. $\overline{\theta}_\beta$ homogen von 0-ter Stufe.

§ 3.

$\overline{\mathfrak{E}}$ als Extremale von $\overline{\mathfrak{V}}$.

Die Bedeutung der beiden durch die Überschriften von § 1 und 2 bezeichneten Begriffe beruht darauf, daß sie zueinander in folgende Beziehung treten:

---

[18]) Diese bilden die von Haar beim Integral H benutzte Transformation [2], (13), (14), ($\overline{13}$)] weiter. Wir brauchen hier nicht den Zusammenhang zu erörtern, in dem die obigen bei der Adjunktion entstandenen Verwandlungen zu den umfassenderen Formeln stehen, durch die C. Carathéodory die Legendresche Transformation verallgemeinert hat [Acta Litt. ac Scient. Univ. Szeged 4 (1928/29), S. 193—216].

Die zu einer Extremale $\mathfrak{E}$ *des Variationsproblems* $\mathfrak{V}$ (1.8) *adjungierte Fläche* $\overline{\mathfrak{E}}$ *ist Extremale des zu* $\mathfrak{V}$ *adjungierten Variationsproblems* $\overline{\mathfrak{V}}$ (2.1).

Zum Beweise dieses Satzes zeigen wir, daß $\overline{\mathfrak{E}}$ den Eulerschen Gleichungen genügt, die zu $\overline{\mathfrak{V}}$ gehören. Wir bilden gemäß (1.12) mit Hilfe von (2.7)

$$\begin{aligned}(3.1)\qquad &\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\bar{p}_{12}}d\bar{\eta}+\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\bar{p}_{13}}d\bar{\zeta}+\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\bar{p}_{14}}d\bar{\omega}\\ &=\frac{1}{\Phi}\Big[-d\xi\sum p_{ik}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{ik}}+\frac{\partial\Phi}{\partial p_{34}}(p_{34}d\xi+p_{41}d\zeta+p_{13}d\omega)\\ &+\frac{\partial\Phi}{\partial p_{42}}(p_{42}d\xi+p_{14}d\eta+p_{21}d\omega)+\frac{\partial\Phi}{\partial p_{23}}(p_{23}d\xi+p_{31}d\eta+p_{12}d\zeta)\Big].\end{aligned}$$

Nun verschwinden aber die drei runden Klammern rechts sämtlich, denn es hat z. B. die erste von ihnen nach (1.2) den Wert

$$\begin{vmatrix}\xi_u du+\xi_v dv & \zeta_u du+\zeta_v dv & \omega_u du+\omega_v dv\\ \xi_u & \zeta_u & \omega_u\\ \xi_v & \zeta_v & \omega_v\end{vmatrix}=0.$$

Da ferner das erste Glied in der eckigen Klammer nach (1.5) gleich $-\Phi\,d\xi$ ist, so bleibt von (3.1)

$$\begin{aligned}(3.2)\qquad -d\xi &= \quad * \quad +\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\bar{p}_{12}}d\bar{\eta}+\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\bar{p}_{13}}d\bar{\zeta}+\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\bar{p}_{14}}d\bar{\omega};\\ -d\eta &= \frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\bar{p}_{21}}d\bar{\xi} \quad * \quad +\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\bar{p}_{23}}d\bar{\zeta}+\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\bar{p}_{24}}d\bar{\omega},\\ -d\zeta &= \frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\bar{p}_{31}}d\bar{\xi}+\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\bar{p}_{32}}d\bar{\eta} \quad * \quad +\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\bar{p}_{34}}d\bar{\omega},\\ -d\omega &= \frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\bar{p}_{41}}d\bar{\xi}+\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\bar{p}_{42}}d\bar{\eta}+\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\bar{p}_{43}}d\bar{\zeta} \quad * \quad ;\end{aligned}$$

die drei letzten Formeln leitet man ebenso her wie soeben die für $-d\xi$. Verwendet man in (3.2) Teilableitungen statt der Differentiale und vereinfacht entsprechend (1.11), so findet man

$$(3.3)\qquad -\xi_u=\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\bar{p}_{12}}\bar{\eta}_u+\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\bar{p}_{13}}\bar{\zeta}_u+\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\bar{p}_{14}}\bar{\omega}_u=-\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\bar{\xi}_v},$$

$$(3.4)\qquad -\xi_v=\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\bar{\xi}_u};$$

daher stellt sich das ähnlich wie (1.10) gebaute System ein:

$$\begin{aligned}(3.5)\qquad &\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\bar{\xi}_u}=-\xi_v, \quad \frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\bar{\xi}_v}=\xi_u, \quad \frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\bar{\eta}_u}=-\eta_v, \quad \frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\bar{\eta}_v}=\eta_u,\\ &\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\bar{\zeta}_u}=-\zeta_v, \quad \frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\bar{\zeta}_v}=\zeta_u, \quad \frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\bar{\omega}_u}=-\omega_v, \quad \frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\bar{\omega}_v}=\omega_u.\end{aligned}$$

Wenn man etwa ξ aus (3.3), (3.4) entfernt, indem man (3.3) nach v, (3.4) nach u ableitet und abzieht, erhält man

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \bar{\xi}_u} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \bar{\xi}_v} = 0 \text{ usw.},$$

also in der Tat die zu $\overline{\mathfrak{B}}$ gehörigen Eulerschen Gleichungen, w. z. b. w.

Die zu $\overline{\mathfrak{E}}$ in bezug auf (2.1) adjungierte Fläche $\overline{\overline{\mathfrak{E}}}$, dargestellt durch $x = \bar{\bar{\xi}}(u, v)$ usw., befriedigt nach (1.10) die Gleichungen

$$\bar{\bar{\xi}}_u = -\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \bar{\xi}_v}, \qquad \bar{\bar{\xi}}_v = \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \bar{\xi}_u} \text{ usw.}$$

Der Vergleich mit (3.5) lehrt, daß

$$\bar{\bar{\xi}}_u = -\xi_u, \qquad \bar{\bar{\xi}}_v = -\xi_v \text{ usw.}$$

ist. Danach ist $\overline{\overline{\mathfrak{E}}}$ das Spiegelbild von $\mathfrak{E}$ hinsichtlich des Koordinaten-Ursprungs, also gleichfalls Extremale von $\mathfrak{B}$.

§ 4.

Die Längentreue der Abbildung zwischen $\mathfrak{E}$ und $\overline{\mathfrak{E}}$.

Es gibt auf $\mathfrak{E}$ eine quadratische Differentialform dS^2, die mit der auf $\overline{\mathfrak{E}}$ entsprechend gebildeten $d\bar{S}^2$ in zugeordneten Punkten (1.13) übereinstimmt: Das ist die Form

$$\begin{aligned} dS^2 &= E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \\ &= \frac{\Phi(\theta_\alpha)}{\sqrt{|eg - f^2|}}\,(e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2), \end{aligned} \tag{4.1}$$

in der mit den Bezeichnungen (2.9), (2.10)

$$e = \sum_{\alpha}^{1,6} \frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial u}\frac{\partial \bar{\vartheta}_\alpha}{\partial u}, \quad f = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}^{1,6}\left(\frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial u}\frac{\partial \bar{\vartheta}_\alpha}{\partial v} + \frac{\partial \bar{\vartheta}_\alpha}{\partial u}\frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial v}\right), \quad g = \sum_{\alpha}^{1,6}\frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial v}\frac{\partial \bar{\vartheta}_\alpha}{\partial v} \tag{4.2}$$

ist und $h = eg - f^2 \neq 0$ angenommen werde[19]). Auf $\overline{\mathfrak{E}}$ setzen wir

$$\begin{aligned} d\bar{S}^2 &= \bar{E}\,du^2 + 2\bar{F}\,du\,dv + \bar{G}\,dv^2 \\ &= \frac{\bar{\Phi}(\bar{\theta}_\alpha)}{\sqrt{|eg - f^2|}}\,(e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2). \end{aligned} \tag{4.3}$$

In der Tat erweisen sich diese dem Ansatze von Berwald auf $\mathfrak{e}, \bar{\mathfrak{e}}$[20]) von uns für $\mathfrak{E}, \overline{\mathfrak{E}}$ nachgebildeten Linienelemente wegen (2.3) sofort als gleich,

$$d\bar{S}^2 = dS^2. \tag{4.4}$$

Bei dieser Maßbestimmung $\mathfrak{M}$ ist also die Abbildung zwischen $\mathfrak{E}$ und $\overline{\mathfrak{E}}$ eine Verbiegung.

---

[19]) Beim Gebrauche reeller Parameter ist dS^2 unter der Annahme $h > 0$ im Falle $e > 0$ entschieden positiv, im Falle $e < 0$ entschieden negativ.

[20]) Berwald[8]), S. 100; vgl. dazu [7]), [8]).

Ferner ist der zu $\mathfrak{M}$ gehörige *nichteuklidische Flächeninhalt* eines Stückes $\mathfrak{E}^*$ von $\mathfrak{E}$ *gleich dem* über $\mathfrak{E}^*$ erstreckten *Grundintegrale*:

$$\iint \sqrt{|EG - F^2|}\, du dv = \iint \Phi(\theta_\alpha)\, du dv.$$

Ebenso gilt auf $\bar{\mathfrak{E}}$

$$\iint \sqrt{|\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2|}\, du dv = \iint \bar{\Phi}(\bar{\theta}_\alpha)\, du dv.$$

Die Haupteigenschaft von $\mathfrak{M}$ (4.1) ist folgende: Bei der nächstliegenden Aufgabe der Art (1.8), *beim Problem der Minimalflächen* $\mathfrak{E}_0$ *des* R_4, dessen Grundintegral (1.4) der Flächeninhalt

(4.5) $J_0 = \iint \Phi_0(\theta_\alpha)\, du dv,$ (4.6) $\Phi_0(\theta_\alpha) = \left(\sum_\alpha^{1,6} \theta_\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}}$

ist[21]), *geht* dS^2 *in das gewöhnliche Bogenelement* ds_0^2 *auf* $\mathfrak{E}_0$ *über.*

Dem Beweise hierfür schicken wir die Bemerkung voraus, daß das Variationsproblem $\delta J_0 = 0$ im Sinne des § 2 sich selbst adjungiert ist; es ist nämlich nach (1.17), (4.6), (2.10)

(4.7) $\bar{\theta}_\alpha = \Phi_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta_\alpha} = \theta_\alpha,$ (4.8) $\bar{\vartheta}_\alpha = \vartheta_\alpha,$

daher nach (2.3) auch

$$\bar{\Phi}_0(\bar{\theta}_\alpha) = \Phi_0(\bar{\theta}_\alpha) = \left(\sum_\alpha^{1,6} \bar{\theta}_\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Vermöge (4.8) vereinfachen sich bei (4.5) wie bei jedem sich selbst adjungierten Variationsproblem die Größen (4.2) zu

(4.9) $e_0 = \sum_\alpha^{1,6} \left(\frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial u}\right)^2, \quad f_0 = \sum_\alpha^{1,6} \frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial u} \frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial v}, \quad g_0 = \sum_\alpha^{1,6} \left(\frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial v}\right)^2.$

Um zu zeigen, daß dS^2 auf $\mathfrak{E}_0$, kurz $dS_0^2 = ds_0^2$ wird, führen wir auf $\mathfrak{E}_0$ als Parameterlinien $du = 0$, $dv = 0$ die Kurven $d\sigma = 0$, $d\tau = 0$ von der Länge 0 ein[22]); wenn dann $\mathfrak{E}_0$ durch die Formeln $x = \xi_0(\sigma, \tau)$ usw. dargestellt wird, vereinfacht sich ds_0^2 zu

(4.10) $ds_0^2 = 2\hat{F}\, d\sigma d\tau,$ wo (4.11) $\hat{F} = \frac{\partial \xi_0}{\partial \sigma}\frac{\partial \xi_0}{\partial \tau} + \ldots + \frac{\partial \omega_0}{\partial \sigma}\frac{\partial \omega_0}{\partial \tau}.$

Wir schieben hier die durch[14]) angekündigte Bestätigung ein. Eisenhart gibt a. a. O.[22]), (35) die Funktionen $\xi_0, \ldots, \omega_0$ in der Gestalt

(4.12) $\xi_0(\sigma, \tau) = \xi_1(\sigma) + \xi_2(\tau), \quad \eta_0(\sigma, \tau) = \eta_1(\sigma) + \eta_2(\tau)$ usw.

an, wobei mit den Abkürzungen $d\xi_1 / d\sigma = \xi_1', d\xi_2 / d\tau = \xi_2'$ usw.

(4.13) $\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2 + \omega_1'^2 = \xi_2'^2 + \eta_2'^2 + \zeta_2'^2 + \omega_2'^2 = 0$

ist. Hieraus und aus Eisenharts Formeln[6]), S. 232, (66) für $\underline{\mathfrak{E}}_0$

$$x = i[\xi_1(\sigma) - \xi_2(\tau)] \text{ usw.}$$

folgt unmittelbar, daß $\mathfrak{E}_0$ und $\underline{\mathfrak{E}}_0$ den Beziehungen (1.10) genügen; $\underline{\mathfrak{E}}_0$ ist also zu $\mathfrak{E}_0$ adjungiert im Sinne des § 1.

[21]) Man entnimmt diesen Wert des Flächeninhaltes aus Forsyth[9]) I, S. 354.
[22]) Vgl. Eisenhart[6]), S. 223; Forsyth[9]), S. 313.

Zu unserm Nachweise zurückkehrend, berechnen wir dS_0^2 aus (4.1); dabei haben wir e, f, g durch die Ausdrücke (4.9) und in diesen u, v durch σ, τ zu ersetzen. Die Werte der ϑ_α auf $\mathfrak{E}_0$ übernehmen wir von Eisenhart[6]), S. 231 zu

$$(4.14)\quad \begin{cases} \vartheta_1 = \dfrac{1}{1+\sigma\tau} - \dfrac{\lambda''\nu''}{\Psi_1}, & \vartheta_4 = -\dfrac{1}{1+\sigma\tau} + \dfrac{\mu''\varrho''}{\Psi_1}, \\ \vartheta_2 = \dfrac{i}{2}\left(\dfrac{\sigma-\tau}{1+\sigma\tau} + \dfrac{\Psi_3}{\Psi_1}\right), & \vartheta_5 = \dfrac{i}{2}\left(-\dfrac{\sigma-\tau}{1+\sigma\tau} + \dfrac{\Psi_3}{\Psi_1}\right), \\ \vartheta_3 = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\sigma+\tau}{1+\sigma\tau} + \dfrac{\Psi_2}{\Psi_1}\right), & \vartheta_6 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sigma+\tau}{1+\sigma\tau} + \dfrac{\Psi_2}{\Psi_1}\right) \end{cases}$$

mit folgenden Änderungen der Schreibweise: Die dort mit u, u_0; $P_{12}, \ldots, P_{23}$; $\varphi, \psi, \varphi_0, \psi_0$[23]); Φ_1, Φ_2, Φ_3 bezeichneten Größen heißen hier σ, τ; $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_6$; $\lambda(\sigma)$, $\mu(\sigma)$, $\nu(\tau)$, $\varrho(\tau)$; Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3; dabei ist

$$(4.15)\quad \Psi_1 = \lambda''\nu'' + \mu''\varrho'', \quad \Psi_2 = \lambda''\varrho'' + \mu''\nu'', \quad \Psi_3 = \lambda''\varrho'' - \mu''\nu'',$$

wo Striche die Ableitungen nach der jeweiligen Unabhängigen bedeuten. Aus (4.14) findet man, wenn man kurz

$$\frac{\lambda'''\mu'' - \lambda''\mu'''}{\Psi_1^2} = \mathfrak{S}, \qquad \frac{\nu'''\varrho'' - \nu''\varrho'''}{\Psi_1^2} = \mathfrak{T}$$

setzt,

$$(4.16)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\vartheta_1}{\partial\sigma} = -\dfrac{\tau}{(1+\sigma\tau)^2} - \nu''\varrho''\,\mathfrak{S}, \\ \dfrac{\partial\vartheta_2}{\partial\sigma} = \dfrac{i}{2}\dfrac{1+\tau^2}{(1+\sigma\tau)^2} + \dfrac{i}{2}(\nu''^2 + \varrho''^2)\mathfrak{S}, \\ \dfrac{\partial\vartheta_3}{\partial\sigma} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1-\tau^2}{(1+\sigma\tau)^2} - \dfrac{1}{2}(\nu''^2 - \varrho''^2)\mathfrak{S}, \\ \dfrac{\partial\vartheta_4}{\partial\sigma} = \dfrac{\tau}{(1+\sigma\tau)^2} - \nu''\varrho''\,\mathfrak{S}, \\ \dfrac{\partial\vartheta_5}{\partial\sigma} = -\dfrac{i}{2}\dfrac{1+\tau^2}{(1+\sigma\tau)^2} + \dfrac{i}{2}(\nu''^2 + \varrho''^2)\mathfrak{S}, \\ \dfrac{\partial\vartheta_6}{\partial\sigma} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1-\tau^2}{(1+\sigma\tau)^2} - \dfrac{1}{2}(\nu''^2 - \varrho''^2)\mathfrak{S}, \end{cases}$$

$$(4.17)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\vartheta_1}{\partial\tau} = -\dfrac{\sigma}{(1+\sigma\tau)^2} - \lambda''\mu''\,\mathfrak{T}, \\ \dfrac{\partial\vartheta_2}{\partial\tau} = -\dfrac{i}{2}\dfrac{1+\sigma^2}{(1+\sigma\tau)^2} - \dfrac{i}{2}(\lambda''^2 + \mu''^2)\mathfrak{T}, \\ \dfrac{\partial\vartheta_3}{\partial\tau} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1-\sigma^2}{(1+\sigma\tau)^2} - \dfrac{1}{2}(\lambda''^2 - \mu''^2)\mathfrak{T}, \\ \dfrac{\partial\vartheta_4}{\partial\tau} = \dfrac{\sigma}{(1+\sigma\tau)^2} - \lambda''\mu''\,\mathfrak{T}, \\ \dfrac{\partial\vartheta_5}{\partial\tau} = \dfrac{i}{2}\dfrac{1+\sigma^2}{(1+\sigma\tau)^2} - \dfrac{i}{2}(\lambda''^2 + \mu''^2)\mathfrak{T}, \\ \dfrac{\partial\vartheta_6}{\partial\tau} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1-\sigma^2}{(1+\sigma\tau)^2} - \dfrac{1}{2}(\lambda''^2 - \mu''^2)\mathfrak{T}. \end{cases}$$

[23]) Wegen des Zusammenhanges dieser Größen mit den in (4.12) rechts auftretenden siehe Eisenhart[6]), S. 224.

Um jetzt e_0 (4.9) zu ermitteln, quadriert man die sechs Ausdrücke $\partial\,\vartheta_\alpha / \partial\,\sigma$ (4.16) als Binome. Beim Zusammenzählen gibt die Summe der Quadrate der ersten Glieder Null, desgleichen die Summe der Quadrate der zweiten Glieder; die doppelten Produkte heben sich paarweise weg. Daher erhält man $e_0 = 0$, und an Hand von (4.17) ebenso $g_0 = 0$. Mithin zieht sich der Ausdruck (4.1) auf $\mathfrak{E}_0$ zu

$$dS_0^2 = 2\,\Phi_0(\theta_\alpha)\,d\sigma\,d\tau$$

zusammen; da nun in der Bezeichnung (4.11)

$$\Phi_0(\theta_\alpha) = \hat{F}$$

ist[24]), so wird

$$dS_0^2 = 2\,\hat{F}\,d\sigma\,d\tau.$$

Das ist aber nach (4.10) gerade ds_0^2.

In dem besonderen Falle (4.5), (4.6) spricht unser Satz (4.4) die gewöhnliche Abwickelbarkeit von $\mathfrak{E}_0$ auf $\overline{\mathfrak{E}}_0$ aus; diese Eigenschaft adjungierter *Minimal*flächen hat Eisenhart a. a. O.[6]), S. 233 angegeben.

---

[24]) Vgl. Forsyth[9]), S. 312.

(Eingegangen am 25. August 1935.)

Über die partielle Differentialgleichung

$$f(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + g(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = h(x, y).$$

Von

E. Kamke in Tübingen.

---

1. In dieser Arbeit handelt es sich um den Bereich reeller Funktionen von reellen Veränderlichen. Das Ziel ist der folgende

Hauptsatz: *In dem Gebiet* $\mathfrak{G}$ *der* x, y*-Ebene seien die Funktionen* $f(x, y)$, $g(x, y)$, $h(x, y)$ *mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung versehen, weiter sei überall*

$$f^2 + g^2 > 0. \tag{1}$$

Dann gibt es in jedem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathfrak{g}$, *das total in* $\mathfrak{G}$ *liegt*[1]) *und in dem die Funktionen* f, g *beschränkt sind*[2]), *ein Integral* $I(x, y)$ *der partiellen Differentialgleichung*

$$f(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + g(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = h(x, y). \tag{2}$$

Ist die Gleichung homogen, d. h. $h \equiv 0$, *so besitzt sie ein Integral* $I(x, y)$, *für das überall in* $\mathfrak{g}$

$$I_x^2 + I_y^2 > 0 \tag{3}$$

ist, das also in $\mathfrak{g}$ *ein Hauptintegral*[3]) *ist.*

Zunächst einige Bemerkungen zu den Voraussetzungen. Ist die Differentialgleichung homogen und überdies $f \equiv 1$, so hat sie in jedem total in $\mathfrak{G}$ liegenden Teilgebiet $\mathfrak{g}$ ein Hauptintegral, auch dann, wenn $\mathfrak{g}$ nicht einfach zusammenhängt. Für das ganze ursprüngliche Gebiet $\mathfrak{G}$ gibt es aber, wie Herr Ważewski gezeigt hat, schon in diesem Sonderfall keineswegs immer ein Hauptintegral, selbst dann nicht immer, wenn $\mathfrak{G}$ einfach zusammenhängt[4]).

---

[1]) D. h. $\mathfrak{g}$ soll Teilgebiet von $\mathfrak{G}$ sein, aber keinen im Endlichen gelegenen Randpunkt mit $\mathfrak{G}$ gemein haben.

[2]) Ist $\mathfrak{g}$ beschränkt, so ist diese letzte Voraussetzung natürlich als Folge der Stetigkeit von f und g von selbst erfüllt.

[3]) Das ist eine Funktion $I(x, y)$, die stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat, die Differentialgleichung erfüllt und in keinem Teilgebiet konstant ist.

[4]) Für Literaturangaben siehe Kamke, Jahresber. d. Deutsch. Mathem.-Ver. 44 (1934), S. 156 ff.

Läßt man die Voraussetzung $f \equiv 1$ fallen, so ist die Existenz eines Hauptintegrals der homogenen Gleichung in $\mathfrak{g}$ nicht mehr gesichert, wenn in $\mathfrak{g}$ singuläre Stellen, d. h. Stellen vorkommen, an denen $f = g = 0$ ist[5]), oder wenn zwar stets (1) erfüllt ist, jedoch $\mathfrak{g}$ nicht einfach zusammenhängt[6]).

2. Hilfssatz 1: In dem Gebiet $\mathfrak{g}$ seien $f(x, y)$ und $g(x, y)$ mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung versehen, und es sei (1) erfüllt. Bekanntlich[7]) haben die charakteristischen Funktionen des Differentialgleichungssystems

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = g(x, y) \tag{4}$$

die spezielle Gestalt

$$x = \varphi(t - \tau, \xi, \eta), \qquad y = \psi(t - \tau, \xi, \eta); \tag{5}$$

sie liefern die für $t = \tau$ durch den Punkt ξ, η gehende Integralkurve von (4) in Parameterdarstellung und haben an jeder Stelle t, τ, ξ, η ihres Existenzbereiches stetige partielle Ableitungen erster Ordnung nach allen vier Veränderlichen.

Werden die partiellen Ableitungen nach den beiden letzten Argumenten mit φ_2, φ_3 und ψ_2, ψ_3 bezeichnet, so ist

$$\begin{cases} f(\xi,\eta)\,\varphi_2(t-\tau,\xi,\eta) + g(\xi,\eta)\,\varphi_3(t-\tau,\xi,\eta) = f(\varphi(t-\tau,\xi,\eta), \psi(\ldots)), \\ f(\xi,\eta)\,\psi_2(t-\tau,\xi,\eta) + g(\xi,\eta)\,\psi_3(t-\tau,\xi,\eta) = g(\varphi(t-\tau,\xi,\eta), \psi(\ldots)). \end{cases} \tag{6}$$

Ist $\mathfrak{g}$ einfach zusammenhängend, so ist bei festem τ, ξ, η die Kurve (4) doppelpunktsfrei und läuft in $\mathfrak{g}$ von Rand zu Rand.

Beweis: Wenn φ_τ die Ableitung nach τ bezeichnet, ist[8])

$$\varphi_\tau + f(\xi, \eta)\,\varphi_2 + g(\xi, \eta)\,\varphi_3 = 0.$$

Offenbar ist (der Strich bezeichnet die Ableitung nach t)

$$\varphi_\tau = -\varphi'(t - \tau, \xi, \eta) = -f(\varphi(t - \tau, \xi, \eta), \psi(\ldots)),$$

womit die erste der Gleichungen (6) bewiesen ist. Entsprechend ergibt sich die zweite Gleichung.

Wäre der letzte Teil der Behauptung nicht richtig, so gäbe es eine Kurve (5), die in $\mathfrak{g}$ „Grenzpunkte" hätte. Wegen (1) können nur reguläre Grenzpunkte vorkommen. Daher wäre nach Sätzen von

---

[5]) Vgl H. H. Alden, American Journal of Mathematics 56 (1934), insbes. S. 595 oben.

[6]) Beispiel: Man nehme bei dem in [5]) angegebenen Beispiel die singuläre Stelle aus dem Gebiet heraus.

[7]) Vgl. z. B. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. 199 und 155. Dieses Buch wird im folgenden als DG zitiert.

[8]) Vgl. z. B. Kamke, DG, S. 155.

Bendixson[9]) entweder die Kurve geschlossen oder hätte eine geschlossene Grenzcharakteristik. Wegen des einfachen Zusammenhangs von $\mathfrak{g}$ würde das Innere dieser geschlossenen Kurven zu $\mathfrak{g}$ gehören und müßte im Widerspruch zu (1) einen singulären Punkt enthalten.

3. Beginn des Beweises für den Hauptsatz. Es werde ein Gebiet $\mathfrak{g}$ gewählt, wie im Hauptsatz beschrieben. Dieses Gebiet bleibt weiterhin fest.

Zu der partiellen Differentialgleichung (2) gehören die charakteristischen Gleichungen

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = g(x, y), \qquad \frac{dz}{dt} = h(x, y). \tag{7}$$

Die beiden ersten Gleichungen können für sich gelöst werden.. Bei beliebigem ξ, η in $\mathfrak{g}$ sei

$$\mathfrak{c}: \qquad x = \varphi(t, \xi, \eta), \qquad y = \psi(t, \xi, \eta)$$

die Integralkurve der beiden ersten Gleichungen, die für $t = 0$ durch den Punkt ξ, η geht. Die Integralkurve werde nach beiden Seiten bis an den Rand von $\mathfrak{g}$ fortgesetzt. Nach Hilfssatz 1 ist das möglich, und die entstehende Kurve ist doppelpunktsfrei. Das volle System der Charakteristiken von (7) ist bei beliebigem ζ durch

$$\mathfrak{C}: \qquad x = \varphi(t, \xi, \eta), \qquad y = \psi(t, \xi, \eta), \qquad z = \chi(t, \xi, \eta, \zeta)$$

mit

$$\chi = \zeta + \int_0^t h(\varphi, \psi)\, dt \tag{8}$$

gegeben. Jede Kurve $\mathfrak{C}$ liegt senkrecht über einer Kurve $\mathfrak{c}$ der x, y-Ebene.

Ich betrachte nun eine „Transversalkurve" zu den Kurven $\mathfrak{c}$, d. h. eine in $\mathfrak{g}$ liegende Kurve

$$\mathfrak{s}: \qquad x = \Phi(T), \qquad y = \Psi(T), \qquad (\alpha < T < \beta),$$

bei der Φ und Ψ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben und

$$\Phi'^2 + \Psi'^2 > 0, \tag{9}$$

$$f(\Phi, \Psi)\, \Psi' - g(\Phi, \Psi)\, \Phi' \neq 0 \tag{10}$$

ist. Die Kurve $\mathfrak{s}$ wird wegen (10) von keiner der Kurven $\mathfrak{c}$ berührt und hat, wie hieraus weiter folgt, mit jeder Kurve $\mathfrak{c}$ höchstens einen Punkt gemein. Die Punkte der durch $\mathfrak{s}$ gehenden Kurven $\mathfrak{c}$ bilden ein offenes Gebiet $\mathfrak{o}(\mathfrak{s})$[10]).

---

[9]) Acta mathematica 24 (1901). Vgl. insbesondere die bei Kamke DG wiedergegebenen Sätze 6 und 7 auf S. 215 f. sowie Satz 10 auf S. 220.

[10]) Zum Beweise vgl. Kamke, Math. Annalen 99 (1928), S. 605.

Mit einer weiteren für $\alpha < T < \beta$ stetig differenzierbaren Funktion $X(T)$ bilde ich die Raumkurve

$$\mathfrak{S}: \qquad x = \Phi(T), \qquad y = \Psi(T), \qquad z = X(T)$$

und lege durch sämtliche Punkte von $\mathfrak{S}$ Charakteristiken $\mathfrak{C}$ hindurch. Über jedem Punkt ξ, η von $\mathfrak{o}(\mathfrak{s})$ liegt dann genau ein Punkt einer zu diesem Kurvenbündel gehörigen Charakteristik; die z-Koordinate dieses Kurvenpunktes wird mit $U(\xi, \eta)$ bezeichnet. Trifft die durch ξ, η gehende Kurve $\mathfrak{c}$ die Transversale $\mathfrak{s}$ im Punkt a, b, erreicht weiter die von a, b ausgehende Kurve $\mathfrak{c}$ den Punkt ξ, η für $t = r$, d. h. ist

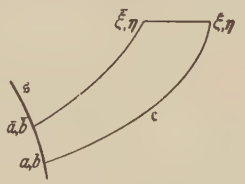

Fig. 1.

$$\xi = \varphi(r, a, b), \qquad \eta = \psi(r, a, b), \tag{11}$$

geht endlich die Transversale $\mathfrak{s}$ durch den Punkt a, b für $T = s$, d. h. ist

$$a = \Phi(s), \qquad b = \Psi(s), \tag{12}$$

so ist offenbar

$$U(\xi, \eta) = \chi(r, \Phi(s), \Psi(s), X(s)). \tag{13}$$

4. Hilfssatz 2: Diese in $\mathfrak{o}(\mathfrak{s})$ definierte Funktion $U(\xi, \eta)$ hat stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, und zwar ist

$$\begin{cases} U_\xi = -\frac{1}{N} g(\xi, \eta)\,[X'(s) + L] + \frac{h(\xi, \eta)}{N}\,[\Phi'(s)\,\psi_2 + \Psi'(s)\,\psi_3], \\ U_\eta = \frac{1}{N} f(\xi, \eta)\,[X'(s) + L] - \frac{h(\xi, \eta)}{N}\,[\Phi'(s)\,\varphi_2 + \Psi'(s)\,\varphi_3], \end{cases} \tag{14}$$

dabei sind in φ_ν, ψ_ν die Argumente r, a, b einzutragen, und es ist

$$N = [f(a, b)\Psi'(s) - g(a, b)\Phi'(s)]\,[\varphi_2\psi_3 - \varphi_3\psi_3] \tag{15}$$

(als Argumente sind wieder r, a, b in φ_ν, ψ_ν einzutragen),

$$L = \int_0^r \{h_1(\varphi, \psi)\,[\varphi_2\Phi'(s) + \varphi_3\Psi'(s)] + h_2(\varphi, \psi)\,[\psi_2\Phi'(s) + \psi_3\Psi'(s)]\}\,dt \tag{16}$$

(h_1, h_2 sind die partiellen Ableitungen von h, und in φ, ψ, φ_ν, ψ_ν sind t, a, b als Argumente einzutragen).

Beweis: Aus (13) ergibt sich, daß U nach ξ und η partiell differenzierbar ist, wenn r und s, als Funktionen von ξ und η betrachtet, nach diesen Größen partiell differenzierbar sind. Ich beweise zunächst die Differenzierbarkeit nach ξ. Für alle hinreichend nahe an ξ gelegenen Werte $\bar{\xi}$ gehört auch der Punkt $\bar{\xi}, \eta$ zu $\mathfrak{o}(\mathfrak{s})$. Die durch $\bar{\xi}, \eta$ gehende Kurve $\mathfrak{c}$ treffe $\mathfrak{s}$ im Punkt $\bar{a}, \bar{b}$; die von $\bar{a}, \bar{b}$ ausgehenden Kurve $\mathfrak{c}$ erreiche $\bar{\xi}, \eta$ für den Parameterwert $t = \bar{r}$; der Punkt $\bar{a}, \bar{b}$ werde auf $\mathfrak{s}$ für $T = \bar{s}$ erreicht. Es ist dann

$$\bar{\xi} = \varphi(\bar{r}, \Phi(\bar{s}), \Psi(\bar{s})), \qquad \eta = \psi(\bar{r}, \Phi(\bar{s}), \Psi(\bar{s})),$$

und aus (11) und (12) folgt

$$\xi = \varphi(r, \Phi(s), \Psi(s)), \qquad \eta = \psi(r, \Phi(s), \Psi(s)).$$

Durch Subtraktion und Anwendung des Mittelwertsatzes ergeben sich für gewisse Zahlen ϱ_ν zwischen r und $\bar{r}$ und für gewisse Zahlen σ_ν zwischen s und $\bar{s}$ die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\bar{\xi} - \xi &= (\bar{r} - r)\,\varphi'(\varrho_1, \Phi(\sigma_1), \Psi(\sigma_1)) \\
&\quad + (\bar{s} - s)\,[\Phi'(\sigma_1)\,\varphi_2(\varrho_1, \Phi(\sigma_1), \Psi(\sigma_1)) + \Psi'(\sigma_1)\,\varphi_3(\ldots)] \\
&= (\bar{r} - r)\,A_1 + (\bar{s} - s)\,B_1 \\
0 &= (\bar{r} - r)\,\psi'(\varrho_2, \Phi(\sigma_2), \Psi(\sigma_2)) \\
&\quad + (\bar{s} - s)\,[\Phi'(\sigma_2)\,\psi_2(\varrho_2, \Phi(\sigma_2), \Psi(\sigma_2)) + \Psi'(\sigma_2)\,\psi_3(\ldots)] \\
&= (\bar{r} - r)\,A_2 + (\bar{s} - s)\,B_2.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt, falls die Determinante $A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0$ ist.

$$(17) \qquad \frac{\bar{r} - r}{\bar{\xi} - \xi} = \frac{B_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}, \qquad \frac{\bar{s} - s}{\bar{\xi} - \xi} = -\frac{A_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}.$$

Für $\bar{\xi} \to \xi$ ist $\varrho_\nu \to r$ und $\sigma_\nu \to s$, also

$$\begin{aligned}
&B_2 \to \Phi'(s)\,\psi_2(r, a, b) + \Psi'(s)\,\psi_3(r, a, b), \\
&A_2 \to \psi'(r, a, b) = g(\xi, \eta), \\
&A_1 B_2 - A_2 B_1 \to f(\varphi, \psi)\,[\Phi'(s)\,\psi_2 + \Psi'(s)\,\psi_3] - g(\varphi, \psi)\,[\Phi'(s)\,\varphi_2 + \Psi'(s)\,\varphi_3],
\end{aligned}$$

wobei in φ, ψ als Argumente r, a, b einzutragen sind. Wendet man (6) auf die Faktoren f und g an, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
A_1 B_2 - A_2 B_1 &\to [f(a, b)\,\varphi_2 + g(a, b)\,\varphi_3]\,[\Phi'\,\psi_2 + \Psi'\,\psi_3] \\
&\quad - [f(a, b)\,\psi_2 + g(a, b)\,\psi_3]\,[\Phi'\,\varphi_2 + \Psi'\,\varphi_3] \\
&= N \neq 0,
\end{aligned}$$

da die erste Klammer von N nach Voraussetzung und die zweite nach einem bekannten Satz[11]) von Null verschieden ist. Daher ist in der Tat für alle hinreichend kleinen $|\bar{\xi} - \xi|$ der auf den rechten Seiten von (17) auftretende Nenner von Null verschieden, und aus (17) ergibt sich die Existenz der partiellen Ableitungen von r, s und für ihre Werte:

$$(18) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial \xi} = \dfrac{1}{N}\,[\Phi'(s)\,\psi_2(r, a, b) + \Psi'(s)\,\psi_3(r, a, b)], \\ \dfrac{\partial s}{\partial \xi} = -\dfrac{1}{N}\,g(\xi, \eta). \end{cases}$$

Entsprechend ergibt sich

$$(18\,a) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial \eta} = -\dfrac{1}{N}\,[\Phi'(s)\,\varphi_2(r, a, b) + \Psi'(s)\,\varphi_3(r, a, b)], \\ \dfrac{\partial s}{\partial \eta} = \dfrac{1}{N}\,f(\xi, \eta). \end{cases}$$

[11]) Siehe z. B. Kamke, DG, S. 155.

Hiermit folgt nun aus (13) und (8):

$$U_\xi=\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{X(s)+\int_0^\tau h\big(\varphi(t,\Phi(s),\Psi(s)),\psi(\ldots)\big)\,dt\right\}$$

und daher die erste Zeile von (14). In entsprechender Weise erhält man die zweite Zeile von (14). Aus den rechten Seiten von (14) folgt unmittelbar die Stetigkeit der partiellen Ableitungen.

5. Folgerungen aus Hilfssatz 2.

a) Die Funktion $U(\xi,\eta)$ ist (mit ξ,η statt x,y) ein Integral der partiellen Differentialgleichung (2) in dem Gebiet $\mathfrak{o}(\mathfrak{s})$.

Denn U hat stetige partielle Ableitungen, und durch jeden Punkt der Fläche $z=U$ geht eine auf dieser Fläche liegende Charakteristik von (2).

b) Für die homogene Gleichung (2), d. h. für den Fall $h\equiv 0$ folgt aus (14)

$$U_\xi^2+U_\eta^2=\frac{f^2(\xi,\eta)+g^2(\xi,\eta)}{N^2}X'^2(s)$$

also $\neq 0$, falls $X'\neq 0$ ist. In diesem Fall ist U in $\mathfrak{o}(\mathfrak{s})$ ein Hauptintegral der homogenen Differentialgleichung.

Für den Fall, daß die Transversalkurve eine orthogonale Trajektorie und X ihre Bogenlänge ist, ist dieses ein von Herrn Alden[12]) hergeleitetes Ergebnis.

c) Ist

$\bar{\mathfrak{s}}$: $\qquad x=\overline{\Phi}(T),\qquad y=\overline{\Psi}(T)$

eine für $T=u$ durch den Punkt ξ,η von $\mathfrak{o}(\mathfrak{s})$ gehende Transversale, so schneiden die auf dieser Transversalen errichteten Lote zur x,y-Ebene aus der Integralfläche U die Kurve

$\overline{\mathfrak{S}}$: $\qquad x=\overline{\Phi}(T),\qquad y=\overline{\Psi}(T),\qquad z=\overline{X}(T)=U\big(\overline{\Phi}(T),\overline{\Psi}(T)\big)$

aus. Offenbar ist auch $\overline{X}$ in einer Umgebung von u stetig differenzierbar, nämlich

$$\overline{X}'=\overline{\Phi}'U_\xi+\overline{\Psi}'U_\eta.$$

Daher gehört auch $\overline{\mathfrak{S}}$ zu den Kurven $\mathfrak{S}$.

Für den Fall der homogenen Gleichung ist

$$\overline{X}'=\frac{X'(s)}{N}\left[f(\xi,\eta)\,\overline{\Psi}'(u)-g(\xi,\eta)\,\overline{\Phi}'(u)\right]\neq 0,$$

wenn $X'(s)\neq 0$ ist. Ist die Integralfläche U durch eine Kurve $\mathfrak{S}$ mit $X'(T)\neq 0$ aufgebaut, so erzeugt also jede in $\mathfrak{o}(\mathfrak{s})$ verlaufende Transversale auf der Fläche eine Kurve $\mathfrak{S}$ mit der gleichen Eigenschaft.

---

[12]) A. a. O. [5]). Vgl. S. 611 unten.

6. Topologischer Teil des Beweises. Als Transversalen $\mathfrak{s}$ werden von jetzt an der Einfachheit halber orthogonale Trajektorien[13]) zu den Kurven $\mathfrak{c}$ genommen, und zwar die Lösungen $x = \Phi$, $y = \Psi$ der Differentialgleichungen $x' = g$, $y' = -f$. Dann geht durch jeden Punkt von $\mathfrak{g}$ genau eine Trajektorie. Durch jede Kurve $\mathfrak{c}$ wird ein offenes endliches Trajektorienstück $\mathfrak{s}$ gelegt, das einschließlich seiner Endpunkte einem in $\mathfrak{g}$ gelegenen offenen endlichen Trajektorienstück $\bar{\mathfrak{s}}$ angehört. Diese Trajektorienstücke bleiben weiterhin fest, und nur diese werden nunmehr mit $\mathfrak{s}$ bezeichnet. Jede Kurve $\mathfrak{c}$ gehört damit mindestens einem der Gebiete $\mathfrak{o}(\mathfrak{s})$ an. Das Gebiet $\mathfrak{g}$ läßt sich aus diesen Gebieten aufbauen, und zwar gelten folgende Tatsachen, deren Beweise durch geringe Abänderungen aus einer früheren Arbeit[14]) von mir zu entnehmen sind.

a) Ist PQ ein ganz zu $\mathfrak{g}$ gehöriges Stück einer Trajektorie $\mathfrak{s}^*$ und gehören P und Q zu $\mathfrak{o}(\mathfrak{s})$, so gehört das ganze Trajektorienstück PQ zu $\mathfrak{o}(\mathfrak{s})$.

b) Es gibt eine Folge von Trajektorienstücken $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \ldots$ mit den Eigenschaften:

α) jedes $\mathfrak{s}_n$ gehört einschließlich seiner Endpunkte einem in $\mathfrak{g}$ gelegenen offenen Trajektorienstück $\bar{\mathfrak{s}}_n$ an;

β) $\mathfrak{o}(\mathfrak{s}_1) + \mathfrak{o}(\mathfrak{s}_2) + \ldots = \mathfrak{g}$;

γ) kein $\mathfrak{o}(\mathfrak{s}_n)$ ist in $\mathfrak{g}_{n-1} = \mathfrak{o}(\mathfrak{s}_1) + \ldots + \mathfrak{o}(\mathfrak{s}_n)$ enthalten;

δ) jedes $\mathfrak{o}(\mathfrak{s}_n)$ hat mit $\mathfrak{g}_{n-1}$ mindestens einen Punkt gemein.

c) Jedes $\mathfrak{g}_n$ ist ein offenes Gebiet.

d) Ist PQ ein ganz zu $\mathfrak{g}$ gehöriges Stück einer Trajektorie $\mathfrak{o}(\mathfrak{s}^*)$ und gehören P und Q zu $\mathfrak{g}_n$, so gehört das ganze Trajektorienstück PQ zu $\mathfrak{g}_n$.

e) Es gibt eine Folge von endlichen, offenen Trajektorienstücken $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \ldots$ mit den Eigenschaften:

α) jedes $\mathfrak{t}_n$ gehört einschließlich seiner Endpunkte einem in $\mathfrak{g}$ gelegenen offenen Trajektorienstück $\bar{\mathfrak{t}}_n$ an;

β) $\mathfrak{o}(\mathfrak{t}_1) + \mathfrak{o}(\mathfrak{t}_2) + \ldots = \mathfrak{g}$;

γ) jedes $\mathfrak{h}_n = \mathfrak{o}(\mathfrak{t}_1) + \ldots + \mathfrak{o}(\mathfrak{t}_n)$ ist ein offenes Gebiet;

δ) die gemeinsamen Punkte von $\mathfrak{t}_n$ und $\mathfrak{h}_{n-1}$ bilden genau ein offenes Stück einer Trajektorie, und $\mathfrak{t}_n$ ragt mit genau einem Ende über $\mathfrak{h}_{n-1}$ hinaus.

---

[13]) Man könnte auch die bisherigen Transversalen beibehalten und müßte z. B. nur dafür sorgen, daß durch jeden Punkt genau eine Transversale geht.

[14]) Mathem. Annalen 99 (1928), S. 605 ff.

7. Abschluß des Beweises. Die Trajektorie $\bar{t}_n$ sei

$\bar{t}_n$: $\quad x = \Phi_n(T), \qquad y = \Psi_n(T) \qquad (\alpha_n < T < \beta_n).$

$X_n(T)$ besitze für $\alpha_n < T < \beta_n$ eine stetige, von Null verschiedene Ableitung. Die hierdurch für $\mathfrak{o}(t_n)$ definierte Funktion $U(\xi, \eta)$ sei jetzt mit $U_n(X_n; \xi, \eta)$ bezeichnet.

$I(\xi, \eta) = U_1(X_1; \xi, \eta)$ erfüllt den Hauptsatz sicher in $\mathfrak{h}_1$ statt $\mathfrak{g}$. Um die Existenz der in dem Hauptsatz vorkommenden Funktion I für das ganze Gebiet $\mathfrak{g}$ zu beweisen, nehme ich an, es sei schon für $\mathfrak{h}_{n-1}$ $(n \geqq 2)$ eine Funktion $I(\xi, \eta)$ mit folgenden Eigenschaften konstruiert:

a) für $\nu \leqq n-1$ gibt es Zahlen α_ν, β_ν, so daß

$$I(\xi, \eta) = U(\alpha_\nu + \beta_\nu X_\nu; \xi, \eta)$$

in $\mathfrak{h}_\nu - \mathfrak{h}_{\nu-1}$ und im Fall der homogenen Gleichung $\beta_\nu \neq 0$ ist;

b) $I(\xi, \eta)$ erfüllt in $\mathfrak{h}_{n-1}$ statt $\mathfrak{g}$ (und mit ξ, η statt x, y) den Hauptsatz.

Wegen Nr. 6e ist der Satz vollständig bewiesen, wenn ich zeigen kann, daß a) und b) auch mit n statt $n-1$ gelten.

Nach Nr. 6e, δ ragt t_n mit genau einem Ende über $\mathfrak{h}_{n-1}$ hinaus. Die Endpunkte des halboffenen, über $\mathfrak{h}_{n-1}$ hinausragenden Teils von t_n seien $A_n(a_n, b_n)$ und B_n, und zwar sei A_n Randpunkt von $\mathfrak{h}_{n-1}$. Das andere, offene Stück von t_n gehört bis zu einem Punkt C_n ganz zu $\mathfrak{h}_{n-1}$.

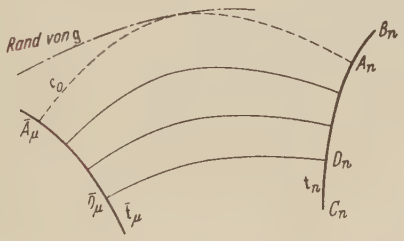

Fig. 2.

Dieses Stück hat nach Nr. 6a mit jedem der Gebiete $\mathfrak{o}(t_1), \ldots, \mathfrak{o}(t_{n-1})$, wenn überhaupt Punkte, so genau ein offenes Stück gemein. Daher gibt es ein kleinstes μ $(1 \leqq \mu < n)$, so daß für einen auf $A_n C_n$ gelegenen Punkt D_n das Trajektorienstück $A_n D_n$ ganz zu $\mathfrak{o}(t_\mu)$ und zu $\mathfrak{h}_\mu - \mathfrak{h}_{\mu-1}$ gehört. Die durch das offene Trajektorienstück $A_n D_n$ gehenden Kurven $\mathfrak{c}$ treffen also sämtlich t_μ und schneiden aus t_μ ein offenes Stück $\bar{A}_\mu \bar{D}_\mu$ aus.

Ich behaupte, daß die von $\bar{A}_\mu = \bar{A}_\mu(\bar{a}_\mu, \bar{b}_\mu)$ ausgehende Kurve

c_0: $\quad x = \varphi(t, \bar{a}_\mu, \bar{b}_\mu), \qquad y = \psi(t, \bar{a}_\mu, \bar{b}_\mu),$

den Punkt A_n enthält. Bei diesem Teil des Beweises wird benutzt, daß $\mathfrak{g}$ total in $\mathfrak{G}$ liegt und die Funktionen f und g in $\mathfrak{g}$ beschränkt sind.

Es bezeichne $\hat{\mathfrak{t}}_n$ das Trajektorienstück $\mathfrak{t}_n$ einschließlich seiner Endpunkte. Ich will zunächst zeigen, daß $\mathfrak{c}_0$ dieses Stück $\hat{\mathfrak{t}}_n$ trifft. Um die Ausdrucksweise zu erleichtern, will ich annehmen, daß die von den Punkten $A(a, b)$ des offenen Trajektorienstücks $\overline{A}_\mu \overline{D}_\mu$ ausgehenden Kurven $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}(A)$ für *positive* Parameterwerte $t = q(A)$ nach $\mathfrak{t}_n$ gelangen. Wird $\mathfrak{c}_0$ in $\mathfrak{G}$ (nicht in $\mathfrak{g}$) nach beiden Seiten möglichst weit fortgesetzt, so möge sich als genauer Definitionsbereich $\tau_1 < t < \tau_2$ ergeben. Ist $\tau_2 < +\infty$, so entfernt sich $\mathfrak{c}_0$ für $0 \leqq t < \tau_2$ beliebig weit vom Punkt 0, 0 oder bleibt beschränkt, gelangt aber beliebig nahe an den Rand von $\mathfrak{G}$. Denn sonst läge dieses Stück von $\mathfrak{c}_0$ in einer beschränkten abgeschlossenen Teilmenge von $\mathfrak{G}$ und könnte[15]) bis $t = \tau_2$ und noch über τ_2 hinaus fortgesetzt werden, entgegen der Bedeutung von τ_2.

Angenommen nun, $\mathfrak{c}_0$ hätte für $0 \leqq t < \tau_2$ keinen gemeinsamen Punkt mit $\hat{\mathfrak{t}}_n$. Dann könnte man folgendermaßen schließen:

Entweder ist $\tau_2 = +\infty$. Dann hätte für jedes endliche $\tau > 0$ das durch $0 \leqq t \leqq \tau$ bestimmte Stück $\mathfrak{c}_0^*$ der Kurve $\mathfrak{c}_0$ einen positiven Abstand δ von $\hat{\mathfrak{t}}_n$. Für alle zwischen $\overline{A}_\mu$ und $\overline{D}_\mu$, hinreichend nahe an $\overline{A}_\mu$ gelegenen A läge das durch $0 \leqq t \leqq \tau$ bestimmte Stück von $\mathfrak{c}(A)$ in der $\frac{1}{2}\delta$-Umgebung von $\mathfrak{c}_0^*$, träfe also $\hat{\mathfrak{t}}_n$ nicht. Da das für *jedes* $\tau > 0$ gilt, träfe entgegen unserer Voraussetzung kein $\mathfrak{c}(A)$ die Trajektorie $\mathfrak{t}_n$ für ein positives t.

Oder es ist $\tau_2 < +\infty$. Nach der vorangeschickten Bemerkung entfernt sich dann $\mathfrak{c}_0$ für $0 \leqq t < \tau_2$ beliebig weit vom Nullpunkt oder bleibt beschränkt, aber kommt dabei beliebig nahe an den Rand von $\mathfrak{G}$.

Im ersten Fall könnte man ähnlich wie bei $\tau_2 = +\infty$ schließen (man wähle τ beliebig zwischen 0 und τ_2), daß auch $\mathfrak{c}(A)$ für alle hinreichend nahe an $\overline{A}_\mu$ gelegenen Punkte A und für $0 \leqq t < \operatorname{Min}(q(A), \tau_2)$ sich beliebig weit vom Nullpunkt entfernen müßte, ohne zuvor $\mathfrak{t}_n$ getroffen zu haben, also sicher, ohne $\mathfrak{g}$ verlassen zu haben. Da aber f und g in $\mathfrak{g}$ beschränkt sind, ist

$$\varphi(t, a, b) = \int_0^t f(\varphi, \psi)\, dt$$

und ebenso ψ für $0 \leqq t < \operatorname{Min}(q(A), \tau_2)$ beschränkt. Dieser Fall kann also tatsächlich nicht vorliegen.

Im zweiten Fall gäbe es mindestens einen Randpunkt R von $\mathfrak{G}$, dem $\mathfrak{c}_0$ für $t > 0$ beliebig nahe kommt. Da $\mathfrak{g}$ total in $\mathfrak{G}$ liegt, hat R von $\mathfrak{g}$ einen positiven Abstand ε_1. Ist $\tau > 0$ ein Parameterwert, für den $\mathfrak{c}_0$ einen Punkt der $\frac{1}{2}\varepsilon_1$-Umgebung von R erreicht, hat weiter das durch $0 \leqq t \leqq \tau$ bestimmte Stück $\mathfrak{c}_0^*$ der Kurve $\mathfrak{c}_0$ den Abstand ε_2 von $\hat{\mathfrak{t}}_n$ und

[15]) Näher ausgeführt ist der Schluß z. B. bei Kamke, DG., S. 135.

ist $\varepsilon = \text{Min}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, so gehört $\mathfrak{c}(A)$ für alle hinreichend nahe an $\bar{A}_\mu$ gelegenen A und $0 \leqq t \leqq \tau$ der $\frac{1}{2}\varepsilon$-Umgebung von $\mathfrak{c}_0^*$ an, müßte also für $t > 0$ das Gebiet $\mathfrak{g}$ verlassen, ohne zuvor $\mathfrak{t}_n$ getroffen zu haben. Damit ist auch hier der gewünschte Widerspruch erreicht.

Es ist also gezeigt, daß $\mathfrak{c}_0$ die Trajektorie $\hat{\mathfrak{t}}_n$ trifft. Daraus folgt aber durch Stetigkeitsbetrachtungen, daß $\mathfrak{c}_0$ durch den Punkt A_n geht.

Indem man die Punkte der zwischen $\bar{\mathfrak{t}}_\mu$ und $\mathfrak{t}_n$ verlaufenden und hinreichend nahe an $\mathfrak{c}_0$ gelegenen Kurvenstücke $\mathfrak{c}$ zu $\mathfrak{g}$ hinzunimmt, kann man $\mathfrak{g}$ zu einem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathfrak{g}$ erweitern, welches das zwischen $\bar{\mathfrak{t}}_\mu$ und $\mathfrak{t}_n$ liegende Stück von $\mathfrak{c}_0$ enthält. Dann ist U_μ für alle Punkte dieses Kurvenstücks und insbesondere für den Punkt A_n definiert. Ich kann daher setzen:

$$\beta_n = \frac{U'_\mu(\alpha_\mu + \beta_\mu X_\mu; a_n, b_n)}{X'_n(s_n)}, \tag{19}$$

wobei U'_u die Ableitung von U_μ längs $\mathfrak{t}_n$ und s_n den Parameterwert bedeuten soll, für den $\mathfrak{t}_n$ durch A_n geht; ferner

$$\alpha_n = U_\mu(\alpha_\mu + \beta_\mu X_\mu; a_n, b_n) - \beta_n X_n(s_n), \tag{20}$$

$$I(\xi, \eta) = U_n(\alpha_n + \beta_n X_n; \xi, \eta) \quad \text{in } \mathfrak{h}_n - \mathfrak{h}_{n-1}. \tag{21}$$

Da im Falle der homogenen Gleichung wegen $\beta_\mu \neq 0$, $X'_\mu \neq 0$ nach Nr. 5c $U'_u \neq 0$ ist, ist a) mit n statt $n-1$ richtig. Es ist also nur noch zu beweisen, daß I in $\mathfrak{h}_n$ stetige partielle Ableitungen hat, die (2) und eventuell (3) erfüllen. Für die Punkte von $\mathfrak{h}_{n-1}$ und die inneren Punkte von $\mathfrak{h}_n - \mathfrak{h}_{n-1}$ trifft das teils nach der Annahme b), teils wegen (21) nach Nr. 4 und 5 zu. Die zu $\mathfrak{h}_n - \mathfrak{h}_{n-1}$ gehörigen Randpunkte von $\mathfrak{h}_n - \mathfrak{h}_{n-1}$ werden von der durch A_n und $\bar{A}_\mu$ gehenden Kurve $\mathfrak{c}_0$ gebildet, soweit sie in $\mathfrak{g}$ liegt. Nur mit den Punkten dieser Kurve habe ich mich noch zu beschäftigen.

Jede der Funktionen

$$U_n(\alpha_n + \beta_n X_n;\ \xi, \eta) \quad \text{in } \mathfrak{o}(\mathfrak{t}_n). \tag{22}$$

$$U_\mu(\alpha_\mu + \beta_\mu X_\mu;\ \xi, \eta) \quad \text{in } \mathfrak{o}(\bar{\mathfrak{t}}_\mu), \tag{23}$$

ist nach der obigen Erweiterung von $\mathfrak{g}$ in einem Gebiet definiert, welches das zwischen $\bar{\mathfrak{t}}_\mu$ und $\mathfrak{t}_n$ verlaufende Stück von $\mathfrak{c}_0$ enthält, und besitzt dort stetige partielle Ableitungen, die (2) und eventuell (3) erfüllen. Im Punkt A_n haben die Funktionen die wegen (20) übereinstimmenden Werte

$$\alpha_n + \beta_n X_n(s_n) \quad \text{und} \quad U_\mu(\alpha_\mu + \beta_\mu X_\mu;\ a_n, b_n).$$

Da die Funktionen (22) und (23) aus Charakteristiken aufgebaut sind, haben sie die ganze durch $a_n, b_n, \alpha_n + \beta_n X_n(s_n)$ gehende Charakteristik gemeinsam, d. h. stimmen längs $\mathfrak{c}_0$ überein. Da (22) und (23) in ihren

Definitionsbereichen stetig sind, entsteht wieder eine stetige Funktion, wenn man sie auf der einen Seite von $\mathfrak{c}_0$ durch (22) und auf der anderen Seite durch (23) definiert, d. h. I ist innerhalb $\mathfrak{h}_n$ auch in den Punkten von $\mathfrak{c}_0$ stetig.

Weiter sind die von (22) und (23) längs $\mathfrak{t}_n$ an der Stelle A_n gebildeten Ableitungen

$$\beta_n X_n'(s_n) \quad \text{und} \quad U_\mu'(\alpha_\mu+\beta_\mu X_\mu;\ a_n, b_n);$$

beide stimmen wegen (19) überein. Nach Nr. 4, (14) hängen die partiellen Ableitungen einer Funktion U, abgesehen von den Koeffizienten der partiellen Differentialgleichung, nur ab von dem betrachteten Punkt ξ, η, von dem Punkt $A\,(a, b)$, in welchem die erzeugende Trajektorie $\mathfrak{s}$ die durch ξ, η gehende Kurve $\mathfrak{c}$ trifft, von dem Parameterwert r, für den der Punkt ξ, η von A aus auf $\mathfrak{c}$ erreicht wird, und schließlich von der durch Φ', Ψ', X' an der Stelle A bestimmten Richtung der Kurve $\mathfrak{S}$. Daß diese Richtungen bei (22) und (23) für $A = A_n$ übereinstimmen, ist eben gezeigt. Die übrigen Größen stimmen bei gegebenem ξ, η auf $\mathfrak{c}_0$ offenbar ebenfalls überein. Daher haben (22) und (23) in den zu $\bar{\mathfrak{g}}$ gehörigen Punkten von $\mathfrak{c}_0$ übereinstimmende partielle Ableitungen, und diese erfüllen (2) und, falls eine homogene Gleichung vorliegt, auch (3). Wie vorhin schließt man daraus, daß I in $\mathfrak{h}_n$ die Eigenschaft b) besitzt. Damit ist aber der Hauptsatz bewiesen.

8. Einige weitere Differentialgleichungen. Der Hauptsatz kann, soweit er unhomogene Gleichungen betrifft, folgendermaßen verallgemeinert werden:

Für $u_1 < u < u_2$ ($u_1 = -\infty$, $u_2 = +\infty$ zugelassen) durchlaufe $\lambda(u)$ den Bereich aller reellen Zahlen und habe eine stetige und von Null verschiedene Ableitung. Dann besitzt die Differentialgleichung

$$f(x, y)\frac{\partial z}{\partial x}+g(x, y)\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{h(x, y)}{\lambda'(z)} \tag{23}$$

unter den Voraussetzungen des Hauptsatzes in $\mathfrak{g}$ ein Integral.

Denn die Gleichung (2) besitzt in $\mathfrak{g}$ ein Integral $\bar{z}(x, y)$. Die Gleichung $\lambda(z) = \bar{z}(x, y)$ ist eindeutig nach z auflösbar, und die Lösung $z(x, y)$ hat in $\mathfrak{g}$ stetige partielle Ableitungen. Endlich ist für diese Funktion

$$f\frac{\partial z}{\partial x}+g\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f}{\lambda'}\cdot\lambda'\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{g}{\lambda'}\lambda'\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f}{\lambda'}\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}+\frac{g}{\lambda'}\frac{\partial \bar{z}}{\partial y}=\frac{h}{\lambda'}.$$

Für $\lambda(u) = u$ ist (23) wieder die Gleichung (2). Zulässige andere Wahlen von $\lambda(u)$ sind z. B. $\log u$, $\operatorname{tg} u$, $\operatorname{ctg} u$; man erhält damit Existenzsätze für (2) mit $z \cdot h$, $\cos^2 z \cdot h$, $-\sin^2 z \cdot h$ statt h auf der rechten Seite.

(Eingegangen am 7. September 1935.)

Über einige reihentheoretische Sätze.

Von

J. Karamata in Beograd.

1°. Als Verallgemeinerung des Knoppschen Satzes:

Satz 1. *Zur Konvergenz der Reihe* Σu_n *ist notwendig und hinreichend, daß*

$$\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu p_\nu = o(p_n), \quad n \to \infty, \tag{1}$$

für jede p-Folge:

$$0 < p_{n-1} \leqq p_n \to \infty, \quad n \to \infty, \text{ sei,}$$

bewies ich in der Note: „Über einen Konvergenzsatz des Herrn Knopp“ [1]) den folgenden

Satz 2. *Für eine gegebene p-Folge ist* (1) *äquivalent mit*

$$\sum_{\nu=n+1}^{n'+1} u_\nu \to 0 \text{ für jedes } n': \ p_n \leqq p_{n'} \leqq \lambda p_n, \text{ und ein } \lambda > 1, \ n \to \infty. \tag{2}$$

Für die erste Hälfte dieses Satzes, d. h., daß (2) aus (1) folgt, gab ich in Fußnote [2]) der genannten Note einen direkten, von Knopp herrührenden Beweis [2]). Die zweite Hälfte dieses Satzes bewies ich aber durch einen Umweg über Integrale; ich stützte mich dabei auf einen Satz, dessen Beweis verhältnismäßig lang ist und den ich dort nicht wiedergegeben habe. Da sich aber auch dieser Teil des Satzes 2 direkt und zwar sehr einfach beweisen läßt, so möchte ich hier zuerst diesen

[1]) Math. Zeitschr. **40** (1935), S. 421—425.

[2]) Durch Versehen steht in der Bedingung (2) der zitierten Note $\sum_{\nu=n+1}^{n'}$ statt $\sum_{\nu=n+1}^{n'+1}$. Um es aber in dem genannten Beweise richtig zu stellen, braucht nur die letzte Zeile der Seite 421 durch

$$\sum_{\nu=n+1}^{n'+1} u_\nu = \sum_{\nu=n+1}^{n'} \frac{p_{\nu+1} - p_\nu}{p_{\nu+1}} \delta_\nu - \frac{p_n}{p_{n+1}} \delta_n + \delta_{n'+1}$$

ersetzt zu werden.

Beweis ausführen[3]). Anknüpfend daran werde ich in 2^0 und 3^0 noch einige weitere Sätze angeben, die demselben Ideenkreise gehören.

Ohne die geringste Änderung des Beweises kann man der zweiten Hälfte des Satzes 2 sogar die etwas allgemeinere Fassung geben:

Satz 3. *Sei* $s_n = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu$, $N(x)$ *die Anzahlfunktion einer p-Folge,* $\lambda > 1$ *und* $m = N(p_n/\lambda)$, *d. h.* $p_m \leqq \frac{1}{\lambda} p_n < p_{m+1}$.

Ist für eine gegebene p-Folge

$$\limsup_{n=\infty} \operatorname{Max}_{m \leqq n' < n} \{s_n - s_{n'}\} \leqq 0 \quad (3)$$

[4]),

so ist auch

$$\limsup_{n=\infty} \frac{1}{p_n} \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu u_\nu \leqq 0. \quad (4)$$

Beweis. Sei

$$w_n = \operatorname{Max}_{k \leqq \nu < n} \{s_n - s_\nu\} \text{ und } \delta_n = \frac{1}{p_n} \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu u_\nu$$

gesetzt, dann folgt aus

$$\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu u_\nu = \sum_{\nu=1}^{k} p_\nu u_\nu + p_{k+1}(s_n - s_k) + \sum_{\nu=k+1}^{n} (p_{\nu+1} - p_\nu)(s_n - s_\nu)$$

die Ungleichung

$$\delta_n \leqq \frac{p_k}{p_n} \delta_k + w_n. \quad (5)$$

---

[3]) Es soll aber bemerkt werden, daß in der genannten Note die zweite Hälfte des Satzes 2 unter der Bedingung

$$\sum_{\nu=n+1}^{N(\lambda p_n)+1} u_\nu \to 0, \text{ für jedes } 1 < \lambda < \lambda_0,$$

wo $N(x)$ die Anzahlfunktion der Folge p_n ist, bewiesen wurde. Der Beweis ist eben dadurch verlängert, daß diese Bedingung scheinbar weniger über Σu_n voraussetzt als die Bedingung (2).

[4]) Diese Bedingung ist mit der der Voraussetzung (2) entsprechenden Bedingung

$$\limsup_{n=\infty} \operatorname{Max}_{p_n \leqq p_{n'} \leqq \lambda p_n} \{s_{n'+1} - s_n\} \leqq 0$$

äquivalent, da einerseits

$$\operatorname{Max}_{p_n \leqq p_{n'} \leqq \lambda p_n} \{s_{n'+1} - s_n\} = s_{n_0+1} - s_n = (s_{n_0} - s_n) + (s_{n_0+1} - s_{n_0}) \leqq \operatorname{Max}_{\frac{1}{\lambda} p_{n_0} \leqq p_{n'} \leqq p_{n_0}} \{s_{n_0} - s_{n'}\} + (s_{n_0+1} - s_{n_0})$$

ist, und andererseits

$$\operatorname{Max}_{\frac{1}{\lambda} p_n \leqq p_{n'} \leqq p_n} \{s_n - s_{n'-1}\} = s_n - s_{n_0-1} = (s_n - s_{n_0}) + (s_{n_0} - s_{n_0-1}) \leqq \operatorname{Max}_{p_{n_0} \leqq p_{n'} \leqq \lambda p_{n_0}} \{s_{n'} - s_{n_0}\} + (s_{n_0} - s_{n_0-1})$$

ist.

Wird nun $k = m = N(p_n/\lambda)$ gesetzt, so ist nach der Voraussetzung (3)

$$\limsup_{n \to \infty} w_n \leqq 0.$$

Wäre $\limsup_{n=\infty} \delta_n = \infty$, so könnte man eine Teilfolge δ_{n_ν} derart auswählen, daß $\delta_{n_\nu} \to \infty$, $\nu \to \infty$, und daß $\delta_n \leqq \delta_{n_\nu}$ für jedes $n \leqq n_\nu$ sei.

Aus (5) folgt aber

$$1 \leqq \limsup_{n=\infty} \frac{w_{n_\nu}}{\delta_{n_\nu}} + \limsup_{n=\infty} \frac{p_m}{p_{n_\nu}} \frac{\delta_m}{\delta_{n_\nu}} \leqq \frac{1}{\lambda} < 1,$$

was $\limsup_{n=\infty} \delta_n = \infty$ wiederspricht[5]).

Sei also

$$\limsup_{n=\infty} \delta_n = L,$$

dann folgt aus (5)

$$L \leqq \limsup_{n=\infty} \frac{p_m}{p_n} \delta_m \leqq \frac{1}{\lambda} L,$$

was nur für $L \leqq 0$ widerspruchslos ist, und woraus sich die Behauptung (4) ergibt.

Die erste Hälfte des Satzes 2 kann aber nicht dem Satze 3 entsprechend erweitert werden, d. h. die Bedingungen (3) und (4) sind untereinander nicht äquivalent. Dies geht unmittelbar aus dem Spezialfall

$$\delta_n = \{(-1)^n - 1\} p_{n+1}$$

hervor, da in diesem Falle $\limsup_{n=\infty} \delta_n = 0$ aber schon

$$\limsup_{n=\infty} u_n = \limsup_{n=\infty} [\{(-1)^n - 1\} p_{n+1} - \{(-1)^{n-1} - 1\} p_{n-1}] = \infty$$

ist, also ist um so mehr $\limsup_{n=\infty} w_n = \infty$.

2°. Durch Betrachtung des Ausdrucks

$$\delta_n = \frac{1}{p_n} \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu u_\nu$$

kann auf die Konvergenz der Reihe Σu_n auch dann geschlossen werden, falls δ_n für eine gegebene p-Folge genügend schnell gegen Null strebt. So folgt z. B. die Konvergenz der Reihe Σu_n falls

$$\delta_n = O(1/p_n), \quad n \to \infty,$$

oder sogar falls

$$\delta_n = O\{g(p_n)\}, \quad n \to \infty, \tag{6}$$

---

[5]) Aus (5) folgt sogar, daß

$$\delta_n \leqq \frac{\lambda}{\lambda - 1} \operatorname{Max}_{1 \leqq n \leqq \infty} w_n$$

ist für jedes n.

wo $tg(t)$ nicht abnimmt und $\int_c^\infty \frac{g(t)}{t}\,dt$ konvergiert[6]).

Eine verhältnismäßig allgemeine Fassung solcher Sätze ist die folgende:

Satz 4. *Sei für eine gegebene p-Folge* $\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu U_\nu > 0$, *dann folgt aus*

$$\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu u_\nu = O\Big(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu U_\nu\Big), \quad n \to \infty,$$

und der Konvergenz der Reihe ΣU_n *die Konvergenz der Reihe* Σu_n.

Ohne die Konvergenz in Betracht zu ziehen, kann man Sätze herleiten, welche sich zu diesen Sätzen ebenso verhalten, wie der Satz 2 zum Satz 1. So kann man z. B. in der Voraussetzung und der Behauptung des Satzes 2 die asymptotische Relation „$\to 0$" durch „$= o(q_n)$" oder auch durch „$= O(q_n)$" ersetzen und den folgenden Satz herleiten:

Satz 5. *Sei* $N(x)$ *die Anzahlfunktion einer gegebenen p-Folge und*

$$0 < q_{n'} \leqq \lambda' q_n \quad \text{für} \quad N(p_n/\lambda) \leqq n' < n.$$

a) *Aus*

$$\delta_n = \frac{1}{p_n} \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu u_\nu = O(q_n) \quad bzw. \quad = o(q_n) \tag{7}$$

folgt

$$\sum_{\nu=n'+1}^{n} u_\nu = s_n - s_{n'} = O(q_n) \quad bzw. \quad = o(q_n), \quad \text{für} \quad N(p_n/\lambda) \leqq n' < n. \tag{8}$$

b) *Falls* $\lambda' < \lambda$ *ist, so folgt auch umgekehrt* (7) *aus* (8), *sogar auch dann, wenn überall „=" durch „<" ersetzt wird.*

Beweis. a) Nach der Abelschen partiellen Summation ist

$$\sum_{\nu=n'+1}^{n} u_\nu = \sum_{\nu=n'+1}^{n} \frac{p_{\nu+1}-p_\nu}{p_{\nu+1}}\,\delta_\nu - \frac{p_{n'}}{p_{n'+1}}\,\delta_{n'} + \frac{p_n}{p_{n+1}}\,\delta_n$$

$$= \sum_{\nu=n'}^{n-1} \frac{p_{\nu+1}-p_\nu}{p_{\nu+1}}\,\delta_\nu + \delta_n - \delta_{n'}.$$

---

[6]) Diese Sätze, wie auch den nachstehenden Satz 4 gab ich in der Note: „Sommabilité et convergence", „Glas" de l'Acad. Serbe CXLVI (72), (1930), S. 66—67. Daß z. B. aus (6) die Konvergenz der Reihe Σu_n folgt, geht hervor aus dem dort bewiesenen Satz 3: „*Für eine gegebene p-Folge folgt aus* $\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu u_\nu = O\left(\frac{p_n p_{n+1}}{p_{n+1}-p_n} U_n\right)$, $U_n = o\left(\frac{p_{n+1}-p_n}{p_{n+1}}\right)$ *und aus der Konvergenz der Reihe* ΣU_n *die Konvergenz der Reihe* Σu_n", indem $U_n = \frac{p_{n+1}-p_n}{p_{n+1}}\,g(p_n)$ gesetzt wird. — Konvergenzkriterien dieser Form gab schon A. Pringsheim in der Note „Zur Theorie der Dirichletschen Reihen", Math. Annalen 37 (1890), S. 38—60. So ist z. B. das Konvergenzkriterium des Satzes I (S. 41) dieser Note in etwas geänderter Schreibweise ein Spezialfall von (6) mit $g(t) = t^{-\varepsilon} \log^\alpha t$, $\varepsilon > 0$, α beliebig.

Wird diese Gleichung durch q_n dividiert,

$$\frac{1}{q_n}(s_n - s_{n'}) = \sum_{\nu=n'}^{n-1} \frac{q_\nu}{q_n} \frac{p_{\nu+1} - p_\nu}{p_{\nu+1}} \frac{\delta_\nu}{q_\nu} + \frac{\delta_n}{q_n} - \frac{q_{n'}}{q_n} \frac{\delta_{n'}}{q_{n'}},$$

so ergibt sich, wegen $\frac{p_{\nu+1} - p_\nu}{p_{\nu+1}} \leqq \log \frac{p_{\nu+1}}{p_\nu}$, daß

$$\frac{1}{q_n} |s_n - s_{n'}| \leqq \{\lambda' \log (p_n/p_{n'}) + \lambda' + 1\} \max_{N(p_n/\lambda) \leqq \nu \leqq n} \frac{|\delta_n|}{q_\nu} \tag{9}$$

$$\leqq \{\lambda' \log \lambda + \lambda' + 1\} \max_{N(p_n/\lambda) \leqq \nu \leqq n} \frac{|\delta_n|}{q_\nu}$$

ist, woraus sich die beiden Behauptungen (8) ergeben.

b) Die Ungleichung (5) durch q_n dividiert gibt

$$\frac{\delta_n}{q_n} \leqq \frac{w_n}{q_n} + \frac{q_k}{q_n} \frac{p_k}{p_n} \frac{\delta_k}{q_k},$$

woraus, wie beim Beweise des Satzes 3, erstens folgt, daß

$$\delta_n < O(q_n)$$

ist, und zweitens, daß

$$\limsup_{n=\infty} \frac{\delta_n}{q_n} \leqq \frac{\lambda}{\lambda - \lambda'} \limsup_{n=\infty} \frac{w_n}{q_n}$$

ist, was gleichzeitig die beiden Behauptungen (7) liefert.

Möchte man jetzt von diesem Satz zu dem oben angeführten Konvergenzsatz zurückkehren, so müßte der Teil a) noch um einen Schritt weitergeführt werden, was ich hier nur noch andeuten möchte.

Falls nämlich $q_n \to 0$, so folgt aus (8), daß $s_n - s_{n'} = o(1)$ ist, und zwar bezieht sich hier der Index n' auf ein Intervall das größer als $\{N(p_n/\lambda), n\}$ ist. Wenn dabei q_n noch z. B. der Bedingung (6) genügt, so kann dieses Intervall beliebig groß sein, was die Konvergenz von $\sum u_n$ nach sich zieht.

Eine, dem Satze 5 entsprechende Verallgemeinerung des Satzes 4 enthält hingegen den Satz 4 direkt als Spezialfall, und kann wie folgt formuliert werden:

Satz 6. *Sei $N(x)$ die Anzahlfunktion einer p-Folge, $\lambda > 1$,*

$$N_1(n) > N(\lambda p_n) \tag{10}$$

und

$$\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu U_\nu > 0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Aus

$$\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu u_\nu = O\Big(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu U_\nu\Big), \qquad n \to \infty, \tag{11}$$

und

$$\sum_{\nu=n+1}^{n'} U_\nu = o(1) \quad \textit{für} \quad n < n' \leqq N_1(n), \tag{12}$$

folgt dann

$$\sum_{\nu=n+1}^{n'} u_\nu = o(1) \quad \textit{für} \quad n < n' \leqq N_1(n).$$

Beweis. Wegen (11) ist

$$\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu u_\nu = M_n \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu U_\nu, \quad \text{mit} \quad M_n = O(1),$$

also ist

$$\sum_{\nu=n+1}^{n'} u_\nu = \sum_{\nu=n+1}^{n'} \Big(\frac{1}{p_\nu} - \frac{1}{p_{\nu+1}}\Big) M_\nu \sum_{\mu=1}^{\nu} p_\mu U_\mu + M_n \frac{1}{p_{n'+1}} \sum_{\nu=1}^{n'} p_\nu U_\nu - M_n \frac{1}{p_{n+1}} \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu U_\nu,$$

und daraus folgt

$$\Big|\sum_{\nu=n+1}^{n'} u_\nu\Big| < M\Big\{\sum_{\nu=n+1}^{n'} \Big(\frac{1}{p_\nu} - \frac{1}{p_{\nu+1}}\Big) \sum_{\mu=1}^{\nu} p_\mu U_\mu + \frac{1}{p_{n'+1}} \sum_{\nu=1}^{n'} p_\nu U_\nu + \frac{1}{p_{n+1}} \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu U_\nu\Big\} = M\Big\{\sum_{\nu=n+1}^{n'} U_\nu + 2\frac{1}{p_{n+1}} \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu U_\nu\Big\}.$$

Nach Satz 1 ist aber wegen (10) und (12)

$$\frac{1}{p_{n+1}} \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu U_\nu = o(1),$$

woraus sich also, wegen (12) die Behauptung (13) ergibt.

Ist nun die Reihe $\sum U_n$ konvergent, so folgt aus (12) und (13) daß auch die Reihe $\sum u_n$ konvergieren muß, was den Satz 4 liefert.

3°. Wie ich schon in der unter [1]) zitierten Note bemerkte, sind diese Sätze auch von gewissem Interesse bei den Inversionssätzen der Limitierungsverfahren, wo z. B. die Bedingungen von der Form (1) oder (2) als Konvergenzbedingungen auftreten, d. h. daß aus der Limitierbarkeit einer Reihe und einer entsprechenden Konvergenzbedingung die Konvergenz dieser Reihe folgt.

Allgemein aufgefaßt gibt es drei Typen von solchen Konvergenzbedingungen die folgendermaßen formuliert werden können:

Sei $\varphi(x)$ eine wachsende Funktion und $\phi(x)$ ihre inverse; die erste Konvergenzbedingung besagt dann, daß

I. $$\lim_{n=\infty} \sup \operatorname{Max}_{n \leqq n' \leqq \phi[\lambda \varphi(n)]} |s_{n'} - s_n| = w(\lambda)$$

für jedes $\lambda > 1$ vorhanden sei; die zweite, daß

II. $$w(\lambda) \to 0 \quad \text{falls} \quad \lambda \to 1,$$

und die dritte, daß

III. $$w(\lambda) = 0 \quad \text{für jedes} \quad \lambda \geqq 1 \quad \text{sei.}$$

Einer jeden dieser Konvergenzbedingungen entspricht nun eine äquivalente Bedingung, welche die Form der Kroneckerschen Bedingung (1) hat, und zwar ist, falls $p_n = \varphi(n)$ gesetzt wird, I. äquivalent mit

I'. $$\lim_{n=\infty} \sup |p_n^{-\varkappa} \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu^\varkappa u_\nu| = \delta(\varkappa)$$

vorhanden für jedes $\varkappa > 0$; die Bedingung II. mit

II'. $$\delta(\varkappa) \to 0 \quad \text{falls} \quad \varkappa \to \infty,$$

und die Bedingung III. mit

III'. $$\delta(\varkappa) = 0 \quad \text{für jedes} \quad \varkappa > 0\,^{7}).$$

Diese Behauptungen folgen aus den beiden Ungleichungen

$$w(\lambda) < (\varkappa \log \lambda + 2)\, \delta(\varkappa),$$

$$\delta(\varkappa) < \frac{1}{1 - \lambda^{-\varkappa}}\, w(\lambda),$$

von denen die erste aus (9) folgt, indem $q_n = 1$ gesetzt und p_n durch $p_n^\varkappa$ ersetzt wird, und die zweite aus (5) falls p_n durch $p_n^\varkappa$ ersetzt wird.

Aus diesen Ungleichungen folgt nämlich erstens, daß III. mit III'. äquivalent ist, da $\delta(\varkappa) = 0$ die Behauptung $w(\lambda) = 0$ nach sich zieht und umgekehrt.

Daß zweitens II. mit II'. äquivalent ist, geht aus denselben Ungleichungen hervor, indem $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\varkappa} = 1$ gesetzt wird, weil dann

$$w(\lambda) < \left(\lambda \frac{\log \lambda}{\lambda - 1} + 2\right) \delta\left(\frac{\lambda}{\lambda - 1}\right)$$

und

$$\delta(\varkappa) < \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{\varkappa}\right)^\varkappa}\, w\left(\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\right)$$

wird.

---

[7]) Aus dieser Äquivalenz folgt z. B., daß das Vorhandensein von I'. (oder III'.) für ein $\varkappa > 0$, das Vorhandensein dieses Ausdruckes für jedes $\varkappa > 0$ nach sich zieht, was schon Pringsheim in der unter [6]) zitierten Note (S. 44) direkt bewiesen hat.

Daß endlich I. mit I'. äquivalent ist, geht aus der Ausführung dieser Ungleichungen selbst hervor.

Es sind also die Konvergenzbedingungen von O-Typus äquivalent mit II'., so daß z. B. bei der Inversion des A-Verfahrens die Konvergenzbedingung von O-Typus durch die folgende

$$\lim_{n=\infty} \sup \left| n^{-\varkappa} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\varkappa} u_\nu \right| = \delta(\varkappa) \to 0, \qquad \varkappa \to \infty,$$

ersetzt werden kann.

Es sei aber bemerkt, daß die entsprechende einseitige Bedingung

$$\lim_{n=\infty} \sup\, n^{-\varkappa} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\varkappa} u_\nu < \delta(\varkappa) \to 0, \qquad \varkappa \to \infty,$$

keine Konvergenzbedingung mehr darstellt, d. h., daß unter dieser Bedingung aus der A- oder C-Summierbarkeit der Reihe Σu_n ihre Konvergenz nicht mehr zu folgen braucht.

(Eingegangen am 20. September 1935.)

Abschnittsverhalten bei trigonometrischen und insbesondere Fourierschen Reihen.

Von

Werner Rogosinski in Königsberg.

Es handelt sich in dieser Arbeit um trigonometrische Reihen

$$(1) \qquad T(x) \equiv \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(x)$$

und deren konjugierte Reihen

$$(\overline{1}) \qquad \overline{T}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k \cos kx - \alpha_k \sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(x).$$

Und zwar werden die Abschnitte dieser Reihen an solchen Stellen $x = \xi$ untersucht, wo eine der beiden Reihen oder auch beide von einer gewissen Ordnung Cesàro-summierbar sind. Dabei interessiert uns in erster Linie das Verhalten dieser Abschnitte als Kurven, so daß wir sie und ihre Ableitungen nicht nur in ξ, sondern auch „um ξ", d. i. in genügend kleinen Umgebungen von ξ, zu betrachten haben.

Die folgenden Untersuchungen beruhen im wesentlichen auf einem einfachen und allgemeinen reihentheoretischen Satze über lineare Mittelbildungen der Form

$$(2) \qquad \gamma_m = \sum_{k=0}^{m} c_k \varphi(k P_m),$$

wobei $\varphi(P)$ eine gewisse, einfachen Differenzierbarkeitsbedingungen genügende Funktion des n-dimensionalen Punktes $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist und die P_m eine Nullfolge durchlaufen; im allgemeinen wird noch die Konvergenzgeschwindigkeit $P_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$ zu verlangen sein.

Wir formulieren hier diesen Satz für den Fall, daß die Reihe $\sum_0^{\infty} c_k$ (C, 1)-summierbar ist[1]):

Satz Ib: *$\varphi(P)$ sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $P_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$. Ist dann die $\sum_0^{\infty} c_k$ (C, 1)-summierbar zum Werte s, so gilt mit $m \to \infty$ die Relation*

$$(3b) \qquad \gamma_m - (s_m - s)\, \varphi(m P_m) \to s \cdot \varphi(0).$$

[1]) Der zu den „Abschnittskoppelungen" führende Spezialfall $\varphi(P) = \cos x$, $x_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$ dieses Satzes wurde zuerst von Fejér ausgesprochen; vgl. Rogosinski 1, S. 119; 4, S. 106; Zygmund, S. 181. — *Die Nummern hinter den zitierten Arbeiten beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.*

Hier ist $s_m = \sum_0^m c_k$ gesetzt. *Man sieht, daß insbesondere diejenigen Folgen* (P_m), *für die* $m P_m$ *eine Nullstelle von* $\varphi(P)$ *ist, zu Summierungsverfahren Anlaß geben, die mindestens so stark wie das* (C, 1)*-Verfahren sind*[2]).

Im § 1 dieser Arbeit wird der allgemeine Satz (Satz I) formuliert, der sich auf die Voraussetzung der (C, $\varkappa$)-Summierbarkeit der $\sum_n^\infty c_k$ bezieht. ($\varkappa \geqq 0$, ganz). Genauer wird noch untersucht, wann P_m eine beliebige Nullfolge durchlaufen darf, und schließlich wird auch kurz auf die zugehörigen „unverkürzten" Mittelbildungen

$$\Gamma_m = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi(k P_m) \tag{4}$$

eingegangen. Der Inhalt dieses Paragraphen ist durchaus reihentheoretischer Natur und benutzt im wesentlichen nur das Hilfsmittel der Abelschen partiellen Summierung und den Toeplitzschen Satz über lineare Mittelbildungen[27]).

Im § 2 werden die allgemeinen Sätze auf die trigonometrische Reihe (1) angewandt, indem $c_k = \alpha_k(\xi)$ gesetzt und die Funktion $\varphi(P)$ geeignet spezialisiert wird. Dabei lassen wir uns von dem Gesichtspunkte leiten, möglichst einfache, das Abschnittsverhalten anschaulich wiedergebende Ergebnisse zu erzielen. Eine ganze Anzahl so gewonnener Formeln werden in diesem Paragraphen kurz zusammengestellt.

Wir geben hier zur Illustration einige von ihnen wieder, *die sämtlich unter der Voraussetzung der* (C, 1)*-Summierbarkeit von* $T(\xi)$ *zum Werte* A *gelten.* Es sei noch bemerkt, daß *diese Formeln, mit* $A = A(\xi)$, *gleichmäßig in jeder Menge gelten, in der* $T(\xi)$ *gleichmäßig gegen* $A(\xi)$ (C, 1)*-summierbar ist:*

Die Formel

$$s_m(\xi) + (-1)^{r-1} \frac{s_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}} \to A(\xi), \qquad r \geqq 1 \text{ ganz}, \tag{5b}$$

gibt ein eigenartiges Summierungsverfahren, bei dem der Konvergenzdefekt des m-ten Abschnitts $s_m(\xi)$ durch eine seiner Ableitungen gerader Ordnung ausgeglichen wird. *In einem Intervall gleichmäßiger* (C, 1)*-Summierbarkeit von* $T(\xi)$ *wird also die Abschnittskurve z. B. an ihren Wendestellen* ($s_m''(\xi) = 0$) *die zugehörige Summenfunktion gut approximieren.*

Die Formeln

$$\frac{s_m\left(\xi + \frac{u\pi}{2m}\right) + s_m\left(\xi - \frac{u\pi}{2m}\right)}{2} \to A(\xi), \qquad u \text{ ungerade}, \tag{6b}^{3})$$

[2]) Äquivalenzfragen für gewisse solche Mittelbildungen γ_m sind behandelt in Rogosinski 2; vgl. auch Rogosinski 1, S. 120.

[3]) Rogosinski 1, S. 120; 4, S. 106; Zygmund, S. 182.

und

$$\text{(7 b)} \qquad \frac{m}{2k\pi}\int_{\xi-\frac{k\pi}{m}}^{\xi+\frac{k\pi}{m}} s_m(x)\,dx \to A(\xi), \qquad k > 0 \text{ ganz},$$

geben weitere einfache Summierungsverfahren. *Sie zeigen, daß eine trigonometrische Reihe, in einem Intervall gleichmäßiger* (C, 1)*-Summierbarkeit, in ihren m-ten Abschnitten* $s_m(\xi)$ *für große m ein schwingungsartiges Verhalten um die Summenfunktion* $A(\xi)$ *als Mittellage aufweist, wobei* $\frac{2\pi}{m}$*, also die Periode des letzten Gliedes* $\alpha_m(\xi)$*, die Periode dieser „Schwingung" ist.*

Die Formeln

$$\text{(8 b)} \quad (-1)^{k+r-1}\frac{s_m^{(2r)}\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)+s_m^{(2r)}\left(\xi-\frac{k\pi}{m}\right)}{2m^{2r}}+s_m(\xi)\to A(\xi);$$

$$\frac{s_m^{(2r)}\left(\xi-\frac{u\pi}{2m}\right)+s_m^{(2r)}\left(\xi-\frac{u\pi}{2m}\right)}{2m^{2r}}\to 0$$

und

$$\text{(9 b)} \quad (-1)^{\frac{u+1}{2}+r}\frac{s_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{u\pi}{2m}\right)-s_m^{(2r-1)}\left(\xi-\frac{u\pi}{2m}\right)}{2m^{2r-1}}+s_m(\xi)\to A(\xi);$$

$$\frac{s_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)-s_m^{(2r-1)}\left(\xi-\frac{k\pi}{m}\right)}{m^{2r-1}}\to 0$$

zeigen eine analoge Schwingungserscheinung der geraden Ableitungen $\frac{s_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}}$ um 0 als Mittellage, bzw. eine „ungefähre" Periodizität der Periode $\frac{2\pi}{m}$ bei den ungeraden Ableitungen $\frac{s_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}}$.

Der § 3 bringt analoge Anwendungen auf die konjugierte Reihe $(\overline{1})$, indem $c_k = \beta_k(\xi)$ gesetzt wird. So gelten z. B. die folgenden Formeln unter der Voraussetzung der (C, 1)-Summierbarkeit von $\overline{T}(\xi)$ zum Werte $A(\xi)$, und zwar gleichmäßig in jeder Menge gleichmäßiger (C, 1)-Summierbarkeit: Die Formel

$$\overline{\text{(5 b)}}^{4}) \qquad \bar{s}_m(\xi)+(-1)^r\frac{s_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}}\to \bar{A}(\xi), \qquad r \geqq 1 \text{ ganz},$$

das Gegenstück zu (5 b), zeigt die ungeraden Abschnittsableitungen in Verbindung mit den Abschnitten $\bar{s}_m(\xi)$ der konjugierten Reihe. Vertauscht man beide Reihen, so sieht man z. B., *daß in den Intervallen gleichmäßiger*

---

[4]) Man beachte, daß für $r=1$ das m-te (C, 1)-Mittel $\bar{\sigma}_m(\xi)=\sum_1^m \beta_k(\xi)\left(1-\frac{k}{m+1}\right)$ $=\bar{s}_m(\xi)-\frac{s'_m(\xi)}{m+1}$ ist.

(C, 1)-*Summierbarkeit von* $T(\xi)$, *die Abschnittskurve an den Extremstellen des konjugierten Abschnittes* $(\bar{s}'_m(\xi) = 0)$ *die Summenfunktion gut approximiert.*

Die Formeln

$$\overline{(8\,\mathrm{b})}^{5}) \quad (-1)^{\frac{u-1}{2}+r} \frac{s_m^{(2(r-1))}\left(\xi+\frac{u\pi}{2m}\right)-s_m^{(2(r-1))}\left(\xi-\frac{u\pi}{2m}\right)}{2m^{2(r-1)}} + \bar{s}_m(\xi) \to \bar{A}(\xi);$$

$$\frac{s_m^{(2(r-1))}\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)-s_m^{(2(r-1))}\left(\xi-\frac{k\pi}{m}\right)}{m^{2(r-1)}} \to 0$$

und

$$\overline{(9\,\mathrm{b})} \quad (-1)^{k+r} \frac{s_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)+s_m^{(2r-1)}\left(\xi-\frac{k\pi}{m}\right)}{2m^{2r-1}} + \bar{s}_m(\xi) \to \bar{A}(\xi);$$

$$\frac{s_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{u\pi}{2m}\right)+s_m^{(2r-1)}\left(\xi-\frac{u\pi}{2m}\right)}{2m^{2r-1}} \to 0$$

sind die Gegenstücke zu (6 b) und (8 b) bzw. (9 b) und lassen eine entsprechende Interpretation zu. Die Kombination beider Formelgruppen zeigt, daß das Abschnittsverhalten besonders einfach wird, wenn beide Reihen, (1) und $(\overline{1})$, gleichzeitig (C, 1)-summierbar sind.

Im § 4 werden die Ergebnisse des § 2 unter der Zusatzvoraussetzung diskutiert, daß die Reihe (1) die Fourierreihe einer Lebesgue-integrierbaren Funktion $f(x)$ der Periode 2π ist. Für diese wird an der Stelle ξ zumeist eine der drei Voraussetzungen

(10) (a) $s_m(\xi) \to A$; (b) $\sigma_m(\xi) \to A$; (c) $\tau_m(\xi) \to A$

gemacht. Hier bedeutet $s_m(\xi)$, $\sigma_m(\xi)$ bzw. $\tau_m(\xi)$ den m-ten Abschnitt, das m-te Cesàrosche Mittel erster bzw. zweiter Ordnung von $T(\xi)$. Auf höhere Cesàromittel gehen wir im allgemeinen nicht ein.

Für die Voraussetzung (10 a) gibt die Theorie der Fourierschen Reihen verschiedenartige hinreichende Eigenschaften von $f(x)$ „um ξ" an[6]). An Stetigkeits- und allgemeiner „gewöhnlichen" Sprungstellen von $f(x)$ (Existenz von $f(\xi+0)$ und $f(\xi-0)$) braucht die Fourierreihe nicht zu konvergieren, wohl gilt dort aber nach Fejér[7]) die Voraussetzung (10 b) mit $A = \frac{f(\xi+0)+f(\xi-0)}{2}$. Nach Lebesgue[8]) gilt (10 b) allgemeiner an allen den Stellen ξ, wo

$$(11\,\mathrm{b}) \quad \frac{1}{t}\int_0^t |\varphi(\tau)-A|\,d\tau \to 0,\ t\to 0; \quad \varphi(t) = \varphi_\xi(t) = \frac{f(\xi+t)+f(\xi-t)}{2}$$

[5]) Man beachte den Fall $r = 1$; vgl. Rogosinski 1, S. 122.

[6]) Vgl. am besten Zygmund, Kap. II.

[7]) Fejér 1; Zygmund S. 45.

[8]) Lebesgue; Zygmund, S. 49; die Reihe ist dann sogar für jedes $r > 0$ (C, r)-summierbar.

ist. Diese Bedingung ist für „*fast alle* ξ" (*sogar mit* $A = f(\xi)$) erfüllt[9]). *Das Gleiche gilt also bei Fourierreihen für die aus* (10b) *folgenden Formeln des* § 2. Die Voraussetzung (10c) ist an denjenigen Stellen ξ erfüllt, wo

$$\frac{1}{t}\int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau \to A, \quad t \to 0, \tag{11c}$$

gilt[10]).

In jedem abgeschlossenen Stetigkeitsintervall von $f(x)$ ist die Fourierreihe gleichmäßig zum Werte $f(x)$ (C, 1)-summierbar[11]), so daß dort die eben genannten Schwingungserscheinungen der Abschnitte auftreten. (Vgl. auch § 6).

Im wesentlichen kommt bei Fourierreihen zu den allgemeinen Formeln aus § 2 über trigonometrische Reihen nur insofern etwas Neues hinzu, als die Tatsache, daß die Fourierkoeffizienten eine Nullfolge bilden[12]), und daß z. B. an den Stellen (11b), also fast überall, die Abschätzung $s_m(\xi) = o(\log m)$ gilt[13]), gewisse Verschärfungen zuläßt.

Ganz anders steht es dagegen bei der Behandlung der zur Fourierreihe von $f(x)$ konjugierten trigonometrischen Reihe, die wir im § 5 untersuchen. In der Tat ist bei dieser Reihe, die ja bekanntlich z. B. an gewöhnlichen Sprungstellen eigentlich divergiert[14]), die Voraussetzung der Konvergenz oder einer Cesàrosummierbarkeit (selbst an Stetigkeitsstellen) nicht zweckvoll. Daher sind die allgemeinen Formeln des § 3 nicht ohne weiteres anwendbar.

Bedeutet $\bar{s}_m(\xi)$, $\bar{\sigma}_m(\xi)$ bzw. $\bar{\tau}_m(\xi)$ den m-ten Abschnitt, das m-te Cesàrosche Mittel erster bzw. zweiter Ordnung der konjugierten Reihe $\bar{T}(\xi)$, und wird

$$\psi_m = \psi_m(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{1/m}^{\pi} \psi(t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt; \quad \psi(t) = \psi_\xi(t) = f(\xi+t) - f(\xi-t) \tag{12}$$

gesetzt, so sind jetzt vielmehr die Voraussetzungen

$$\text{(a) } \bar{s}_m^*(\xi) = \bar{s}_m(\xi) - \psi_m \to A; \quad \text{(b) } \bar{\sigma}_m^*(\xi) = \bar{\sigma}_m(\xi) - \psi_m \to \bar{A}; \quad \text{(c) } \bar{\tau}_m^*(\xi) = \bar{\tau}_m(\xi) - \psi_m \to \bar{A} \tag{13}$$

die sinnvollen Gegenstücke zu den Annahmen von (10).

---

[9]) Lebesgue; Zygmund, S. 30.

[10]) Lebesgue; Zygmund, S. 56; Die Reihe ist dort sogar für jedes $r > 1$ (C, r)-summierbar.

[11]) Fejér 1; Zygmund, S. 45.

[12]) Vgl. Zygmund, S. 18.

[13]) Hardy 2; Zygmund, S. 32.

[14]) Pringsheim; Zygmund, S. 28.

Für die Voraussetzung (13 a) gibt die „Konvergenztheorie" der konjugierten „Fourierreihe"[15]) verschiedene hinreichende Eigenschaften von $f(x)$ um ξ an. (13 b) ist an denjenigen Stellen ξ erfüllt[16]), wo

$$\frac{1}{t}\int_0^t |\psi(\tau) - D|\, d\tau, \quad t \to +0 \tag{14 b}$$

gilt. Das ist wieder (*sogar mit* $D = 0$) *für fast alle* ξ der Fall[16]). (13 c) ist erfüllt, wenn wenigstens

$$\frac{1}{t}\int_0^t \psi(\tau)\, d\tau \to D, \qquad t \to +0 \tag{14 c}$$

gilt[17]). An den Stetigkeitsstellen ist (14 b) mit $D = 0$, an den gewöhnlichen Sprungstellen mit $D = f(\xi + 0) - f(\xi - 0)$ erfüllt. *Wir wollen allgemeiner alle Stellen* (14 c) *„Sprungstellen" und* D *den „Sprung" daselbst nennen, auch wenn* $D = 0$ *(Verallgemeinerung der Stetigkeit) ist.* An solchen Sprungstellen ist in (13), entsprechend den drei Fällen,

$$\text{(15)}^{18}) \quad \text{(a) } \bar{A} = \frac{D}{\pi} C; \quad \text{(b) } \bar{A} = \frac{D}{\pi}(C - 1); \quad \text{(c) } \bar{A} = \frac{D}{\pi}\left(C - \frac{3}{2}\right)$$

zu setzen, wobei C die Eulersche Konstante bedeutet. In einem abgeschlossenen Stetigkeitsintervall von $f(x)$ gilt (13 b) mit $\bar{A} = 0$ gleichmäßig.

Wir beweisen nun an diesen Sprungstellen ein dem allgemeinen Reihensatze aus § 1 ähnliches Theorem. So entspricht dem oben formulierten Satze I b der

Satz IV b: *$\varphi(P)$ sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und* $P_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$. Wird dann

$$G_m = \sum_1^m \frac{1}{u}\varphi(u P_m), \qquad u \text{ ungerade}, \tag{16}$$

---

[15]) Vgl. am besten Zygmund, Kap. II. Aus (13 a) folgt die Konvergenz der konjugierten Reihe genau dann, wenn die „konjugierte Funktion" $\bar{f}(\xi) = \lim_{\eta \to 0} \frac{1}{2\pi}\int_\eta^\pi \psi(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt$ existiert. $\bar{f}(\xi)$ existiert übrigens fast überall, braucht aber weder L-integrierbar zu sein, noch braucht $\bar{T}(\xi)$ eine Fourierreihe zu sein. (Vgl. Zygmund, Kap. VII.)

[16]) Plessner 1; Zygmund, S. 49.

[17]) Plessner 2, S. 1346; Zygmund, S. 56. Der dort gegebene Beweis für $1 < \alpha < 2$ läßt sich leicht auf $\alpha = 2$ ausdehnen!

[18]) Vgl. etwa Plessner 2, S. 1341, Formel (7); wegen der Bestimmung von $\bar{A}$ siehe auch § 5, 5 und 6, Fußnote [66]), dieser Arbeit.

gesetzt, so gilt an den Stellen $\overline{(14\,b)}$, *also fast überall, die Relation*

$$\overline{(17\,b)}\quad \left(\gamma_m - \frac{2D}{\pi} G_m\right) - \left(\psi_m(\xi) - \frac{D}{\pi}\log 2m\right)\varphi(0) - \left(\bar{s}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi} C\right)\varphi(m P_m) \to 0,$$

wobei C *die Eulersche Konstante bezeichnet.*

Man beachte, daß G_m die zur konjugierten Reihe der speziellen Fourierentwicklung[19]

$$(18)\qquad \sum_{u=1}^{\infty} \frac{\sin u\,x}{u} = (\operatorname{sign} x)\cdot\frac{\pi}{4}, \qquad |x| < \pi,$$

in $x = 0$ gehörige Mittelbildung γ_m ist.

Insbesondere folgt also, wenn $\varphi(0) = 0$ *und* $\varphi(m P_m)$ *eine Nullstelle von* $\varphi(P)$ *ist, aus der dann gültigen Relation*

$$\overline{(17\,b^*)}\qquad \gamma_m - \frac{2D}{\pi} G_m \to 0,$$

daß für diese Mittelbildungen an allen Stellen $\overline{(14\,b)}$ *das Verhalten der speziellen Reihe* (18) *charakteristisch ist.*

Zieht man noch die an den Stellen $\overline{(14\,b)}$ gültige Abschätzung $s_m^*(\xi) = o(\log m)$[20] heran, so ergibt sich weiter eine *sehr allgemeine Methode der „Sprungbestimmung"*:

Satz Vb: *Unter den Voraussetzungen von Satz* IVb *gilt die Relation*

$$\overline{(19\,b)}\qquad \frac{\gamma_m}{\log m} \to \frac{D}{\pi}\varphi(0).$$

Durch Spezialisierung der Funktion $\varphi(P)$ ergeben sich jetzt wieder eine ganze Reihe von Formeln, die das Abschnittsverhalten an Sprungstellen beleuchten, und insbesondere neben neuen auch wohl alle bisher bekannten Formeln zur „Sprungbestimmung". Wir geben zur Illustration einige hier an, die sämtlich an den Stellen $\overline{(14\,b)}$, also fast überall (sogar mit $D = 0$) gültig sind:

$$\overline{(20\,b)}\qquad \frac{\bar{s}_m(\xi)}{\log m} \to \frac{D}{\pi}.$$

Diese elegante Formel stammt von Lukàcs[21]. Es gelten aber auch die Formeln

$$\overline{(21\,b)}\qquad \frac{s_m(\xi + h_m) + \bar{s}_m(\xi - h_m)}{2\log m} \to \frac{D}{\pi};\quad \frac{1}{2h_m \log m}\int_{\xi - h_m}^{\xi + h_m} \bar{s}_m(x)\,dx \to \frac{D}{\pi};\quad h_m = O\left(\frac{1}{m}\right).$$

---

[19]) Vgl. etwa Rogosinski 4, S. 31.

[20]) Young, Lukàcs; Zygmund S. 32.

[21]) Lukàcs, vgl. Zygmund, S. 28.

Die erstere gilt mit $h_m = \frac{u\pi}{2m}$, *die zweite mit* $h_m = \frac{k\pi}{m}$ *sogar an den Stellen* (14 c). *Ferner gelten die Formeln*

(22 b)
$$\begin{cases} \dfrac{s_m\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)-s_m\left(\xi-\frac{k\pi}{m}\right)}{2} \to \dfrac{D}{\pi}\displaystyle\int_0^{k\pi}\frac{\sin t}{t}dt\ ^{22}), \\ \dfrac{s_m^{(2r)}\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)-s_m^{(2r)}\left(\xi-\frac{k\pi}{m}\right)}{2m^{2r}} \to \dfrac{D}{\pi}\dfrac{d^{2r-1}}{d\tau^{2r-1}}\left(\dfrac{\sin\tau}{\tau}\right)_{\tau=k\pi}, \\ \dfrac{s_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{u\pi}{2m}\right)+s_m^{(2r-1)}\left(\xi-\frac{u\pi}{2m}\right)}{2m^{2r-1}} \to \dfrac{D}{\pi}\dfrac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}}\left(\dfrac{\sin\tau}{\tau}\right)_{\tau=\frac{u\pi}{2}}; \end{cases}$$

(23 b)
$$\begin{cases} \dfrac{\bar{s}_m^{(2r)}\left(\xi+\frac{u\pi}{2m}\right)+\bar{s}_m^{(2r)}\left(\xi-\frac{u\pi}{2m}\right)}{2m^{2r}} \to -\dfrac{D}{\pi}\cdot\dfrac{1}{2^{2r-1}}\dfrac{d^{2r-1}}{d\tau^{2r-1}}\left(\dfrac{\sin^2\tau}{\tau}\right)_{\tau=\frac{u\pi}{4}}, \\ \dfrac{\bar{s}_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)-\bar{s}_m^{(2r-1)}\left(\xi-\frac{k\pi}{m}\right)}{2m^{2r-1}} \to -\dfrac{D}{\pi}\cdot\dfrac{1}{2^{2(r-1)}}\dfrac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}}\left(\dfrac{\sin^2\tau}{\tau}\right)_{\tau=\frac{k\pi}{2}}; \end{cases}$$

(24 b)
$$\begin{cases} (-1)^r \dfrac{\bar{\sigma}_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}} \to \dfrac{D}{\pi\, 2r\,(2r+1)}, \\ (-1)^{r-1}\dfrac{\sigma_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}} \to \dfrac{D}{\pi\, 2r\,(2r-1)}\ ^{23}). \end{cases}$$

An den Stellen (14 c) gilt das Gegenstück zur Formel von Lukàcs

(20 c)
$$\frac{\bar{\sigma}_m(\xi)}{\log m} \to \frac{D}{\pi},$$

während an denjenigen Sprungstellen, wo die „Konvergenz" (14 a) statthat, die Formeln

(24 a)
$$(-1)^r\frac{\bar{s}_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}} \to \frac{D}{\pi\cdot 2r}; \quad (-1)^{r-1}\frac{s_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}} \to \frac{D}{\pi\,(2r-1)}\ ^{24})$$

gelten.

Der § 6 ist im wesentlichen der sogenannten Gibbsschen Erscheinung gewidmet. Es ist wohlbekannt, daß etwa für die spezielle Reihe (18) und jede Nullfolge (h_m) an ihrer Sprungstelle $\xi = 0$ mit $A = \frac{f(+0)+f(-0)}{2} = 0$, $D = f(+0) - f(-0) = \frac{\pi}{2}$, die Formel

(25)
$$s_m(\xi + h_m) = A + \frac{D}{\pi}\int_0^{m h_m}\frac{\sin t}{t}dt + o(1)$$

---

22) Rogosinski 1, S. 134 [unter der Voraussetzung $\psi(t) \to D$].

23) Für $r = 1$ Szidon, Fejér 2, Jacob 2.

24) Für $r = 1$ Fejér 2, Czillag, Szidon.

gilt. Und hieraus folgt, daß die Abschnittskurven $y_m = s_m(x)$ auf der Geraden $x = \xi$ genau die „Gibbssche Strecke“

$$|y - A| \leqq \frac{D}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \sim \frac{D}{2} \cdot 1{,}089\,490 \ldots \tag{26}$$

approximieren. Diese Strecke übertrifft die Sprungstrecke $|y - A| \leqq \frac{D}{2}$ um etwa 9% beidendig[25]).

Wenn allgemeiner an einer Sprungstelle ξ die Formel (25), also auch die Gibbssche Erscheinung, gilt, so wollen wir sagen, daß die Fourierreihe in ξ das *„Gibbssche Verhalten“* zeigt. Es ist klar, daß das Gibbssche Verhalten jedenfalls an solchen Sprungstellen auftritt, „um“ die die Fourierreihe nach „Elimination des Sprunges“ gleichmäßig konvergent wird. Wenn die Formel (25) *wenigstens für Nullfolgen* $h_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$ gilt, sprechen wir von *„Gibbsschen Verhalten im Nahen“*.

Um von den in den § 4 und 5 betrachteten „Abschnittskoppelungen“ auf „Abschnittsnäherungen“ wie in (25) zu kommen, muß man ersichtlich die Voraussetzungen (10) und (13) für Fourierreihe und konjugierte Reihe kombinieren. Es handelt sich also um solche „Sprungstellen“, an denen

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(\xi + \tau)\,d\tau \to A_+; \quad \frac{1}{t}\int_0^t f(\xi - \tau)\,d\tau \to A_-, \quad t \to +0; \tag{27c}$$
$$A = \frac{A_+ + A_-}{2}, \quad D = A_+ - A_-$$

existiert (was (10c) und (13c) sichert).

Es zeigt sich nun, *daß das Gibbssche Verhalten im Nahen dann und nur dann auftritt, wenn die Konvergenzbedingungen* (10a) *und* (13a) *gleichzeitig erfüllt sind.* Aus diesem Verhalten folgt insbesondere, daß an solchen Sprungstellen *die Abschnittskurven mindestens die Gibbssche Strecke approximieren*[26]). *Dieser letztere Schluß erweist sich aber bereits an den Stellen, wo* (10c) *und* (13b) *gleichzeitig gelten, als richtig.*

Eine feinere Diskussion des Abschnittsverhaltens zeigt ferner, daß *die oben geschilderten Oszillationserscheinungen der Abschnitte bereits „um“ Stetigkeitsstellen*[26]) *und allgemeiner um Stellen, wo*

$$\frac{1}{t}\int_{-t}^{t} |f(\xi + \tau) - A|\,d\tau \to 0 \tag{27b*}$$

ist, auftreten. Sie sind also fast überall vorhanden. Endlich zeigen sich Schwingungserscheinungen ähnlicher Art bereits an Stellen, wo etwa nur die Existenz von $f(\xi + 0)$ vorausgesetzt ist.

[25]) Vgl. etwa Rogosinski 4, S. 109; Zygmund, S. 179.

[26]) Rogosinski 1 und 4, S. 106 u. 112.

§ 1.

Ein Satz über lineare Mittelbildungen.

1. Gegeben sei formal eine Reihe $\sum_0^\infty c_k$, und wir betrachten lineare Mittelbildungen von der Form

$$\gamma_m = \sum_0^m c_k \varphi(k P_m). \tag{2}$$

Dabei ist $\varphi(P) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine für alle Punkte des n-dimensionalen Raumes erklärte Funktion und P_m durchläuft eine gegen den Nullpunkt 0 des Raumes konvergierende Punktfolge.

Die Untersuchung der γ_m beruht natürlich auf dem allgemeinen Toeplitzschen Satze über lineare Mittelbildungen[27]), von dem hier der folgende Teil benutzt wird:

Für die Matrix $\mathfrak{B} = (b_{m,k})$, $m, k = 0, 1, 2 \ldots$ *gelte*

$$(\alpha) \qquad \lim_{m \to 0} b_{m,k} = 0; \quad Z_m = \sum_{k=0}^\infty |b_{m,k}| \leqq Z.$$

Wird dann

$$(\beta) \qquad t_m = \sum_{k=0}^\infty b_{m,k} s_k; \quad \mathfrak{Z}_m = \sum_{k=0}^\infty b_{m,k}$$

gesetzt, so folgt aus $s_k \to s$ *die Relation*

$$t_m - s\,\mathfrak{Z}_m \to 0. \tag{28}$$

Wir benötigen noch für später den folgenden einfachen Zusatz, den der übliche Beweis[27]) mitliefert:

Aus $|s_k - s| < \varepsilon$ *für* $k > K(\varepsilon)$ *folgt*

$$|t_m - s\,\mathfrak{Z}_m| < 2\,\varepsilon Z \tag{28*}$$

für $m > M(\varepsilon)$. *Sind insbesondere die* $s_k = s_k(x)$ *gleichmäßig in einer* x*-Menge* $\mathfrak{M}$ *gegen* $s = s(x)$ *konvergent, so gilt auch* (28) *gleichmäßig in* $\mathfrak{M}$.

2. Die m-ten Cesàroschen Mittel $\varkappa$-ter Ordnung ($\varkappa \geqq$ ganz) der Reihe $\sum_0^\infty c_k$ sind durch

$$\mu_m^{(\varkappa)} = \frac{S_m^{(\varkappa)}}{\binom{m+\varkappa}{\varkappa}}; \quad S_m^{(\varkappa)} = \sum_{k=0}^m S_k^{(\varkappa-1)}; \quad S_m^{(-1)} = c_m \tag{29}$$

erklärt; wir bezeichnen noch speziell

$$(29^*) \quad \mu_m^{(0)} = s_m = \sum_0^m c_k; \quad \mu_m^{(1)} = \sigma_m = \sum_0^m c_k \left(1 - \frac{k}{m+1}\right); \quad \mu_m^{(2)} = \tau_m.$$

---

[27]) Toeplitz; vgl. Knopp, S. 403; Rogosinski 4, S. 86.

Ferner sei das Differenzschema von $\varphi(k P_m)$ durch

$$(30) \qquad \Delta^{(i)}_{m,k} = \Delta^{(i-1)}_{m,k} - \Delta^{(i-1)}_{m,k+1}; \quad \Delta^{(0)}_{m,k} = \varphi(k P_m); \quad i \geqq 1$$

bezeichnet. Dann gilt der folgende Satz:

Satz I: *Es sei $\varkappa \geqq 0$ ganz, die Funktion $\varphi(P)$ sei $(\varkappa+1)$-mal stetig differenzierbar und $P_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$*[28]).

Aus $\mu^{(\varkappa)}_m \to s$ folgt dann

$$(3) \qquad \gamma_m - \sum_{i=0}^{\varkappa-1} \binom{m}{i} (\mu^{(i)}_{m-i} - s)\, \Delta^{(i)}_{m,m-i} \to s \cdot \varphi(0).$$

Es genügt, den Beweis etwa für $\varkappa = 2$ und $n = 2$ zu führen. Zweimalige partielle Summierung ergibt

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} \gamma_m - s_m \varphi(m P_m) &= \sum_0^{m-1} s_k \Delta^{(1)}_{m,k}; \\ \gamma_m - s_m \varphi(m P_m) - S^{(1)}_{m-1} \Delta^{(1)}_{m,m-1} &= \sum_0^{m-2} S^{(1)}_k \Delta^{(2)}_{m,k}. \end{aligned}$$

Und nach nochmaliger partieller Summierung ist

$$(\beta) \qquad t_m = \gamma_m - s_m \varphi(m P_m) - m \sigma_{m-1} \Delta^{(1)}_{m,m-1}$$

$$= \sum_0^{m-3} S^{(2)}_k \Delta^{(3)}_{m,k} + S^{(2)}_{m-2} \Delta^{(2)}_{m,m-2} = \sum_0^{m-3} \tau_k \binom{k+2}{2} \Delta^{(3)}_{m,k} + \tau_{m-2} \binom{m}{2} \Delta^{(2)}_{m,m-2}$$

eine lineare Mittelbildung aus den τ_k.

Nun ist nach dem Mittelwertsatze[29])

$$(\gamma) \qquad \begin{aligned} \Delta^{(1)}_{m,k} &= \varphi(k x_m, k y_m) - \varphi((k+1) x_m, (k+1) y_m) \\ &= -(x_m \varphi_x + y_m \varphi_y)_{\vartheta_k x_m, \vartheta_k y_m}; \quad k < \vartheta_k < k+1 \end{aligned}$$

und allgemeiner ($i \leqq 3$)[30])

$$(\delta) \qquad \Delta^{(i)}_{m,k} = (-1)^i (x_m \varphi_x + y_m \varphi_y)^{\{i\}}_{\vartheta^{(i)}_k x_m, \vartheta^{(i)}_k y_m}; \quad k < \vartheta^{(i)}_k < k+i,$$

woraus wegen $P_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$ noch

$$(\varepsilon) \qquad \Delta^{(i)}_{m,k} = O\left(\frac{1}{m^i}\right); \quad 0 \leqq k \leqq m$$

---

[28]) D. h. alle Koordinaten $x^{(m)}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, sind $O\left(\frac{1}{m}\right)$.

[29]) Wir bezeichnen die Koordinaten von P mit x und y.

[30]) Die bei der Taylorschen Formel übliche symbolische Schreibweise, z. B. $(x\varphi_x + y\varphi_y)^{\{2\}} \equiv x^2\varphi_{xx} + 2xy\varphi_{xy} + y^2\varphi_{yy}$.

folgt. Mit den Bezeichnungen des Toeplitzschen Satzes aus 1., angewandt auf die Mittelbildung t_m aus (β), ist also $(k \leqq m-3)$:

$$b_{m,k} = \binom{k+2}{2} \Delta^{(3)}_{m,k} = \binom{k+2}{2} \cdot O\left(\frac{1}{m^3}\right); \quad \lim_{m \to \infty} b_{m,k} = 0,$$

$$(\zeta) \qquad Z_m = \sum_0^{m-3} \binom{k+2}{2} |\Delta^{(3)}_{m,k}| + \binom{m}{2} |\Delta^{(2)}_{m,m-2}|$$

$$= O\left(\frac{1}{m^3}\right) \cdot \sum_{k=0}^{m-3} \binom{k+2}{2} + \binom{m}{2} O\left(\frac{1}{m^2}\right) = O(1).$$

Ferner ist (man setze $c_0 = 1$, $c_k = 0$ für $k \geqq 1$, also $s_k = \sigma_k = \tau_k \equiv 1$)

$$(\eta) \quad \mathfrak{Z}_m = \sum_0^{m-3} \binom{k+2}{2} \Delta^{(3)}_{m,k} + \binom{m}{2} \Delta^{(2)}_{m,m-2} = \varphi(0) - \varphi(m P_{\dots}) - m \Delta^{(1)}_{m,m-1}.$$

Nach dem Toeplitzschen Satze gilt also

$$(\vartheta) \quad (\gamma_m - s\,\varphi(0)) - (s_m - s)\,\varphi(m P_m) - m(\sigma_{m-1} - s)\,\Delta^{(1)}_{m,m-1} \to 0,$$

wie behauptet.

Zusatz: *Wenn unter den Voraussetzungen von Satz* I *die* $c_k = c_k(x)$ *Funktionen sind, für die* $\mu_m^{(x)}(x) \rightrightarrows s(x)$ *gleichmäßig in einer* x*-Menge* $\mathfrak{M}$ *gilt, so ist auch die Relation* (3) *gleichmäßig in* $\mathfrak{M}$ *gültig.*

3. Der Satz Ib der Einleitung ist der Fall $\varkappa = 1$ unseres Satzes. Wir formulieren noch den Fall $\varkappa = 0$:

Satz Ia: *$\varphi(P)$ sei stetig differenzierbar und* $P_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$. *Ist dann die* $\sum_0^\infty c_k$ *konvergent mit der Summe* s, *so gilt die Relation*

$$(3a) \qquad \gamma_m \to s \cdot \varphi(0).$$

Der Fall $\varkappa = 2$ gestattet noch eine übersichtlichere Formulierung:

Satz Ic: *$\varphi(P)$ sei dreimal stetig differenzierbar und* $P_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$. *Ist dann die* $\sum_0^\infty c_k$ (C, 2)*-summierbar zum Werte* s, *so gilt die Relation*[31])

$$(3c) \quad \gamma_m - (s_m - s)\,\varphi(m P_m) + (\sigma_{m-1} - s)\,(m P_m \cdot \operatorname{grad} \varphi(m P_m)) \to s \cdot \varphi(0).$$

Zum Beweise beachte man, daß

$$(\alpha) \qquad m(\sigma_{m-1} - s) = \binom{m+1}{2}(\tau_{m-1} - s) - \binom{m}{2}(\tau_{m-2} - s) = o(m^2)$$

ist. Da ferner nach $2(\gamma)$ und dem Mittelwertsatze

$$(\beta) \qquad \Delta^{(1)}_{m,m-1} = -(x_m \varphi_x + y_m \varphi_m)_{m x_m,\, m y_m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

---

[31]) $P \cdot \operatorname{grad} \varphi(P)$ bedeutet das skalare Produkt $x_1 \varphi_{x_1} + x_2 \varphi_{x_2} + \dots + x_n \varphi_{x_n}$.

ist, darf $m\,\Delta^{(1)}_{m,m-1}$ in $2(\vartheta)$ durch $-(x\,\varphi_x + y\,\varphi_y)_{m x_m,\, m y_m}$ ersetzt werden. *Der Zusatz über die gleichmäßige Gültigkeit von* (3c) *bleibt richtig.* Von Wichtigkeit ist auch, z. B. für die Anwendung auf Fourierreihen, die folgende

Bemerkung: *Wenn die* c_k *eine Nullfolge bilden, darf* σ_{m-1} *in* (3c) *durch* σ_m *ersetzt werden.*

In der Tat ist dann

$$(\gamma) \qquad \sigma_m - \sigma_{m-1} = \frac{c_m}{m+1} + \sum_0^{m-1} c_k \frac{k}{m(m+1)} = o(1),$$

während $m\,P_m \cdot \operatorname{grad} \varphi(m\,P_m)$ beschränkt bleibt.

Für $\varkappa > 2$ werden entsprechende Formulierungen des Satzes I weniger übersichtlich. Wenn aber die c_k eine Nullfolge bilden, erhält man den

Satz I*: *Unter den Voraussetzungen von Satz* I *gilt, wenn die* c_k *eine Nullfolge bilden, die Relation*[32])

$$(3^*) \qquad \gamma_m - \sum_{i=0}^{\varkappa-1} (-1)^i (\mu^{(i)}_m - s) \frac{(m\,P_m \cdot \operatorname{grad} \varphi(m\,P_m))^{\{i\}}}{i!} \to s \cdot \varphi(0).$$

In der Tat folgt aus $2(\delta)$ nach dem Mittelwertsatze

$$(\delta) \qquad \Delta^{(i)}_{m,m-i} = (-1)^i (P_m \cdot \operatorname{grad} \varphi(m\,P))^{\{i\}} + O\left(\frac{1}{m^{i+1}}\right)$$

und also

$$(\varepsilon) \qquad \binom{m}{i} \Delta^{(i)}_{m,m-i} = (-1)^i \frac{(m\,P_m \cdot \operatorname{grad} \varphi(m\,P_m))^{\{i\}}}{i!} + O\left(\frac{1}{m}\right); \quad 1 \leqq i \leqq \varkappa.$$

Wenn nun die c_k eine Nullfolge bilden, so ist ersichtlich

$$(\zeta) \qquad S^{(i)}_m = o(m^{i+1}); \quad \mu^{(i)}_m = o(m)$$

und ferner $\mu^{(i)}_m - \mu^{(i)}_{m-i} = o(1)$, was man ähnlich wie (γ) zeigt.

Hieraus folgt nun, daß $\binom{m}{i}(\mu^{(i)}_{m-i} - s)\,\Delta^{(i)}_{m,m-i}$ in (3) durch $(-1)^i (\mu^{(i)}_m - s) \frac{(m\,P_m \cdot \operatorname{grad} \varphi(m\,P_m))^{\{i\}}}{i!}$ ersetzt werden darf.

4. Für die Anwendung der obigen Sätze ist eine Reihe von Bemerkungen von Bedeutung.

I. Unter der *Voraussetzung von Satz* Ib ist $s_m = o(m)$. Ist nun

$$(\alpha) \qquad m\,P_m = Q + O\left(\frac{1}{m}\right),$$

so wird (3b) zu

$$(3\,b^*) \qquad \gamma_m - (s_m - s)\,\varphi(Q) \to s\,\varphi(0).$$

---

[32]) Vgl. Fußnoten [30]) u. [31]); $(m\,P_m \cdot \operatorname{grad} \varphi(m\,P_m))^{\{0\}}$ *ist formal* $= \varphi(m\,P_m)$ *zu setzen.*

Ist insbesondere $\varphi(Q) = 0$, *so gilt*

$$(3\,b^{**}) \qquad \gamma_m \to s\,\varphi(0),$$

und man erhält ein Summierungsverfahren, das mindestens so stark wie das (C, 1)*-Verfahren ist.*

Konvergiert umgekehrt γ_m *und ist* $\varphi(Q) \neq 0$, *so ist die* $\sum_0^\infty c_k$ *sicher sogar konvergent*[33]).

Man beachte ferner die Abschätzung $\gamma_m = o(m)$.

II. Unter der *Voraussetzung von Satz* I c ist $s_m = o(m^2)$ und $\sigma_m = o(m)$. Aus (α) folgt also

$$(3\,c^{*}) \quad \gamma_m - (s_m - s)\,\varphi(m\,P_m) + (\sigma_{m-1} - s)\,(Q \cdot \operatorname{grad} \varphi(Q)) \to s\,\varphi(0).$$

Ist insbesondere $Q \cdot \operatorname{grad} \varphi(Q) = 0$, *so erhält man*

$$(3\,c^{**}) \qquad \gamma_m - (s_m - s)\,\varphi(m\,P_m) \to s \cdot \varphi(0).$$

Konvergiert umgekehrt die linke Seite von (3 c**) *und ist* $Q \cdot \operatorname{grad} \varphi(Q) \neq 0$, *so ist die* $\sum_0^\infty c_k$ *bereits* (C, 1)*-summierbar.*

Um (3 c) in der Form

$$(3\,c^{***}) \quad \gamma_m - (s_m - s)\,\varphi(Q) + (\sigma_{m-1} - s)\,(Q \cdot \operatorname{grad} \varphi(Q)) \to s\,\varphi(0)$$

zu schreiben, muß man

$$(\beta) \qquad m\,P_m = Q + O\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

voraussetzen[34]). (Wenn die c_k eine Nullfolge bilden, ist auch $s_m = o(m)$ und es genügt (α)).

Ist nun $\varphi(Q) = 0$, *so wird*

$$(3\,c^{****}) \qquad \gamma_m + (\sigma_{m-1} - s)\,(Q \cdot \operatorname{grad} \varphi(Q)) \to s\,\varphi(0).$$

Konvergiert umgekehrt die linke Seite von (3 c****) *und ist* $\varphi(Q) \neq 0$, *so ist die Reihe sogar konvergent, und es folgt*

$$(3\,c^{*****}) \qquad \gamma_m \to s\,\varphi(0).$$

Diese letztere Relation gilt insbesondere auch, wenn $\varphi(Q) = 0$ *und* $Q \cdot \operatorname{grad} \varphi(Q) = 0$ *ist. Man erhält so Summierungsverfahren, die mindestens so stark wie das* (C, 2)*-Verfahren sind.*

Wenn umgekehrt γ_m *konvergiert,* $\varphi(Q) = 0$ *aber* $Q \operatorname{grad} \varphi(Q) \neq 0$ *ist, so ist die* $\sum_0^\infty c_k$ *bereits* (C, 1)*-summierbar. Ist aber* $\varphi(Q) \neq 0$, *so ist die Reihe sogar konvergent*[33]).

---

[33]) Vgl. Rogosinski 2.

[34]) Wenn grad $\varphi(Q) = 0$ ist, genügt (α).

Denn aus (3c***) folgt in diesem letzteren Falle zunächst die Konvergenz von $s_m \varphi(Q) - \sigma_{m-1}(Q \cdot \operatorname{grad} \varphi(Q))$. Geht man zu den arithmetischen Mitteln über, so konvergiert auch

$$(\gamma) \qquad \sigma_m \varphi(Q) - \frac{\sigma_0 + \sigma_1 + \cdots \sigma_{m-1}}{m+1} \cdot (Q \cdot \operatorname{grad} \varphi(Q)).$$

Aus der Konvergenz der τ_m folgt aber bekanntlich[35]) die der $\frac{\sigma_0 + \sigma_1 + \cdots + \sigma_{m-1}}{m+1}$, so daß jetzt weiter auf die Konvergenz der σ_m und schließlich auf die der s_m geschlossen werden kann.

Man beachte endlich die Abschätzung $\gamma_m = o(m^2)$, *die, wenn die* c_k *eine Nullfolge bilden, zu* $\gamma_m = o(m)$ *verbessert werden kann.* $\gamma_m = o(m)$ *ist auch unter der Voraussetzung* (β) *und* $\varphi(Q) = 0$ *richtig.*

III. *Die* c_k *mögen eine Nullfolge bilden.* Unter den *Voraussetzungen von Satz* I* und unter der Annahme (α) wird wegen 3 (ζ)

$$(3^{**}) \qquad \gamma_m - \sum_{i=0}^{\varkappa-1} (-1)^i (\mu_m^{(i)} - s) \frac{(Q \cdot \operatorname{grad} \varphi(Q))^{\{i\}}}{i!} \to s \cdot \varphi(0).$$

Sind insbesondere alle $(Q \cdot \operatorname{grad} \varphi(Q))^{\{i\}} = 0$, $0 \leqq i \leqq \varkappa - 1$, *so wird*

$$(3^{***}) \qquad \gamma_m \to s\, \varphi(0),$$

und man erhält Summierungsverfahren, die mindestens so stark wie das $(C, \varkappa)$*-Verfahren sind.*

Ist umgekehrt γ_m *konvergent und zuerst* $(Q \cdot \operatorname{grad} \varphi(Q))^{\{j\}} \neq 0$, $0 \leqq j \leqq \varkappa - 1$, *so ist die* $\sum_0^\infty c_k$ *bereits* (C, j)*-summierbar*[33]).

In der Tat ist dann zunächst die

$$(\delta) \qquad \sum_{i=j}^{\varkappa-1} (-1)^i \mu_m^{(i)} \frac{(Q \cdot \operatorname{grad} \varphi(Q))^{\{i\}}}{i!}$$

konvergent. Geht man zu den arithmetischen Mitteln $(\varkappa - 1 - j)$-ter Ordnung über, so folgt zunächst (ähnlich wie unter II) die $(C, \varkappa - 1)$-Summierbarkeit der Reihe. Iterierung der Schlußweise gibt die Behauptung.

IV. *Die Relation* (3***) *gilt auch, ohne daß die* c_k *eine Nullfolge zu bilden brauchen, wenn etwa* $m P_m = Q$ *gesetzt wird und alle* $(Q \cdot \operatorname{grad} \varphi(Q))^{\{i\}} = 0$, $0 \leqq i \leqq \varkappa - 1$, *sind*[33]).

In diesem Falle ist nämlich nach 2 (δ) und der Taylorschen Formel

$$(\varepsilon) \qquad \Delta_{m,\, m-i}^{(i)} = (-1)^i \frac{(\vartheta_{m-i}^{(i)} - m)^{\varkappa - i}}{(\varkappa - i)!} (P_m \cdot \operatorname{grad} \varphi(\tau_m^{(i)} P_m))^{\{\varkappa\}} = O\left(\frac{1}{m^\varkappa}\right);$$

$$m - i < \vartheta_{m-i}^{(i)} < \tau_m^{(i)} < m;\ 1 \leqq i \leqq \varkappa - 1,$$

so daß wegen $\mu_{m-i}^{(i)} = o(m^{\varkappa - i})$ die Summe links in (3) gegen 0 geht.

[35]) Vgl. Knopp, S. 498.

V. *Allgemein gilt* $\gamma_m = o(m^\varkappa)$, *wenn* $\varkappa \geqq 1$ *ist. Bilden die* c_k *eine Nullfolge, so ist* $\gamma_m = o(m)$.

5. Die Frage, wann in den obigen Sätzen die P_m eine beliebige Nullfolge durchlaufen dürfen, wird durch den folgenden Satz beantwortet:

Satz II: *In Satz* I *darf* P_m *eine beliebige Nullfolge durchlaufen, wenn* $\varphi(P)$ *überdies für ein* $\delta > 0$ *und große* $|P|$ *den Bedingungen*

$$(31) \quad (P \cdot \operatorname{grad} \varphi(P))^{\{\varkappa\}} = O(1); \quad (P \cdot \operatorname{grad} \varphi(P))^{\{\varkappa+1\}} = O\left(\frac{1}{|P|^\delta}\right)$$

genügt[36]).

Mit den Bezeichnungen des Beweises von Satz I ist in der Tat nach 2 (δ) und (ζ), wegen $P_m \to 0$, zunächst wieder $\lim_{m\to\infty} b_{m\,k} = 0$.

Wird

$$(\alpha)^{37}) \qquad k_m = \operatorname{Min}\left\{\left[\frac{1}{|P_m|}\right], m\right\}$$

gesetzt, so folgt aus 2 (δ) und (ζ)

$$(\beta) \quad Z_m = O\left\{\sum_{k=1}^{k_m} + \sum_{k>k_m}^{m} k^2 \left|(x_m \varphi_x + y_m \varphi_y)^{\{3\}}_{\vartheta_k^{(3)} x_m,\, \vartheta_k^{(3)} y_m}\right|\right\}$$
$$+ O\left(m^2 \left|(x_m \varphi_x + y_m \varphi_y)^{\{2\}}_{\vartheta_{m-2}^{(2)} x_m,\, \vartheta_{m-2}^{(2)} y_m}\right|\right).$$

In der ersten Summe ist $|k P_m| \leqq 1$ und $|x_m|, |y_m| \leqq \frac{1}{k_m}$. Daher wird weiter

$$Z_m = O\left\{\frac{1}{k_m^3}\sum_{1}^{k_m} k^2 + \sum_{k>k_m}^{m} \frac{\left|(x \varphi_x + y \varphi_y)^{\{3\}}_{\vartheta_k^{(3)} x_m,\, \vartheta_k^{(3)} y_m}\right|}{k}\right\}$$
$$(\gamma) \qquad + O\left(\left|(x \varphi_x + y \varphi_y)^{\{2\}}_{\vartheta_{m-2}^{(2)} x_m,\, \vartheta_{m-2}^{(2)} y_m}\right|\right),$$

$$= O(1) + O\left(\frac{1}{|P_m|^\delta} \sum_{k_m}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\delta}}\right) + O(1) = O(1) + O\left(\frac{1}{|k_m P_m|^\delta}\right) = O(1),$$

womit wieder der Toeplitzsche Satz auf t_m anwendbar wird.

---

[36]) $|P| = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$; $(P \cdot \operatorname{grad} \varphi(P))^{\{\varkappa\}} = (x_1 \varphi_{x_1} + \ldots + x_n \varphi_{x_n})^{\{\varkappa\}}$ [Fußnote [30])]. *Wenn die Bedingungen* (31) *nur in einem (Kegel-)Winkelraum mit dem Scheitel* 0 *erfüllt sind, so sind die* P_m *auf diesen Winkelraum zu beschränken.* Die zweite Voraussetzung (31) kann leicht verbessert werden. Ist $\varphi = \varphi(x)$, $x > 0$, so genügt z. B. die Existenz von $\int_0^\infty x^\varkappa \,|\, \varphi^{(\varkappa+1)}(x) \,|\, dx$.

[37]) $k_m = m$ für große m bedeutet $|P_m| \leqq \frac{1}{m}$; die $\sum_{k>k_m}^{m}$ in (γ) und die ihr entsprechenden O-Glieder fallen dann fort.

Anmerkung: *Wenn für große* $|P|$

(31*) $$(P\cdot \operatorname{grad}\varphi(P))^{(\varkappa+1)} \geqq 0$$

erfüllt ist, gilt Satz II *unter den Voraussetzungen*[38])

(31**) $\varphi(P) = O(1)$; $\quad (P\cdot \operatorname{grad}\varphi(P))^{(i)} = O(1), \quad 1 \leqq i \leqq \varkappa.$

In der Tat ist dann ersichtlich $Z_m = 3_m + O(1)$, und man beachte die Formel 2 (η).

Auch die *Formulierung des Satzes* Ic *bleibt* unter den Voraussetzungen des Satzes II bzw. der Anmerkung ($\varkappa = 2$) für beliebige Nullfolgen *richtig.*

Dies folgt daraus, daß nach 2 (γ)

(δ) $$\Delta^{(1)}_{m,\,m-1} = -(x_m\varphi_x + y_m\varphi_y)_{\vartheta_{m-1}x_m,\,\vartheta_{m-1}y_m}$$

$$= -(x_m\varphi_x + y_m\varphi_y)_{m\,x_m,\;m\,y_m} + (m-\vartheta_{m-1})\,(x_m\varphi_x + y_m\varphi_y)^{(2)}_{\tau_m x_m,\;\tau_m y_m},$$

$$m-1 < \vartheta_{m-1} < \tau_m < m$$

ist. Also wird nach der ersten Voraussetzung (31)

(ε) $$\Delta^{(1)}_{m,\,m-1} = -(x_m\varphi_x + y_m\varphi_y)_{m\,x_m,\,m\,y_m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right),$$

womit, wegen $\sigma_m = o(m)$, die Formel (3c) aufs neue bewiesen ist.

6. Wir wollen noch kurz auf die Mittelbildungen der Form

(4) $$\Gamma_m = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,\varphi(k\,P_m)$$

eingehen. Unsere γ_m sind als „verkürzte" Formen dieser unverkürzten Bildungen anzusehen.

Satz III: *Es sei* $\varkappa \geqq 0$ *ganz und die Funktion* $\varphi(P)$ *sei* $(\varkappa+1)$*-mal stetig differenzierbar. Überdies genüge* $\varphi(P)$ *für ein* $\delta > 0$ *und große* $|P|$[39]) *den Bedingungen*

(32) $$\varphi(P) = O\left(\frac{1}{|P|^{\varkappa}}\right); \quad (P\cdot \operatorname{grad}\varphi(P))^{(i)} = O\left(\frac{1}{|P|^{\varkappa-i}}\right), \quad 1 \leqq i \leqq \varkappa;$$

$$(P\cdot \operatorname{grad}\varphi(P))^{(\varkappa+1)} = O\left(\frac{1}{|P|^{\delta}}\right).$$

Aus $\mu^{(\varkappa)}_m \to s$ *folgt dann für beliebige Nullfolgen* $P_m \neq 0$ *die Konvergenz von* Γ_m *und die Relation*

(33) $$\Gamma_m \to s\cdot\varphi(0).$$

Zum Beweise sei wieder $\varkappa = 2$ und $n = 2$ gewählt.

---

[38]) Man beachte die Winkelraum-Bemerkung in Fußnote [36]).

[39]) Man beachte die Fußnote [36]).

Genau wie Formel 2 (β) findet man für beliebiges ganzes $\varrho > 0$

$$(\alpha)\quad \Big(\sum_{k=0}^{\varrho} c_k\,\varphi(k\,P_m) - s\cdot\varphi(0)\Big) - (s_\varrho - s)\,\varphi(\varrho\,P) - \varrho\,(\sigma_{\varrho-1} - s)\,\Delta^{(1)}_{m,\varrho-1}$$
$$= \sum_{k=0}^{\varrho-3} (\tau_k - s)\binom{k+2}{2}\Delta^{(3)}_{m,k} + (\tau_{\varrho-2} - s)\binom{\varrho}{2}\Delta^{(2)}_{m,\varrho-2}.$$

Nach 5 (γ) folgt aus der letzten Voraussetzung (32) die (sogar absolute) Konvergenz der Summe rechts mit $\varrho \to \infty$.

Beachtet man die Formeln 2 (δ) und daß $s_\varrho = o(\varrho^2)$, $\sigma_\varrho = o(\varrho)$, $\tau_\varrho - s \to 0$ ist, so folgt aus den übrigen Voraussetzungen (32), daß das zweite und dritte Glied links in (α) und das zweite Glied rechts mit $\varrho \to \infty$ gegen 0 gehen[40]). Daher konvergiert Γ_m und es ist

$$(\beta)\qquad \Gamma_m - s\cdot\varphi(0) = \sum_{k=0}^{\infty} (\tau_k - s)\binom{k+2}{2}\Delta^{(3)}_{m,k}.$$

Wieder nach 5 (γ) ist nun auf diese Mittelbildung aus den $(\tau_k - s)$ der Toeplitzsche Satz anwendbar.

Anmerkungen: A. *Die letzte Bedingung* (32) *darf durch*

$$(32^*)\qquad (P\cdot\operatorname{grad}\varphi(P))^{\{\varkappa+1\}} \geqq 0$$

ersetzt werden. (Vgl. Anmerkung zu Satz II.)

B. *Wenn die c_k eine Nullfolge bilden,* sind alle $\mu_m^{(i)} = o(m)$, (vgl. 3 (ζ)), und daher *können die Voraussetzungen* (32) *durch*

$$(32^{**})\quad \varphi(P) = O\Big(\frac{1}{|P|}\Big);\quad (P\cdot\operatorname{grad}\varphi(P))^{\{i\}} = O\Big(\frac{1}{|P|}\Big),\quad 1 \leqq i \leqq \varkappa - 1;$$
$$(P\cdot\operatorname{grad}\varphi(P))^{\{\varkappa\}} = O(1);\quad (P\cdot\operatorname{grad}\varphi(P))^{\{\varkappa+1\}} = O\Big(\frac{1}{|P|^{\delta}}\Big)$$

ersetzt werden. An Stelle der letzten dieser Bedingungen kann (32*) *treten.*

C. *Auch die Formel* (33) *gilt gleichmäßig in jeder x-Menge, in der die $\mu_m^{(\varkappa)}(x) \rightrightarrows s(x)$ gleichmäßig konvergieren.*

7. Die Bedeutung der vorstehenden Sätze ist allgemeiner reihentheoretischer Natur und sie sind vieler Anwendungen fähig. Durch geeignete Auswahl der Funktionen φ können sie überdies, wie wir in den folgenden Paragraphen an dem Beispiel der trigonometrischen Reihen sehen werden, speziellen Reihentypen noch besonders angepaßt werden.

Wir geben hier noch als eine Anwendung einen besonders einfachen *Beweis des folgenden bekannten Umkehrsatzes des* (C, $\varkappa$)*-Verfahrens*[41]): *Ist die Reihe* $\sum_0^\infty c_k$ (C, $\varkappa$)*-summierbar und ist* $c_k = O\left(\frac{1}{k}\right)$, *so ist die Reihe sogar konvergent.*

---

[40]) Man beachte die Voraussetzung $P_m \neq 0$, die hier wesentlich ist.

[41]) Hardy 1; vgl. Rogosinski 2, S. 148.

Wir wenden die Bemerkung in 4, IV auf

$$(\alpha) \qquad \varphi(x) = (1 - x^{\varrho})^{\varkappa}, \quad x_m = \frac{1}{m},$$

an. $\varphi(x)$ hat in $x = 1$ eine Nullstelle $\varkappa$-ter Ordnung. Daher folgt aus $\mu_m^{(\varkappa)} \to s$ zunächst

$$(\beta) \qquad \sum_{k=0}^{m} c_k \left(1 - \left(\frac{k}{m}\right)^{\varrho}\right)^{\varkappa} \equiv s_m + \sum_{i=1}^{\varkappa} (-1)^i \binom{\varkappa}{i} \sum_{k=0}^{m} c_k \left(\frac{k}{m}\right)^{\varrho i} \to s.$$

Da wegen $c_k = O\left(\frac{1}{k}\right)$, gleichmäßig in den m

$$(\gamma) \qquad \sum_{k=0}^{m} c_k \left(\frac{k}{m}\right)^{\varrho i} = O\left(\frac{1}{\varrho i}\right) = O\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

ist, wird also bei festem ϱ

$$(\delta) \qquad s_m = s + O\left(\frac{1}{\varrho}\right) + o(1),$$

woraus mit $\varrho \to \infty$ die Behauptung folgt.

Zusatz: *Aus* $\mu_m^{(\varkappa)}(x) \rightrightarrows s(x)$ *und* $c_k(x) = O\left(\frac{1}{k}\right)$ *gleichmäßig in den* x *einer* x*-Menge* $\mathfrak{M}$ *folgt* $s_m(x) \rightrightarrows s(x)$ *gleichmäßig in* $\mathfrak{M}$.

§ 2.

Anwendung auf trigonometrische Reihen $[c_k = \alpha_k(\xi)]$.

1. Wir wenden die Sätze des vorigen Paragraphen (insbesondere die Sätze I) auf die trigonometrische Reihe $T(x)$ aus (1) in $x = \xi$ an, indem wir die $c_k = \alpha_k(\xi)$ setzen. Wir werden in der Hauptsache eine der drei Annahmen

$$(10) \qquad \text{(a)} \quad s_m(\xi) \to A; \qquad \text{(b)} \quad \sigma_m(\xi) \to A; \qquad \text{(c)} \quad \tau_m(\xi) \to A$$

und nur mitunter die allgemeinere Annahme

$$(10\varkappa) \qquad \mu_m^{(\varkappa)}(\xi) \to A$$

machen.

Im folgenden bezeichnet durch die ganze Arbeit hindurch (wenn es nicht ausdrücklich anders gesagt wird) k *eine ganze Zahl* $\geqq 0$, r *eine ganze Zahl* > 0, g *eine gerade und* u *eine ungerade Zahl* $\geqq 0$; *und für die Nullfolge* $\{h_m\}$ *ist*

$$(34) \qquad h_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$$

vorausgesetzt.

Die Auswahl der Funktionen φ ist durch den Gesichtspunkt der Einfachheit der Aussagen bedingt. Einfache Rechnungen sind übergangen und die Ergebnisse tabellarisch zusammengestellt. *Die Buchstaben* (a), (b), (c) *und* $(\varkappa)$ *beziehen sich stets auf die entsprechenden Voraussetzungen* (10). *Ein* (*) *bezieht sich auf die Zusatzvoraussetzung, daß die* $\alpha_k(\xi)$ *eine Nullfolge bilden.*

2. **Abschnittsableitungen gerader Ordnung:**

I. $\varphi(x) = x^{2r}; \quad x_m = \frac{1}{m}; \quad \gamma_m = (-1)^r \frac{s_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}}.$

(a) $s_m^{(2r)}(\xi) = o(m^{2r});$

(b) $s_m(\xi) + (-1)^{r-1} \frac{s_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}} \to A; \qquad s_m^{(2r)}(\xi) = o(m^{2r+1});$

(c) $(-1)^r \frac{s_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}} - s_m(\xi) + 2r\sigma_{m-1}(\xi) \to A\,(2r-1);$

($\varkappa$) $s_m^{(2r)}(\xi) = o(m^{2r+\varkappa}); \qquad (*) \qquad s_m^{(2r)}(\xi) = o(m^{2r+1}).$

II. $\varphi(x) = \sum_{r=0}^{k} a_r x^{2r}; \quad x_m = \frac{X}{m}; \quad \varphi(X) = \varphi'(X) = \ldots = \varphi^{(\varkappa-1)}(X) = 0.$

($\varkappa$) $\sum_{r=0}^{k} (-1)^r a_r X^{2r} \frac{s_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}} \to s \cdot a_0.$

z. B. $\varphi(x) = (1-x^2)^\varkappa; \quad X = 1;$

($\varkappa$) $\sum_{r=0}^{\varkappa} \binom{\varkappa}{r} \frac{s_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}} \to s.$

3. **Abschnittskoppelungen**[42]**:**

I. $\varphi(x) = \cos x; \quad x_m = h_m; \quad \gamma_m = \frac{s_m(\xi+h_m) + s_m(\xi-h_m)}{2}.$

(a) $\frac{s_m(\xi+h_m) + s_m(\xi-h_m)}{2} \to A;$

(b)
$$\begin{cases} \frac{s_m(\xi+h_m) + s_m(\xi-h_m)}{2} - (s_m(\xi) - A)\cos m h_m \to A; \\ \frac{s_m\left(\xi + \frac{u\pi}{2m}\right) + s_m\left(\xi - \frac{u\pi}{2m}\right)}{2} \to A; \\ \frac{s_m(\xi+h_m) + s_m(\xi-h_m)}{2} = o(m); \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} \frac{s_m(\xi+h_m) + s_m(\xi-h_m)}{2} - (s_m(\xi) - A)\cos m h_m \\ \qquad - (\sigma_{m-1}(\xi) - A)\, m h_m \cdot \sin m h_m \to A^{43}); \\ \frac{s_m(\xi+h_m) + s_m(\xi-h_m)}{2} = \begin{cases} o(m^2) \\ o(m) \end{cases}; \\ \frac{s_m\left(\xi + \frac{u\pi}{2m}\right) + s_m\left(\xi - \frac{u\pi}{2m}\right)}{2} \overset{(*)}{=} o(m). \end{cases}$$

[42]) Vgl. Rogosinski 1 u. 2; siehe auch 4, III. dieses Paragraphen.

[43]) Man beachte $h_m = \frac{k\pi}{m}$ und $h_m = \frac{u\pi}{2m}$.

II. $\varphi(x) = (\cos x)^x; \qquad x_m = \frac{u\pi}{2m}.$

$$(\varkappa) \quad \frac{1}{2^\varkappa} \sum_{\nu=0}^{\varkappa} \binom{\varkappa}{\nu} s_m\left(\xi + (\varkappa - 2\nu)\frac{u\pi}{2m}\right) \to A.$$

III. $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}; \qquad x_m = h_m \neq 0; \qquad \gamma_m = \frac{1}{2h_m} \int_{\xi - h_m}^{\xi + h_m} s_m(x)\, dx.$

(a) $$\frac{1}{2h_m} \int_{\xi - h_m}^{\xi + h_m} s_m(x)\, dx \to A;$$

(b)
$$\begin{cases} \dfrac{1}{2h_m} \displaystyle\int_{\xi - h_m}^{\xi + h_m} s_m(x)\, dx - (s_m(\xi) - A)\frac{\sin m h_m}{m h_m} \to A; \\ \dfrac{m}{2k\pi} \displaystyle\int_{\xi - \frac{k\pi}{m}}^{\xi + \frac{k\pi}{m}} s_m(x)\, dx \to A \qquad (k > 0); \\ \dfrac{1}{2h_m} \displaystyle\int_{\xi - h_m}^{\xi + h_m} s_m(x)\, dx = o(m); \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} \dfrac{1}{2h_m} \displaystyle\int_{\xi - h_m}^{\xi + h_m} s_m(x)\, dx - (s_m(\xi) - A)\frac{\sin m h_m}{m h_m} \\ \qquad + (\sigma_{m-1}(\xi) - A)\dfrac{m h_m \cos m h_m - \sin m h_m}{m h_m} \to A\,^{44}); \\ \dfrac{1}{2h_m} \displaystyle\int_{\xi - h_m}^{\xi + h_m} s_m(x)\, dx = \begin{cases} o(m^2) \\ o(m) \end{cases}_{(*)}; \qquad \int_{\xi - \frac{k\pi}{m}}^{\xi + \frac{k\pi}{m}} s_m(x)\, dx = o(1). \end{cases}$$

Die zugehörige unverkürzte Mittelbildung Γ_m führt auf das (bekanntlich bei Fourierreihen nützliche) sogenannte Lebesguesche Summierungsverfahren[45]). Dieses ist aber nicht regulär (konvergenzerhaltend); vergleiche Satz III, $\varkappa = 0$.

---

[44]) Man beachte $h_m = \frac{k\pi}{m}$ und $h_m = \frac{\varrho}{m}$, $\operatorname{tg} \varrho = \varrho$.

[45]) Vgl. Zygmund S. 272, Rogosinski 4, S. 99.

IV. $\varphi(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$; $\quad x_m = \frac{h_m}{2} \neq 0$; $\quad \gamma_m = \frac{1}{h_m^2} \int_0^{h_m} \int_{\xi-t}^{\xi+t} s_m(x)\, dx\, dt$.

(a) $$\frac{1}{h_m^2} \int_0^{h_m} \int_{\xi-t}^{\xi+t} s_m(x)\, dx\, dt \to A, \qquad h_m \to 0 \text{ beliebig.}$$

(b)
$$\begin{cases} \dfrac{1}{h_m^2} \displaystyle\int_0^{h_m} \int_{\xi-t}^{\xi+t} s_m(x)\, dx\, dt - (s_m(\xi) - A) \left(\dfrac{\sin \frac{m h_m}{2}}{\frac{m h_m}{2}} \right)^2 \to A; \\ \dfrac{1}{h_m^2} \displaystyle\int_0^{h_m} \int_{\xi-t}^{\xi+t} s_m(x)\, dx\, dt = o(m); \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} \dfrac{1}{h_m^2} \displaystyle\int_0^{h_m} \int_{\xi-t}^{\xi+t} s_m(x)\, dx\, dt - (s_m(\xi) - A) \left(\dfrac{\sin \frac{m h_m}{2}}{\frac{m h_m}{2}} \right)^2 \\ \qquad + (\sigma_{m-1}(\xi) - A) \dfrac{m h_m}{2} \dfrac{d}{d\tau} \left(\dfrac{\sin \tau}{\tau} \right)^2_{\tau = \frac{m h_m}{2}} \to A^{46}); \\ \left(\frac{m}{g\pi}\right)^2 \displaystyle\int_0^{\frac{g\pi}{m}} \int_{\xi-t}^{\xi+t} s_m(x)\, dx\, dt \to A; \quad \dfrac{1}{h_m^2} \displaystyle\int_0^{h_m} \int_{\xi-t}^{\xi+t} s_m(x)\, dx\, dt = \begin{cases} o(m^2) \\ o(m) \end{cases}_*. \end{cases}$$

Die zugehörige unverkürzte Mittelbildung Γ_m führt auf das bekannte Riemannsche Summierungsverfahren[47]). Dieses ist regulär; vgl. Satz III, $\varkappa = 0$. Daß h_m in der obigen Formel (a) eine beliebige Nullfolge durchlaufen darf, folgt aus Satz II, $\varkappa = 0$.

Allgemeiner sind die zu $\varphi(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^\alpha$, $\alpha > \varkappa + 1$, $x_m = h_m$, *gehörigen unverkürzten Mittelbildungen mindestens so stark wie das* $(C, \varkappa)$*-Verfahren. Bei den verkürzten Bildungen ist dies schon für* $\alpha = \varkappa$, $h_m = \frac{k\pi}{m}$, *der Fall. Ferner darf, für* $\alpha > \varkappa + 1$, h_m *in den Formeln* $(\varkappa)$ *eine beliebige Nullfolge durchlaufen.*

---

[46]) Man beachte $h_m = \frac{u\pi}{m}$ und $h_m = \frac{2\varrho}{m}$, $\operatorname{tg} \varrho = \varrho$.

[47]) Vgl. Zygmund S. 270; Rogosinski 4, S. 100.

4. Koppelungen der Abschnittsableitungen gerader Ordnung:

I. $\varphi(x, y) = x^{2r} \cos y; \qquad x_m = \frac{1}{m}, \; y_m = h_m;$

$$\gamma_m = (-1)^r \frac{s_m^{(2r)}(\xi + h_m) + s_m^{(2r)}(\xi - h_m)}{2 m^{2r}}.$$

(a) $s_m^{(2r)}(\xi + h_m) + s_m^{(2r)}(\xi - h_m) = o(m^{2r})$;

(b)
$$\begin{cases} (-1)^r \dfrac{s_m^{(2r)}(\xi + h_m) + s_m^{(2r)}(\xi - h_m)}{2 m^{2r}} - (s_m(\xi) - A)\cos m h_m \to 0; \\ (-1)^{k+r-1} \dfrac{s_m^{(2r)}\left(\xi + \frac{k\pi}{m}\right) + s_m^{(2r)}\left(\xi - \frac{k\pi}{m}\right)}{2 m^{2r}} + s_m(\xi) \to A; \\ s_m^{(2r)}(\xi + h_m) + s_m^{(2r)}(\xi - h_m) = o(m^{2r+1}); \\ s_m^{(2r)}\left(\xi + \frac{u\pi}{2m}\right) + s_m^{(2r)}\left(\xi - \frac{u\pi}{2m}\right) = o(m^{2r}). \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} (-1)^r \dfrac{s_m^{(2r)}(\xi + h_m) + s_m^{(2r)}(\xi - h_m)}{2 m^{2r}} - (s_m(\xi) - A)\cos m h_m \\ \quad + (\sigma_{m-1}(\xi) - A)\{2r \cos m h_m - m h_m \cdot \sin m h_m\} \to 0^{48}); \\ s_m^{(2r)}(\xi + h_m) + s_m^{(2r)}(\xi - h_m) = \underset{(*)}{\begin{cases} o(m^{2(r+1)}) \\ o(m^{2r+1}) \end{cases}}; \\ s_m^{(2r)}\left(\xi + \frac{u\pi}{2m}\right) + s_m^{(2r)}\left(\xi + \frac{u\pi}{2m}\right) = o(m^{2r+1}). \end{cases}$$

II. $\varphi(x, y) = x^{2r}(\cos y)^{\varkappa}; \qquad x_m = \frac{1}{m}, \qquad y_m = \frac{u\pi}{2m}.$

($\varkappa$) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\varkappa} \binom{\varkappa}{\nu} s_m^{(2r)}\left(\xi + (\varkappa - 2\nu)\frac{u\pi}{2m}\right) = o(m^{2r}).$

III. $\varphi(x, y) = x^{2r}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^{2\varrho}, \quad r \geqq \varrho \geqq 1$ ganz[49]), $\quad x_m = \frac{1}{m}, \quad y_m = h_m.$

($\varkappa$) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{2\varrho} (-1)^{\nu} \binom{2\varrho}{\nu} s_m^{2(r-\varrho)}(\xi + 2(\varrho - \nu) h_m)$

$$= \underset{(*)}{\begin{cases} o(m^{2r+\varkappa} h_m^{2\varrho}) = o(m^{2(r-\varrho)+\varkappa}) \\ o(m^{2r+1} h_m^{2\varrho}) = o(m^{2(r-\varrho)+1}) \end{cases}}^{50}.$$

($2\varkappa$) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{2\varkappa} (-1)^{\nu} \binom{2\varkappa}{\nu} s_m^{2(r-\varkappa)}\left(\xi + (\varkappa - \nu)\frac{g\pi}{m}\right) = o(m^{2(r-\varkappa)}).$

---

[48]) Man beachte auch $h_m = \frac{\sigma}{m}$; $\operatorname{tg}\sigma = \frac{2r}{\sigma}$.

[49]) Man beachte $r = \varrho$. In Formel ($2\varkappa$) ist $\varrho = \varkappa$ gesetzt.

[50]) Wenn $2\varrho > \varkappa + 1$, darf h_m eine beliebige Nullfolge durchlaufen.

5. **Koppelungen der Abschnittsableitungen ungerader Ordnung:**

I. $\varphi(x,y) = x^{2r}\left(\frac{\sin y}{y}\right)$; $\quad x_m = \frac{1}{m}$, $\quad y_m = h_m \neq 0$;

$$\gamma_m = (-1)^r \frac{s_m^{(2r-1)}(\xi + h_m) - s_m^{(2r-1)}(\xi - h_m)}{2 h_m m^{2r}}.$$

(a) $$s_m^{(2r-1)}(\xi + h_m) - s_m^{(2r-1)}(\xi - h_m) = o(m^{2r} |h_m|) = o(m^{2r-1}).$$

(b)
$$\left\{\begin{array}{l} (-1)^r \dfrac{s_m^{(2r-1)}(\xi + h_m) - s_m^{(2r-1)}(\xi - h_m)}{2 m^{2r-1}} - (s_m(\xi) - A)\sin m h_m \\ \qquad = o(m|h_m|) = o(1); \\ (-1)^{\frac{u+1}{2}+r} \dfrac{s_m^{(2r-1)}\left(\xi + \frac{u\pi}{2m}\right) - s_m^{(2r-1)}\left(\xi - \frac{u\pi}{2m}\right)}{2 m^{2r-1}} + s_m(\xi) \to A; \\ s_m^{(2r-1)}(\xi + h_m) - s_m^{(2r-1)}(\xi - h_m) = o(m^{2r+1}|h_m|) = o(m^{2r}); \\ s_m^{(2r-1)}\left(\xi + \frac{k\pi}{m}\right) - s_m^{(2r-1)}\left(\xi - \frac{k\pi}{m}\right) = o(m^{2r-1}). \end{array}\right.$$

(c)
$$\left\{\begin{array}{l} (-1)^r \dfrac{s_m^{(2r-1)}(\xi + h_m) - s_m^{(2r-1)}(\xi - h_m)}{2 m^{2r-1}} - (s_m(\xi) - A)\sin m h_m \\ \qquad + (\sigma_{m-1}(\xi) - A)\{(2r-1)\sin m h_m + m h_m \cos m h_m\} \\ \qquad = o(m|h_m|) = o(1)\ ^{51}); \\ s_m^{(2r-1)}(\xi + h_m) - s_m^{(2r-1)}(\xi - h_m) \\ \qquad = \underset{(*)}{\left\{\begin{array}{l} o(m^{2(r+1)}|h_m|) = o(m^{2r+1}) \\ o(m^{2r+1}|h_m|) = o(m^{2r}) \end{array}\right.}; \\ s_m^{(2r-1)}\left(\xi + \frac{k\pi}{m}\right) - s_m^{(2r-1)}\left(\xi - \frac{k\pi}{m}\right) = \dot{o}(m^{2r}). \end{array}\right.$$

II. $\varphi(x,y) = x^{2r}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^{2\varrho-1}$, $\quad r \geqq \varrho \geqq 1$ ganz, $\quad x_m = \frac{1}{m}$, $\quad y_m = h_m$.

($\varkappa$)[52] $$\sum_{\nu=0}^{2\varrho-1} (-1)^\nu \binom{2\varrho-1}{\nu} s_m^{2(r-\varrho)+1}(\xi + \{2(\varrho-\nu)-1\}h_m)$$
$$= \underset{(*)}{\left\{\begin{array}{l} o(m^{2r+\varkappa}|h_m|^{2\varrho-1}) = o(m^{2(r-\varrho)+1+\varkappa}) \\ o(m^{2r-1}|h_m|^{2\varrho-1}) = o(m^{2(r-\varrho+1)}) \end{array}\right.}.$$

$(2\varkappa-1)$ $$\sum_{\nu=0}^{2\varkappa-1} (-1)^\nu \binom{2\varkappa-1}{\nu} s_m^{2(r-\varkappa)+1}\left(\xi + \{2(\varkappa-\nu)-1\}\frac{k\pi}{m}\right)$$
$$= o(m^{2(r-\varkappa)+1}).$$

---

[51] Man beachte $h_m = \frac{k\pi}{m}$ und $m h_m = \tau$, $\operatorname{tg}\tau = -\frac{\tau}{2r-1}$.

[52] Wenn $2\varrho > \varkappa + 2$, darf h_m eine beliebige Nullfolge durchlaufen. In Formel $(2\varkappa-1)$ ist $\varrho = \varkappa$ gesetzt.

6. **Bildungen aus den $\sigma_m(x)$:**
Wenn

$$(\alpha) \qquad \varphi(P) = \varphi(x, P^*) = (1 - x)\,\psi(P^*), \qquad x_m = \frac{1}{m}$$

ist, so ergibt der Satz Ic die Formel

$$(3\,c') \qquad \gamma_m - (\sigma_{m-1} - s)\,\psi(m\,P_m^*) \to s \cdot \psi(0).$$

Im Falle

$$(\beta) \qquad m\,P_m^* = Q^* + O\left(\frac{1}{m}\right), \qquad \psi(Q^*) = 0,$$

folgt also, wegen $\sigma_m = o(m)$, die Relation

$$(3\,c'') \qquad \gamma_m \to s \cdot \psi(0).$$

Bildet man nun γ_{m+1}, indem man für $\psi(P)$ und (P_{m+1}) die Funktionen und Folgen aus 2. bis 5. einsetzt, so erhält man es aus den dortigen Ausdrücken γ_m, wenn man die s_m durch σ_m ersetzt. Daraus folgt:

Die Formeln (a) *bzw.* (b) *aus* 2. *bis* 5. *bleiben in den Fällen* (b) *bzw.* (c) *richtig, wenn man in ihnen* s_m *durch* σ_m *ersetzt.*

Ähnliche Bemerkungen kann man bei den Bildungen aus allgemeineren $\mu_m^{(\varkappa)}(x)$ machen[53]).

7. Zum Schluß sei noch einmal darauf aufmerksam gemacht, daß alle Formeln dieses Paragraphen (und ebenso des folgenden) gleichmäßig in jeder ξ-Menge gelten, wo die zugehörigen Voraussetzungen gleichmäßig erfüllt sind. Hieraus sind dann die in der Einleitung erwähnten „Schwingungserscheinungen" der Abschnitte unmittelbar zu ersehen.

§ 3.

Anwendung auf die konjugierte trigonometrische Reihe $[c_k = \beta_k(\xi)]$.

1. Die Sätze des § 1 werden in diesem Paragraphen auf die zu $T(x)$ konjugierte trigonometrische Reihe $\overline{T}(x)$ aus $(\overline{1})$ in $x = \xi$ angewandt, indem wir die $c_k = \beta_k(\xi)$ setzen.

Die respektive unter den Voraussetzungen

$$(\overline{10}) \quad (a)\ s_m(\xi) \to \bar{A}; \quad (b)\ \bar{\sigma}_m(\xi) \to \bar{A}; \quad (c)\ \bar{\tau}_m(\xi) \to \bar{A}; \quad (\varkappa)\ \bar{\mu}_m^{(\varkappa)}(\xi) \to \bar{A}$$

gültigen Ergebnisse bezeichnen wir respektive durch $(\overline{a})$, $(\overline{b})$, $(\overline{c})$ *und* $(\overline{\varkappa})$. *Ein* (*) *bedeutet die Zusatzvoraussetzung, daß die* $\beta_k(\xi)$ *eine Nullfolge bilden.*

Es versteht sich von selbst, daß alle Formeln aus § 2, wenn man überall die konjugierten (überstrichenen) Größen einsetzt, unter den entsprechenden (überstrichenen) Voraussetzungen richtig bleiben.

---

[53]) Man setze $\varphi(P) = (1 - x)^{\varkappa}\,\psi(P^*), \quad x_m = \frac{1}{m}$.

2. Abschnittsableitungen ungerader Ordnung:

I. $$\varphi(x) = x^{2r-1}; \quad x_m = \frac{1}{m}; \quad \gamma_m = (-1)^{r-1} \frac{s_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}}.$$

$(\bar{a})$ $$s_m^{(2r-1)}(\xi) = o\left(m^{2r-1}\right).$$

$(\bar{b})$ $$\bar{s}_m(\xi) + (-1)^r \frac{s_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}} \to \bar{A}; \quad s_m^{(2r-1)}(\xi) = o\left(m^{2r}\right).$$

$(\bar{c})$ $$(-1)^{r-1} \frac{s_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}} - \bar{s}_m(\xi) + (2r-1)\,\bar{\sigma}_{m-1}(\xi) \to 2\bar{A}(r-1).$$

$(\bar{\varkappa})$ $$\bar{s}_m^{(2r-1)}(\xi) = o\left(m^{2r-1+\varkappa}\right); \quad (*)\ \bar{s}_m^{(2r-1)}(\xi) = o\left(m^{2r}\right).$$

II. $$\varphi(x) = \sum_{r=1}^{k} b_r x^{2r-1}; \quad x_m = \frac{X}{m}; \quad \varphi(X) = \varphi'(X) = \ldots \varphi^{(\varkappa-1)}(X) = 0.$$

$(\bar{\varkappa})$ $$\sum_{r=1}^{k} (-1)^{r-1} b_r X^{2r-1} \frac{s_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}} \to 0,$$

z. B. $\varphi(r) = x(1-x^2)^{\varkappa}; \quad X = 1.$

$(\bar{\varkappa})$ $$\sum_{r=0}^{\varkappa} \binom{\varkappa}{r} \frac{s_m^{(2r+1)}(\xi)}{m^{2r+1}} \to 0.$$

3. Koppelungen der Abschnitte und Abschnittsableitungen gerader Ordnung:

I. $$\varphi(x,y) = x^{2r-1} \frac{\sin y}{y}; \quad x_m = \frac{1}{m}, \quad y_m = h_m \neq 0;$$

$$\gamma_m = (-1)^{r-1} \frac{s_m^{2(r-1)}(\xi + h_m) - s_m^{2(r-1)}(\xi - h_m)}{2 h_m m^{2r-1}}\ ^{54}).$$

(a) $$s_m^{2(r-1)}(\xi + h_m) - s_m^{2(r-1)}(\xi - h_m) = o\left(m^{2r-1}|h_m|\right) = o\left(m^{2(r-1)}\right).$$

(b)
$$(-1)^{r-1} \frac{s_m^{2(r-1)}(\xi + h_m) - s_m^{2(r-1)}(\xi - h_m)}{2 m^{2(r-1)}} - (\bar{s}_m(\xi) - \bar{A}) \sin m h_m = o(m|h_m|) = o(1)\ ^{55});$$

$$(-1)^{\frac{u-1}{2}} + r \frac{s_m^{2(r-1)}\left(\xi + \frac{u\pi}{2m}\right) - s_m^{2(r-1)}\left(\xi - \frac{u\pi}{2m}\right)}{2 m^{2(r-1)}} + \bar{s}_m(\xi) \to \bar{A}\ ^{56});$$

$$s_m^{2(r-1)}(\xi + h_m) - s_m^{2(r-1)}(\xi - h_m) = o\left(m^{2r}|h_m|\right) = o\left(m^{2r-1}\right);$$

$$s_m^{2(r-1)}\left(\xi + \frac{k\pi}{m}\right) - s_m^{2(r-1)}\left(\xi - \frac{k\pi}{m}\right) = o\left(m^{2(r-1)}\right)$$

---

54) Man beachte $r = 1$!

55) Für $r = 1$ vgl. Rogosinski 1.

56) Für $r = 1$ gilt diese Formel schon im Falle $(\bar{c})$; vgl. 57).

$$(\bar{c})\quad \begin{cases} (-1)^{r-1}\dfrac{s_m^{2(r-1)}(\xi+h_m)-s_m^{2(r-1)}(\xi-h_m)}{2\,m^{2(r-1)}}-(\bar{s}_m(\xi)-\bar{A})\sin m\,h_m \\ \quad+(\bar{\sigma}_{m-1}(\xi)-\bar{A})\{2(r-1)\sin m\,h_m+m\,h_m\cdot\cos m\,h_m\}=o(m|h_m|)=o(1)^{57}); \\ s_m^{2(r-1)}(\xi+h_m)-s_m^{2(r-1)}(\xi-h_m)=\underset{(*)}{\begin{cases} o(m^{2r+1}|h_m|)=o(m^{2r}) \\ o(m^{2r}|h_m|)=o(m^{2r-1}) \end{cases}}; \\ s_m^{2(r-1)}\left(\xi+\dfrac{k\pi}{m}\right)-s_m^{2(r-1)}\left(\xi-\dfrac{k\pi}{m}\right)=o(m^{2r-1}). \end{cases}$$

II. $\varphi(x,y)=x^{2r-1}\left(\dfrac{\sin y}{y}\right)^{2\varrho-1}$; $r\geqq\varrho\geqq 1$ ganz; $x_m=\dfrac{1}{m}$, $y_m=h_m\neq 0$ [58]),

$$(\bar{\varkappa})\ [59])\quad \sum_{\nu=0}^{2\varrho-1}(-1)^\nu\binom{2\varrho-1}{\nu}s_m^{2(r-\varrho)}(\xi+\{2(\varrho-\nu)-1\}h_m)$$
$$=\underset{(*)}{\begin{cases} o(m^{2r+\varkappa-1}|h_m|^{2\varrho-1})=o(m^{2(r-\varrho)+\varkappa}) \\ o(m^{2r}|h_m|^{2\varrho-1})=o(m^{2(r-\varrho)+1}) \end{cases}}.$$

$$\overline{(2\varkappa-1)}\quad \sum_{\nu=0}^{2\varkappa-1}(-1)^\nu\binom{2\varkappa-1}{\nu}s_m^{2(r-\varkappa)}\left(\xi+\{2(\varkappa-\nu)-1\}\frac{k\pi}{m}\right)=o(m^{2(r-\varkappa)}).$$

4. Koppelungen der Abschnittsableitungen ungerader Ordnung:

I. $\varphi(x,y)=x^{2r-1}\cos y$; $x_m=\dfrac{1}{m}$, $y_m=h_m$;

$$\gamma_m=(-1)^{r-1}\frac{s_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)+s_m^{(2r-1)}(\xi-h_m)}{2\,m^{2r-1}},$$

$$(\bar{a})\qquad s_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)+s_m^{(2r-1)}(\xi-h_m)=o(m^{2r-1}).$$

$$(\bar{b})\quad \begin{cases} (-1)^{r-1}\dfrac{s_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)+s_m^{(2r-1)}(\xi-h_m)}{2\,m^{2r-1}}-(\bar{s}_m(\xi)-\bar{A})\cos m\,h_m\to 0; \\ (-1)^{k+r}\dfrac{s_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)+s_m^{(2r-1)}\left(\xi-\frac{k\pi}{m}\right)}{2\,m^{2r-1}}+\bar{s}_m(\xi)\to\bar{A}; \\ s_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)+s_m^{(2r-1)}(\xi-h_m)=o(m^{2r}); \\ s_m^{(2r-1)}\left(\xi+\dfrac{u\pi}{2m}\right)+s_m^{(2r-1)}\left(\xi-\dfrac{u\pi}{2m}\right)=o(m^{2r-1}); \end{cases}$$

---

[57]) Man beachte auch $h_m=\dfrac{k\pi}{2m}$ und $h_m=\dfrac{\tau}{m}$, $\operatorname{tg}\tau=-\dfrac{\tau}{2(r-1)}$; vgl. [56]) für $r=1$.

[58]) Man beachte $r=\varrho$. In Formel $\overline{(2\varkappa-1)}$ ist $\varrho=\varkappa$ gesetzt.

[59]) Wenn $2\varrho>\varkappa+2$ darf h_m eine beliebige Nullfolge durchlaufen.

$$(\bar{c})\quad \begin{cases} (-1)^{r-1}\dfrac{s_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)+s_m^{(2r-1)}(\xi-h_m)}{2m^{2r-1}} - (\bar{s}_m(\xi)-\bar{A})\cos m h_m \\ \qquad + (\bar{\sigma}_{m-1}(\xi)-\bar{A})\{(2r-1)\cos m h_m - m h_m \sin m h_m\} \to 0\ ^{60}); \\ s_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)+s_m^{(2r-1)}(\xi-h_m) = \underset{(*)}{\begin{cases} o(m^{2r+1}) \\ o(m^{2r}) \end{cases}}; \\ s_m^{(2r-1)}\left(\xi+\dfrac{u\pi}{2m}\right)+s_m^{(2r-1)}\left(\xi-\dfrac{u\pi}{2m}\right) = o(m^{2r}). \end{cases}$$

II. $\varphi(x,y) = x^{2r-1}(\cos y)^{\varkappa};\ x_m = \dfrac{1}{m},\ y_m = \dfrac{u\pi}{2m}.$

$$(\bar{\varkappa})\qquad \sum_{\nu=0}^{\varkappa}\binom{\varkappa}{\nu} s_m^{(2r-1)}\left(\xi+(\varkappa-2\nu)\frac{u\pi}{2m}\right) = o(m^{2r-1}).$$

III. $\varphi(x,y) = x^{2r+1}\left(\dfrac{\sin y}{y}\right)^{2\varrho};\ r \geqq \varrho \geqq 1$ ganz; $x_m = \dfrac{1}{m},\ y_m = h_m \neq 0.$

$$(\bar{\varkappa})^{61})\qquad \sum_{\nu=0}^{2\varrho}(-1)^{\nu}\binom{2\varrho}{\nu} s_m^{2(r-\varrho)+1}(\xi+2(\varrho-\nu)h_m) = \underset{(*)}{\begin{cases} o(m^{2r+\varkappa+1}h_m^{2\varrho}) = o(m^{2(r-\varrho)+\varkappa+1}) \\ o(m^{2(r+1)}h_m^{2\varrho}) = o(m^{2(r-\varrho+1)}) \end{cases}}.$$

$$(\overline{2\varkappa})\qquad \sum_{\nu=0}^{2\varkappa}(-1)^{\nu}\binom{2\varkappa}{\nu} s_m^{2(r-\varkappa)+1}\left(\xi+(\varkappa-\nu)\frac{g\pi}{m}\right) = o(m^{2(r-\varkappa)+1}).$$

5. **Bildungen aus den $\sigma_m(x)$:**

Die Formeln (ā) *bzw.* (b) *aus* 2. *bis* 4. *bleiben in den Fällen* (b̄) *bzw.* (c̄) *richtig, wenn man ihnen die* s_m *durch die* σ_m *ersetzt* (vgl. § 2, 6.).

§ 4.

Anwendung auf Fouriersche Reihen.

1. Die Ergebnisse des § 1 und 2 lassen sich in mancher Hinsicht verbessern, wenn man spezieller voraussetzt, daß die trigonometrische Reihe $T(x)$ aus (1) die Fouriersche Reihe einer Lebesgue-integrierbaren Funktion $f(x)$ der Periode 2π ist.

---

60) Man beachte $h_m = \dfrac{u\pi}{2m}$ und $h_m = \dfrac{\sigma}{m}$, $\operatorname{tg}\sigma = \dfrac{2r-1}{\sigma}$.

61) Wenn $2\varrho > \varkappa + 1$ ist, darf h_m eine beliebige Nullfolge durchlaufen. In Formel $(\overline{2\varkappa})$ ist $\varrho = \varkappa$ gesetzt.

Hinreichende Bedingungen für die Konvergenzvoraussetzung (10 a) gibt die Konvergenztheorie der Fourierschen Reihen[6]). Für die Voraussetzungen (10 b) bzw. (10 c) sind bekanntlich die Bedingungen

$$(11)\qquad \text{(b)}\ \frac{1}{t}\int_0^t |\varphi(\tau)-A|\,d\tau \to 0; \qquad \text{(c)}\ \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau \to A,$$

$$t \to 0, \qquad \varphi(t) = \varphi_\xi(t) = \frac{f(\xi+t)+f(\xi-t)}{2}$$

hinreichend[8])[10]). (11 b) ist für „fast alle ξ" (sogar mit $A = f(\xi)$) erfüllt[9]), *so daß alle Formeln* (b) *des* § 2 (*und erst recht die für* $\varkappa \geqq 1$) *für fast alle* ξ *mit* $A = f(\xi)$ *gelten.*

Allgemeiner folgt aus

$$(11\,(\varkappa+1)) \qquad \frac{\varkappa}{t^\varkappa}\int_0^t \varphi(\tau)\,(t-\tau)^{\varkappa-1}\,d\tau \to A, \qquad t \to 0, \qquad \varkappa \geqq 1$$

die $(C, \varkappa+1)$-Summierbarkeit der Fourierreihe in $x = \xi$ zum Werte A[62]).

2. *Die Fourierkoeffizienten bilden Nullfolgen*[12]). *Daher sind bei Fourierreihen der Satz* I* *und aus dem* § 2 *die Formeln* (*) *anwendbar.*

3. *Unter der Voraussetzung* (11 b) *ist* $s_m(\xi) = o(\log m)$[13]).

Die Formeln (3 b*) und (3 b**) aus § 1, 4 gelten daher, wenn (11 b) erfüllt ist, schon unter der Annahme

$$(\alpha) \qquad m P_m = Q + O\left(\frac{1}{\log m}\right).$$

Ebenso kann in Satz III ($\varkappa = 1$) die erste Bedingung (32**) durch

$$(\beta) \qquad \varphi(P) = O\left(\frac{1}{\log |P|}\right)$$

ersetzt werden.

Weiter ist unter der Voraussetzung (11 b), *also fast überall,* $\gamma_m = o(\log m)$. Es ist also z. B. in Verschärfung gewisser Formeln des § 2, immer unter der Voraussetzung (11 b):

$$s_m^{(2r)}(\xi) = o(m^{2r}\log m); \quad s_m^{(2r)}(\xi+h_m) + s_m^{(2r)}(\xi-h_m) = o(m^{2r}\log m);$$

$$(b)\qquad \frac{s_m(\xi+h_m)+s_m(\xi-h_m)}{2} = o(\log m); \quad \frac{1}{2h_m}\int_{\xi-h_m}^{\xi+h_m} s_m(x)\,dx = o(\log m);$$

$$s_m^{(2r-1)}(\xi+h_m) - s_m^{(2r-1)}(\xi-h_m) = o(m^{2r}\log m\,|h_m|) = o(m^{2r-1}\log m).$$

---

[62]) Plessner, S. 1362; Jacob 1. Aus (11 $(\varkappa+1)$) folgt sogar die $(C, \varkappa+\delta)$-Summierbarkeit, $\delta > 0$. Wegen Verschärfungen von (11) siehe Jacob 1.

4. *Unter der Voraussetzung* (11 c) *ist*[63])

$$s_m(\xi) = o(\sqrt{m}); \qquad \sigma_m(\xi) = o(\log m). \tag{35}$$

Die Formeln (3 c*) und (3 c**) aus § 1, 4 gelten dann also, wenn 3 (α) erfüllt ist; und (3 c***) gilt, wenn

$$m P_m = Q + O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \tag{α}$$

erfüllt ist.

Ebenso können in Satz III ($\varkappa = 2$) die beiden ersten Bedingungen (32**) durch

$$\varphi(P) = O\left(\frac{1}{\sqrt{|P|}}\right); \qquad P \cdot \operatorname{grad} \varphi(P) = O\left(\frac{1}{\log |P|}\right) \tag{β}$$

ersetzt werden.

Wetter ist unter der Voraussetzung (11 c) *stets* $\gamma_m = o(\sqrt{m})$. *Ist aber*

$$m P_m = Q + O\left(\frac{\log m}{\sqrt{m}}\right); \qquad \varphi(Q) = 0 \tag{γ}$$

so ist sogar $\gamma_m = o(\log m)$.

Es ist also z. B. in Verschärfung gewisser Formeln des § 2, immer unter der Voraussetzung (11 c):

$$s_m^{(2r)}(\xi) = o(m^{2r}\sqrt{m}); \quad s_m^{(2r)}(\xi + h_m) + s_m^{(2r)}(\xi - h_m) = o(m^{2r}\sqrt{m});$$
$$s_m^{(2r)}\left(\xi + \frac{u\pi}{2m}\right) + s_m^{(2r)}\left(\xi - \frac{u\pi}{2m}\right) = o(m^{2r}\log m);$$
$$s_m(\xi + h_m) + s_m(\xi - h_m) = o(\sqrt{m});$$
$$s_m\left(\xi + \frac{u\pi}{2m}\right) + s_m\left(\xi - \frac{u\pi}{2m}\right) = o(\log m);$$
$$\text{(c)} \qquad \frac{1}{2h_m}\int_{\xi - h_m}^{\xi + h_m} s_m(x)\,dx = o(\sqrt{m}); \qquad \int_{\xi - \frac{k\pi}{m}}^{\xi + \frac{k\pi}{m}} s_m(x)\,dx = o\left(\frac{\log m}{m}\right);$$
$$s_m^{(2r-1)}(\xi + h_m) - s_m^{(2r-1)}(\xi - h_m) = o(m^{2r}\sqrt{m}\,|h_m|) = o(m^{2r-1}\sqrt{m});$$
$$s_m^{(2r-1)}\left(\xi + \frac{k\pi}{m}\right) - s_m^{(2r-1)}\left(\xi - \frac{k\pi}{m}\right) = o(m^{2r-1}\log m);$$
$$\sigma_m^{(2r)}(\xi) = o(m^{2r}\log m); \quad \sigma_m^{(2r)}(\xi + h_m) + \sigma_m^{(2r)}(\xi - h_m) = o(m^{2r}\log m);$$
$$\sigma_m(\xi + h_m) + \sigma_m(\xi - h_m) = o(\log m);$$
$$\sigma_m^{(2r-1)}(\xi + h_m) - \sigma_m^{(2r-1)}(\xi - h_m) = o(m^{2r}\log m\,|h_m|) = o(m^{2r-1}\log m).$$

---

[63]) Wang, S. 95. Aus (11 ($\varkappa + 1$)) folgt nach Jacob 1 $\mu_m^{(\varkappa)}(\xi) = o(\log m)$, während Abschätzungen für die $\mu_m^{(i)}(\xi)$, $i < \varkappa$, in der Literatur anscheinend noch nicht gegeben sind.

5. Zum Schluß sei noch einmal darauf aufmerksam gemacht, das alle Formeln (b) des § 2 mit $A(\xi) = f(\xi)$ gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Stetigkeitsintervall von f gelten. Denn dort ist die Fourierreihe gleichmäßig gegen $f(\xi)$ (C, 1)-summierbar [11]).

§ 5.

Anwendung auf die zur Fourierreihe konjugierte Reihe.

1. Es sei jetzt $\overline{T}(x)$ aus $(\overline{1})$ die zur Fourierreihe $T(x)$ von $x = \xi$ konjugierte trigonometrische Reihe.

Die Voraussetzungen $(\overline{10})$ des § 3 sind in der Theorie der konjugierten Fourierreihe nicht immer zweckmäßig. Vielmehr sind, wie schon in der Einleitung vermerkt wurde, jetzt die Annahmen

$$(\overline{13})\quad \text{(a)}\ \bar{s}_m^*(\xi) = \bar{s}_m(\xi) - \psi_m \to \bar{A};\quad \text{(b)}\ \bar{\sigma}_m^*(\xi) = \bar{\sigma}_m(\xi) - \psi_m \to \bar{A};$$
$$\text{(c)}\ \bar{\tau}_m^*(\xi) = \bar{\tau}_m(\xi) - \psi_m \to \bar{A}$$

vorzuziehen, wobei

$$(12)\quad \psi_m = \psi_m(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{1}{m}}^{\pi} \psi(t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt;\quad \psi(t) = \psi_\xi(t) = f(\xi+t) - f(\xi-t)$$

gesetzt ist.

Für $(\overline{13\,a})$ gibt die „Konvergenztheorie" der konjugierten Fourierreihe hinreichende Bedingungen [15]). Für $(\overline{13\,b})$ bzw. $(\overline{13\,c})$ sind

$$(\overline{14})\quad \text{(b)}\ \frac{1}{t}\int_0^t |\psi(\tau) - D|\,d\tau \to 0;\quad \text{(c)}\ \frac{1}{t}\int_0^t \psi(\tau)\,d\tau \to D,\quad t \to +0$$

hinreichend [16]) [17]), und zwar ist dann resp.

$$(\overline{15})\quad \text{(a)}\ \bar{A} = \frac{D}{\pi}C;\quad \text{(b)}\ \bar{A} = \frac{D}{\pi}(C-1);\quad \text{(c)}\ \bar{A} = \frac{D}{\pi}\left(C - \frac{3}{2}\right)$$

zu setzen [18]), wobei C die Eulersche Konstante bedeutet. Die Bestimmung $(\overline{15\,a})$ ist an solchen „Sprungstellen" zu nehmen, wo die Konvergenzbedingung $(\overline{13\,a})$ erfüllt ist. *Die Bedingungen* $(\overline{14})$ *sind wieder für fast alle* ξ (*sogar mit* $D = 0$) *erfüllt* [16]). Auf Summierung höherer Ordnung werden wir, wegen der dann eintretenden rechnerischen Komplikationen, nicht eingehen [64]).

---

[64]) Wegen $(C, \varkappa)$-Summierbarkeit der konjugierten Fourierreihe siehe Paley, Verblunsky; vgl. Plessner 2, S. 1362.

Man beachte noch, daß aus $(\overline{13})$ dann und nur dann die entsprechenden Summierungsbedingungen $(\overline{10})$ des § 3 folgen, wenn in ξ die „konjugierte Funktion"

$$(36) \qquad \bar{f}(\xi) = \lim_{\eta \to +0} \frac{1}{2\pi} \int_{\eta}^{\pi} \psi(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \psi(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2}\, dt$$

existiert[65]). Unter den Voraussetzungen $(\overline{14})$ ist dazu jedenfalls $D = 0$ notwendig, während für $D \neq 0$ die konjugierte Fourierreihe stets eigentlich divergiert[14]). Da $\bar{f}(\xi)$ für fast alle ξ existiert, ist *die konjugierte Fourierreihe fast überall* $(C, 1)$*-summierbar zum Werte* $\bar{f}(\xi)$[15]).

Da die Fourierkoeffizienten Nullfolgen bilden, sind bei Anwendung der Ergebnisse des § 3 *die Formeln* (*) *anwendbar.*

2. Um unter den Voraussetzungen $(\overline{14})$ die allgemeinen Sätze des § 1 auf die konjugierte Fourierreihe anwenden zu können, müssen wir, bei Anwendung auf die Größen in $(\overline{13})$, zunächst den Beitrag, den die ψ_m liefern, gesondert betrachten.

Hierzu sei vorerst bemerkt, daß aus $(\overline{14\,c})$ mit $D = 0$, also aus

$$(\overline{14\,c^*}) \qquad \int_{0}^{t} \psi(\tau)\, d\tau = \Psi(t) = o(t)$$

die Abschätzung

$$(\alpha) \qquad \int_{1/m}^{\pi} \psi(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2}\, dt = -\Psi\left(\frac{1}{m}\right) \operatorname{ctg} \frac{1}{2m} + \frac{1}{2} \int_{1/m}^{\pi} \frac{\Psi(t)}{\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt$$

$$= o(1) + o\left(\int_{1/m}^{\pi} \frac{dt}{t} \right) = o(\log m)$$

und allgemeiner aus $(\overline{14\,c})$ die asymptotische Relation

$$(37) \qquad \psi_m = \frac{D}{2\pi} \int_{1/m}^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{t}{2}\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{1/m}^{\pi} (\psi(t) - D) \operatorname{ctg} \frac{t}{2}\, dt$$

$$= -\frac{D}{\pi} \log\left(\sin \frac{1}{2m}\right) + o(\log m) \simeq \frac{D}{\pi} \log m$$

folgt.

3. In dieser Nummer fassen wir die ψ_k aus (12) als die (C, 2)-Mittel einer $\sum_{0}^{\infty} c_k$ auf, während die s_k, σ_k resp. die zu diesen $\tau_k = \psi_k$ gehörigen Abschnitte bzw. (C, 1)-Mittel der Reihe sind.

Ferner machen wir zunächst die Voraussetzung $(\overline{14\,c^*})$, also $D = 0$.

---

[65]) Unter den Voraussetzungen $(\overline{14})$ folgt aus $\lim_{m \to \infty} \int_{1/m}^{\pi}$ leicht $\lim_{\eta \to 0} \int_{\eta}^{\pi}$. Das Integral rechts in (36) ist ein Cauchy-Lebesguesches Integral.

Hilfssatz 1c: *Unter den Voraussetzungen von Satz* I c *über* $\varphi(P)$ *und* P_m *folgt aus* ($\overline{14\,c^*}$) *für die zu den* $\tau_k = \psi_k$ *gehörigen Mittelbildungen* g_m *die Relation*

$$(38c)\qquad (g_m - \psi_m \varphi(0)) - (s_m - \psi_m)\,\varphi(m P_m) + (\sigma_{m-1} - \psi_m)\,(m P_m \cdot \operatorname{grad} \varphi(m P_m)) \to 0.$$

Beweis: Wir setzen $\tau_0 = 0$. Nach 2 (α) ist

$$(\alpha)\qquad \tau_k = \frac{1}{4\pi} \int_{1/k}^{\pi} \frac{\Psi(t)}{\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt + o(1) \equiv \tau_k^* + o(1); \qquad \tau_0^* = 0.$$

Mit den Bezeichnungen des Beweises von Satz I (§ 1, 2), aber $\gamma_m = g_m$ gesetzt, wird also nach § 1, 2 (β) und (ζ)

$$(\beta)\qquad t_m = \gamma_m - s_m \varphi(m P_m) - m \sigma_{m-1} \Delta^{(1)}_{m,\,m-1} = \sum_{k=0}^{m-3} \tau_k^* \binom{k+2}{2} \Delta^{(3)}_{m,\,k} + \tau^*_{m-2} \binom{m}{2} \Delta^{(2)}_{m,\,m-2} + o(1).$$

Wird

$$(\gamma)\qquad S_k^* = \tau_k^* \binom{k+2}{2} - \tau^*_{k-1} \binom{k+1}{2} = (\tau_k^* - \tau^*_{k-1}) \binom{k+1}{2} + (k+1)\,\tau_k^*; \quad \tau^*_{-1} = 0,$$

gesetzt, so ist weiter nach § 1, 2 (α)

$$(\delta)\qquad t_m = \sum_{k=0}^{m-2} S_k^* \Delta^{(2)}_{m,\,k} + o(1).$$

Hier ist, unter Beachtung von § 1, 2 (ε), da aus ($\overline{14\,c^*}$)

$$(\varepsilon)\qquad \int_{1/m}^{1} \frac{|\Psi(t)|}{t^4}\, dt = o\Big(\int_{1/m}^{1} \frac{dt}{t^3}\Big) = o(m^2)$$

folgt,

$$\sum_{k=0}^{m-2} (\tau_k^* - \tau^*_{k-1}) \binom{k+1}{2} \Delta^{(2)}_{m,\,k}$$

$$= \tau_1^* \Delta^{(2)}_{m,\,1} + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=2}^{m-2} \Delta^{(2)}_{m,\,k} \binom{k+1}{2} \int_{1/k}^{1/k-1} \frac{\Psi(t)}{\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt$$

$$(\zeta)\qquad = O\Big(\frac{1}{m^2}\Big) + O\Big(\frac{1}{m^2} \sum_{2}^{m-2} k^2 \int_{1/k}^{1/k-1} \frac{|\Psi(t)|}{t^3}\, dt\Big)$$

$$= o(1) + O\Big(\frac{1}{m^2} \int_{1/m-2}^{1} \frac{|\Psi(t)|}{t^4}\, dt\Big) = o(1).$$

Wir finden also

$$(\eta) \qquad t_m = \sum_{k=0}^{m-2} \tau_k^* (k+1)\, \Delta_{m,k}^{(2)} + o(1).$$

Jetzt werde weiter

$$(\vartheta) \qquad s_k^* = \tau_k^* (k+1) - \tau_{k-1}^* k = (\tau_k^* - \tau_{k-1}^*) k + \tau_k^*$$

gesetzt, so daß nach § 1, 2 (α)

$$(\iota) \qquad t_m = \sum_{k=0}^{m-1} s_k^* \Delta_{m,k}^{(1)} - m \tau_{m-1}^* \Delta_{m,m-1}^{(1)} + o(1)$$

wird. Hier ist wieder, wegen ($\overline{14\,c^*}$) und § 1, 2 (ε),

$$(\varkappa) \qquad \sum_{k=0}^{m-1} (\tau_k^* - \tau_{k-1}^*) k \Delta_{m,k}^{(1)} = \tau_1^* \Delta_{m,1}^{(1)} + O\Big(\frac{1}{m} \sum_{2}^{m-1} k \int_{1/k}^{1/k-} \frac{|\Psi(t)|}{t^2}\, dt\Big)$$

$$= O\Big(\frac{1}{m}\Big) + O\Big(\frac{1}{m} \int_{1/m-1}^{1} \frac{|\Psi(t)|}{t^3}\, dt\Big) = o(1),$$

also

$$(\lambda) \qquad t_m = \sum_{k=0}^{m-1} \tau_k^* \Delta_{m,k}^{(1)} - m \tau_{m-1}^* \Delta_{m,m-1}^{(1)} + o(1).$$

Weiter wird wegen

$$(\mu) \qquad \Delta_{m,k}^{(1)} = \varphi(k P_m) - \varphi((k+1) P_m); \quad \varphi(k P_m) = \varphi(0) + O\Big(\frac{k}{m}\Big)$$

und unter Beachtung von ($\varkappa$)

$$(\nu) \qquad \begin{aligned} \sum_{k=0}^{m-1} \tau_k^* \Delta_{m,k}^{(1)} &= \sum_{k=0}^{m-1} (\tau_k^* - \tau_{k-1}^*)\, \varphi(k P_m) - \tau_{m-1}^* \varphi(m P_m) \\ &= \tau_{m-1}^* (\varphi(0) - \varphi(m P_m)) + O\Big(\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} |\tau_k^* - \tau_{k-1}^*|\, k\Big) \\ &= \tau_{m-1}^* (\varphi(0) - \varphi(m P_m)) + o(1), \end{aligned}$$

so daß

$$(o) \qquad t_m = \tau_{m-1}^* (\varphi(0) - \varphi(m P_m) - m \Delta_{m,m-1}^{(1)}) + o(1)$$

folgt. Wegen

$$(\pi) \qquad \tau_m^* - \tau_{m-1}^* = \frac{1}{4\pi} \int_{1/m}^{1/m-1} \frac{\Psi(t)}{\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = o\Big(\int_{1/m}^{1/m-1} \frac{dt}{t}\Big) = o(1)$$

und (α) wird weiter

$$(\varrho) \qquad t_m = \psi_m (\varphi(0) - \varphi(m P_m)) - m \psi_m \Delta_{m,m-1}^{(1)} + o(1).$$

Schließlich ist nach (π) und 2 (α)

$$\psi_{m-1} - \psi_{m-2} = (\tau_{m-1}^* - \tau_{m-2}^*) + o(1) = o(1); \quad m \psi_m = o(m \log m);$$

$$(\sigma) \qquad \begin{aligned} m \sigma_{m-1} = S_{m-1} &= S_{m-1}^{(2)} - S_{m-2}^{(2)} = \binom{m+1}{2} \psi_{m-1} - \binom{m}{2} \psi_{m-2} \\ &= \binom{m}{2} (\psi_{m-1} - \psi_{m-2}) + m \psi_{m-1} = o(m^2), \end{aligned}$$

so daß $\Delta^{(1)}_{m,\,m-1}$ in (β) und (ϱ) wegen § 1, 3 (β) durch $-(P_m \cdot \operatorname{grad} \varphi(m P_m))$ ersetzt werden darf. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

4. Entsprechend beweist man die beiden folgenden Sätze:

Hilfssatz 1a: *Unter den Voraussetzungen von Satz* Ia *über* $\varphi(P)$ *und* P_m *folgt aus* $(\overline{14\,c^*})$ *für die zu den* $s_k = \psi_k$ *gehörigen Mittelbildungen* g_m *die Relation*

(38a) $$g_m - \psi_m \varphi \cdot (0) \to 0.$$

Hilfssatz 1b: *Unter den Voraussetzungen von Satz* Ib *über* $\varphi(P)$ *und* P_m *folgt aus* $(\overline{14\,c^*})$ *für die zu den* $\sigma_k = \psi_k$ *gehörigen Mittelbildungen* g_m *die Relation*

(38b) $$(g_m - \psi_m \varphi(0)) - (s_m - \psi_m)\, \varphi(m P_m) \to 0.$$

5. Die allgemeine Voraussetzung $(\overline{14\,c})$ läßt sich in bekannter Weise durch „Elimination des Sprunges" auf die speziellere $(\overline{14\,c^*})$ zurückführen. Für die Funktion

(39) $$F(x) = F_\xi(x) \equiv \operatorname{sign}(x - \xi) \cdot \frac{D}{2}$$

gilt in $|x - \xi| < \pi$ die Fouriersche Entwicklung[19])

(40) $$F(x) = \frac{2D}{\pi} \sum_{u=1}^{\infty} \frac{\sin u\,(x - \xi)}{u}.$$

Für $F_\xi(x)$ ist $\psi_\xi(t) \equiv D$, also

(41) $$\Psi_m = \frac{D}{2\pi} \int_{1/m}^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{t}{2}\, dt = -\frac{D}{\pi} \log\left(\sin \frac{1}{2m}\right) = \frac{D}{\pi} \log 2m + o(1).$$

Ist also für $f(x)$ in $x = \xi$ die Voraussetzung $(\overline{14\,c})$ erfüllt, so für $f^*(x) = f(x) - F_\xi(x)$ die Voraussetzung $(\overline{14\,c^*})$.

Für die Abschnitte bzw. die (C, 1)- und (C, 2)-Mittel der konjugierten Reihe von $\sum_{u=1}^{\infty} \frac{\sin u\,x}{u}$, d. i. $\sum_{u=1}^{\infty} \frac{\cos u\,x}{u}$, in $x = 0$ ist

$$\bar{S}_m = \sum_1^m \frac{1}{u} = \sum_1^m \frac{1}{n} - \sum_1^g \frac{1}{g} = \log m + C - \tfrac{1}{2}\left(\log \frac{m}{2} + C\right) + o(1)$$
$$= \tfrac{1}{2}(\log 2m + C) + o(1),$$

(42) $$\bar{\Sigma}_m = \sum_1^m \frac{1}{u}\left(1 - \frac{u}{m+1}\right) = \tfrac{1}{2}(\log 2m + C - 1) + o(1),$$

$$\bar{T}_m = \frac{\sum_1^m \frac{1}{u}\binom{m+2-u}{2}}{\binom{m+2}{2}} = \sum_1^m \frac{1}{u} - \frac{m + \frac{3}{2}}{\binom{m+2}{2}} \sum_{u=1}^m 1 + \frac{1}{2\binom{m+2}{2}} \sum_{u=1}^m u$$
$$= \tfrac{1}{2}(\log 2m + C - \tfrac{3}{2}) + o(1),$$

wo C die Eulersche Konstante bezeichnet. Endlich bedeute

$$G_m = \sum_1^m \frac{1}{u}\varphi(u P_m), \tag{16}$$

die zu den $c_u = \frac{1}{u}$, $c_0 = 0$ gehörige Mittelbildung γ_m.

6. An die Stelle des allgemeinen Satzes Ic tritt jetzt in der Theorie der konjugierten Fourierreihe der folgende

Satz IVc: *Ist unter den Voraussetzungen von Satz* Ic *über* $\varphi(P)$ *und* P_m *in* $x = \xi$ *die Bedingung*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \psi(\tau)\,d\tau \to D, \qquad t \to +0 \tag{14c}$$

erfüllt, so gilt für die aus den $c_k = \beta_k(\xi)$ *gebildeten Mittelbildungen* γ_m *die Relation*

$$\begin{aligned}(43c)\quad &\left(\gamma_m - \frac{2D}{\pi}G_m\right) - \varphi(0)\left\{\psi_m(\xi) - \frac{D}{\pi}\log 2m\right\} - \left(\bar{s}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi}C\right)\varphi(m P_m)\\ &+ \left(\bar{\sigma}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi}(C-1)\right)(m P_m \cdot \operatorname{grad}\varphi(m P_m)) \to 0,\end{aligned}$$

wo C *die Eulersche Konstante bezeichnet.*

Beweis: Es sei zunächst $D = 0$, so daß nach (13c) und (15c)

$$\bar{\tau}_m^*(\xi) = \bar{\tau}_m(\xi) - \psi_m(\xi) \to 0 \tag{13c*}$$

gilt. Nach Satz Ic wird also mit den g_m, s_m, σ_m des Hilfssatzes 1c

$$\begin{aligned}(\alpha)\quad &(\gamma_m - g_m) - (\bar{s}_m(\xi) - s_m)\varphi(m P_m)\\ &+ (\bar{\sigma}_{m-1}(\xi) - \sigma_{m-1})(m P_m \cdot \operatorname{grad}\varphi(m P_m)) \to 0.\end{aligned}$$

Aus (38c) folgt jetzt (man darf, da die $\beta_k(\xi)$ eine Nullfolge bilden, nach § 1, 3 (γ), $\bar{\sigma}_{m-1}(\xi)$ durch $\bar{\sigma}_m(\xi)$ ersetzen)

$$(43c^*)\quad (\gamma_m - \varphi(0)\,\psi_m(\xi)) - \bar{s}_m^*(\xi)\varphi(m P_m) + \bar{\sigma}_m^*(\xi)(m P_m \cdot \operatorname{grad}\varphi(m P_m)) \to 0$$

d. i. die Behauptung in diesem Falle.

Wenn $D \neq 0$ ist, wende man diese Formel (43c*) auf die Funktion $f^*(x) = f(x) - F_\xi(x)$ aus 5. an[66]). Dann wird

$$\begin{aligned}(\beta)\quad &(\gamma_m - G_m) - \varphi(0)\{\psi_m(\xi) - \Psi(m)\} - \left\{\bar{s}_m^*(\xi) - \left(\frac{2D}{\pi}\bar{S}_m - \Psi_m\right)\right\}\varphi(m P_m)\\ &+ \left\{\bar{\sigma}_m^*(\xi) - \left(\frac{2D}{\pi}\bar{\Sigma}_m - \Psi_m\right)\right\}(m P_m \cdot \operatorname{grad}\varphi(m P_m)) \to 0,\end{aligned}$$

und hieraus folgt wegen (41) und (42) die Behauptung.

---

[66]) Man beachte, daß aus (13c*) dabei $\bar{\tau}_m^*(\xi) - \left(\frac{2D}{\pi}\bar{T}_m - \Psi_m\right) \to 0$, also nach (41), (42) gerade (13c), (15c) folgt.

7. Entsprechend ergeben die Hilfssätze 1a und 1b die beiden folgenden Sätze

Satz IVa: *Ist unter den Voraussetzungen von Satz* Ia *über* $\varphi(P)$ *und* P_m *an der „Sprungstelle“* [67]) $x = \xi$ *die Bedingung*

$$\overline{(15\,a)} \qquad \bar{s}_m^*(\xi) \to \frac{D}{\pi} C$$

erfüllt, so gilt für die aus den $c_k = \beta_k(\xi)$ *gebildeten Mittelbildungen* γ_m *die Relation*

$$\overline{(43\,a)} \qquad \left(\gamma_m - \frac{2D}{\pi} G_m\right) - \varphi(0)\left\{\psi_m(\xi) - \frac{D}{\pi}\log 2m\right\} \to 0.$$

Satz IVb: *Ist unter den Voraussetzungen von Satz* Ib *über* $\varphi(P)$ *und* P_m *in* $x = \xi$ *die Bedingung*

$$\overline{(14\,b)} \qquad \frac{1}{t}\int_0^t |\psi(\tau) - D|\, d\tau \to 0, \quad t \to +0$$

erfüllt, so gilt für die aus den $c_k = \beta_k(\xi)$ *gebildeten Mittelbildungen* γ_m *die Relation*

$$\overline{(43\,b)} \left(\gamma_m - \frac{2D}{\pi} G_m\right) - \varphi(0)\left\{\psi_m(\xi) - \frac{D}{\pi}\log 2m\right\} - \left(\bar{s}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi} C\right)\varphi(m P_m) \to 0,$$

wo C *die Eulersche Konstante bezeichnet.*

8. Die beiden folgenden Hilfssätze entsprechen den Abschätzungen aus §4, 4 bei der Fourierreihe:

Hilfssatz 2b [20]): *Unter der Voraussetzung* (14b) *ist*

$$\overline{(44\,b)} \qquad \bar{s}_m^*(\xi) = o(\log m).$$

Hilfssatz 2c: *Unter der Voraussetzung* (14c) *ist*

$$\overline{(44\,c)} \qquad (\alpha)\ \bar{s}_m^*(\xi) = o\left(\sqrt{m}\right); \quad (\beta)\ \bar{\sigma}_m^*(\xi) = o(\log m).$$

Der Hilfssatz 2b ist bekannt [20]). Wegen (41), (42) darf ferner $D = 0$, also $\overline{(14\,c^*)}$ vorausgesetzt werden:

Beweis von (α): Es ist

$$(45)\quad \bar{s}_m(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \psi(t)\left(\sum_{k=1}^{m} \sin kt\right) dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \psi(t)\left|\operatorname{ctg}\frac{t}{2} - \frac{\cos(2m+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right| dt.$$

[67]) D. h. $\overline{(14\,c)}$ ist in $x = \xi$ erfüllt.

Hier ist

$$\int_0^{1/m} \psi(t)\Big(\sum_1^m \sin k t\Big)\,dt = \Psi\Big(\frac{1}{m}\Big)\sum_1^m \sin\frac{k}{m} - \int_0^{1/m} \Psi(t)\Big(\sum_1^m k\cos k t\Big)\,dt$$

$$= O\Big(m\Big|\Psi\Big(\frac{1}{m}\Big)\Big|\Big) + o\Big(m^2\int_0^{1/m} t\,dt\Big) = o(1),$$

$$(\gamma)\qquad \int_{1/m}^{\frac{1}{\sqrt{m}}} \psi(t)\frac{\cos(2m+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}dt = \Psi(t)\frac{\cos(2m+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\Big|_{1/m}^{\frac{1}{\sqrt{m}}} - \int_{1/m}^{\frac{1}{\sqrt{m}}} \Psi(t)\left(\frac{\cos(2m+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)' dt$$

$$= O\Big(m\Big|\Psi\Big(\frac{1}{m}\Big)\Big| + \sqrt{m}\,\Big|\Psi\Big(\frac{1}{\sqrt{m}}\Big)\Big|\Big) + o\Big(\int_{1/m}^{\frac{1}{\sqrt{m}}} t\Big(\frac{m}{t}+\frac{1}{t^2}\Big)dt\Big) = o(\sqrt{m}),$$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{m}}}^{\pi} \psi(t)\frac{\cos(2m+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}dt = \frac{1}{\sin\frac{1}{2\sqrt{m}}}\int_{\frac{1}{\sqrt{m}}}^{\vartheta} \psi(t)\cos(2m+1)\frac{t}{2}\,dt = o(\sqrt{m}),$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}} < \vartheta < \pi,$$

woraus (α) folgt.

Beweis von (β): Es ist

$$(46)\quad \sigma_m(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \psi(t)\Big(\sum_1^m \sin k t\Big(1-\frac{k}{m+1}\Big)\Big)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \psi(t)\Big\{\operatorname{ctg}\frac{t}{2} - \frac{1}{m+1}\frac{\sin(m+1)t}{2\sin^2\frac{t}{2}}\Big\}dt.$$

Hier ist

$$\int_0^{1/m} \psi(t)\Big(\sum_1^m \sin k t\Big(1-\frac{k}{m+1}\Big)\Big)dt$$

$$= \Psi\Big(\frac{1}{m}\Big)\cdot\sum_1^m \sin\frac{k}{m}\Big(1-\frac{k}{m+1}\Big) - \int_0^{1/m} \Psi(t)\Big(\sum_1^m k\cos k t\Big(1-\frac{k}{m+1}\Big)\Big)dt$$

$$(\delta)\qquad = O\Big(m\Big|\Psi\Big(\frac{1}{m}\Big)\Big|\Big) + o\Big(m^2\int_0^{1/m} t\,dt\Big) = o(1),$$

$$\frac{1}{m+1}\int_{1/m}^{\pi} \psi(t)\frac{\sin(m+1)t}{\sin^2\frac{t}{2}}dt = -\frac{\Psi\Big(\frac{1}{m}\Big)}{m+1}\frac{\sin\frac{m+1}{m}}{\sin^2\frac{1}{2m}} - \frac{1}{m+1}\int_{1/m}^{\pi} \Psi(t)\left(\frac{\sin(m+1)t}{\sin^2\frac{t}{2}}\right)' dt$$

$$= O\Big(m\Big|\Psi\Big(\frac{1}{m}\Big)\Big|\Big) + o\Big(\frac{1}{m}\int_{1/m}^{\pi} t\cdot\frac{m}{t^2}\,dt\Big) = o(\log m),$$

woraus (β) folgt.

9. Für die Anwendung der Sätze IV sind wieder Bemerkungen, analog denen in § 4, 4 bei Fourierreihen, von Bedeutung.

I: Unter der *Voraussetzung von Satz* IVa vereinfacht sich die Relation (43a) zu

(43a*)[68] $$\gamma_m - \frac{2D}{\pi} G_m \to 0,$$

wenn entweder $\varphi(0) = 0$ *ist oder*

(α) $$\psi_m(\xi) = \frac{D}{\pi} \log 2m + o(1)$$

gilt. Das Letztere ist z. B. unter der Voraussetzung $\Psi(t) = O(t^\alpha)$, $\alpha > 1$, richtig.

II: Unter der *Voraussetzung von Satz* IVb wird, wenn

(β) $$m P_m = Q + O\left(\frac{1}{\log m}\right)$$

ist, (43b) zu

(43b*) $$\left(\gamma_m - \frac{2D}{\pi} G_m\right) - \varphi(0)\left(\psi_m(\xi) - \frac{D}{\pi}\log 2m\right) - \left(\bar{s}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi} C\right)\varphi(Q) \to 0.$$

Ist also $\varphi(Q) = 0$, *so erhält man*

(43b**) $$\left(\gamma_m - \frac{2D}{\pi} G_m\right) - \varphi(0)\left(\psi_m(\xi) - \frac{D}{\pi}\log 2m\right) \to 0.$$

Konvergiert umgekehrt die linke Seite von (43b**) *und ist* $\varphi(Q) \neq 0$, *so ist* $\bar{s}_m^*(\xi)$ *bereits konvergent. Man beachte den wichtigen Fall* $\varphi(0) = 0$[68].

III. Unter der *Voraussetzung von Satz* IVc wird, wenn (β) erfüllt ist, (43c) zu

(43c*) $$\left(\gamma_m - \frac{2D}{\pi} G_m\right) - \varphi(0)\left(\psi_m(\xi) - \frac{D}{\pi}\log 2m\right)$$

$$- \left(\bar{s}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi} C\right)\varphi(m P_m) + \left(\bar{\sigma}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi}(C-1)\right)(Q \cdot \operatorname{grad} \varphi(Q)) \to 0.$$

Ist insbesondere $Q \cdot \operatorname{grad} \varphi(Q) = 0$, *so erhält man*

(43c**) $$\left(\gamma_m - \frac{2D}{\pi} G_m\right) - \varphi(0)\left(\psi_m(\xi) - \frac{D}{\pi}\log 2m\right) - \left(\bar{\sigma}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi} C\right)\varphi(m P_m) \to 0.$$

Konvergiert umgekehrt die linke Seite von (43c**) *und ist* $Q \cdot \operatorname{grad} \varphi(Q) \neq 0$, *so ist bereits* $\bar{s}_m^*(\xi)$ *konvergent.*

Um (43c*) in der Form

(43c***) $$\left(\gamma_m - \frac{2D}{\pi} G_m\right) - \varphi(0)\left(\psi_m(\xi) - \frac{D}{\pi}\log 2m\right)$$

$$- \left(\bar{s}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi} C\right)\varphi(Q) + \left(\bar{\sigma}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi}(C-1)\right)(Q \cdot \operatorname{grad} \varphi(Q)) \to 0$$

---

[68] (43a*) besagt die Äquikonvergenz der entsprechenden linearen Mittelbildung bei einer beliebigen konjugierten Fourierreihe mit der bei der speziellen Funktion $\Psi(x)$ aus (40).

schreiben zu können, muß man

$$(\gamma) \qquad m P_m = Q + O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$$

voraussetzen. *Ist nun* $\varphi(Q) = 0$, *so wird*

$$\overline{(43\,c^{****})} \quad \left(\gamma_m - \frac{2D}{\pi} G_m\right) - \varphi(0)\left(\psi_m(\xi) - \frac{D}{\pi}\log 2m\right) + \left(\bar{\sigma}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi}(C-1)\right)(Q \cdot \operatorname{grad}\varphi(Q)) \to 0.$$

Konvergiert umgekehrt die linke Seite von $\overline{(43\,c^{****})}$, *und ist* $\varphi(Q) \neq 0$, *so ist bereits* $\bar{s}_m^*(\xi)$ *konvergent.*

Ist schließlich $\varphi(Q) = 0$ *und* $Q \cdot \operatorname{grad}\varphi(Q) = 0$, *so gilt*

$$\overline{(43\,c^{*****})} \quad \left(\gamma_m - \frac{2D}{\pi} G_m\right) - \varphi(0)\left(\psi_m(\xi) - \frac{D}{\pi}\log 2m\right) \to 0.$$

Wenn umgekehrt die linke Seite von $\overline{(43\,c^{*****})}$ *konvergiert,* $\varphi(Q) = 0$ *aber* $Q \cdot \operatorname{grad}\varphi(Q) \neq 0$ *ist, so ist bereits* $\bar{\sigma}_m^*(\xi)$ *konvergent. Ist aber* $\varphi(Q) \neq 0$, *so ist sogar* $\bar{s}_m^*(\xi)$ *konvergent* (vgl. § 1, 4, II). *Man beachte wieder den wichtigen Fall* $\varphi(0) = 0$[68]).

10. Von besonderem Interesse sind die beiden folgenden Bemerkungen zu den Sätzen IV:

Satz Vb: *Unter den Annahmen von Satz* IVb *gilt*

$$\overline{(19\,b)} \qquad \frac{\gamma_m}{\log m} \to \frac{D}{\pi}\varphi(0).$$

Satz Vc: *Unter den Annahmen von Satz* IVc *gilt*

$$\overline{(19\,c)} \qquad \frac{\gamma_m - \bar{s}_m(\xi)\,\varphi(m P_m)}{\log m} - \frac{D}{\pi}(\varphi(0) - \varphi(m P_m)) \to 0,$$

und insbesondere, wenn

$$(\alpha) \qquad m P_m = Q + O\left(\frac{\log m}{\sqrt{m}}\right); \quad \varphi(Q) = 0$$

ist, wieder

$$\overline{(19\,c^*)} \qquad \frac{\gamma_m}{\log m} \to \frac{D}{\pi}\varphi(0).$$

Der Beweis beruht auf den Hilfssätzen 2, der Formel (37) und der asymptotischen Gleichung

$$(\beta) \quad G_m = \sum_{u=1}^{m} \frac{1}{u}\varphi(u P_m) = \varphi(0)\sum_{u=1}^{m}\frac{1}{u} + O\left(\frac{1}{m}\sum_{u=1}^{m} 1\right) = \frac{\varphi(0)}{2}\log m + O(1).$$

Man beachte noch, daß aus $\overline{(19\,c)}$ $\gamma_m = o(\sqrt{m})$ *folgt.*

11. In den folgenden Nummern bringen wir wieder durch Spezialisierung von φ Anwendungen der obigen Sätze. Auf die Einzelheiten der

Rechnung wird nicht eingegangen. Die Buchstaben (a), (b), (c) beziehen sich bzw. auf die Annahmen der Sätze IV und V gleichen Buchstabens.

Alle Formeln (b) *und* (c) *gelten, sogar mit* $D = 0$, *für fast alle* ξ.

12. **Konjugierte Abschnitte:**

$$\varphi(x) \equiv 1; \quad \gamma_m = \bar{s}_m(\xi).$$

$$\text{(b)} \qquad \frac{\bar{s}_m(\xi)}{\log m} \to \frac{D}{\pi}.$$

Das ist die mit dem Hilfssatze 2b äquivalente Sprungformel von Lukàcs [21]). Aus ihr ist der Satz von Pringsheim [14]), daß *die konjugierte Fourierreihe an Sprungstellen (mit* $D \neq 0$*) eigentlich divergiert*, ersichtlich. Ferner folgt aus ihr, daß *eine Funktion mit Fourierkoeffizienten* $o\left(\frac{1}{n}\right)$ *keine Sprungstellen mit* $D \neq 0$ *besitzen kann.*

13. **Konjugierte Abschnittsableitungen gerader Ordnung:**

$$\varphi(x) = x^{2r}; \quad x_m = \frac{1}{m}; \quad \gamma_m = (-1)^r \frac{\bar{s}_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}}; \quad G_m = \frac{1}{m^{2r}} \sum_1^m u^{2r-1} \to \frac{1}{4r},$$

$$\text{(a)} \qquad (-1)^r \frac{\bar{s}_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}} \to \frac{D}{\pi \cdot 2r},$$

$$\text{(b)} \qquad (-1)^r \frac{\bar{s}_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}} - \left(\bar{s}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi} C\right) \to \frac{D}{\pi \cdot 2r}; \quad \bar{s}_m^{(2r)}(\xi) = o(m^{2r} \log m),$$

$$\text{(c)} \qquad \begin{cases} (-1)^r \dfrac{\bar{s}_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}} - \left(\bar{s}_m^*(\xi) - \dfrac{D}{\pi} C\right) + 2r\left(\bar{\sigma}_m^*(\xi) - \dfrac{D}{\pi}(C-1)\right) \to \dfrac{D}{\pi \cdot 2r}, \\ \dfrac{(-1)^{r-1} \dfrac{\bar{s}_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}} + \bar{s}_m(\xi)}{\log m} \to \dfrac{D}{\pi}; \quad \bar{s}_m^{(2r)}(\xi) = o(m^{2r} \sqrt{m}). \end{cases}$$

Wir schließen zwei Bemerkungen an:

I. *Wenn die Fourierkoeffizienten* $O\left(\frac{1}{n}\right)$ *sind, folgt im Falle* (14b), *bereits die Konvergenz der* $\bar{s}_m^*(\xi)$.

In der Tat ergibt dann (b), bei festem r, die Relation [69])

$$\text{(α)} \qquad \bar{s}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi} C = o(1) + O\left(\frac{1}{r}\right),$$

woraus mit $r \to \infty$ die Behauptung folgt (vgl. § 1, 7).

II. Genau so beweist man aus der zweiten Formel (c):

Wenn die Fourierkoeffizienten $C\left(\frac{\log n}{n}\right)$ *sind, so gilt die Lukàcssche Formel* (12b) *bereits im Falle* (14c).

[69]) Das $O\left(\frac{1}{r}\right)$ in (α) gilt gleichmäßig in r.

14. **Abschnittsableitungen ungerader Ordnung:**

$$\varphi(x) = x^{2r-1}; \quad x_m = \frac{1}{m}; \quad \gamma_m = (-1)^{r-1}\frac{s_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}};$$

$$G_m = \frac{1}{m^{2r-1}}\sum_1^m u^{2(r-1)} \to \frac{1}{2(2r-1)},$$

$\overline{(a)}$[24] $$(-1)^{r-1}\frac{s_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}} \to \frac{D}{\pi(2r-1)},$$

$\overline{(b)}$ $$(-1)^{r-1}\frac{s_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}} - \left(\bar{s}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi}C\right) \to \frac{D}{\pi(2r-1)};$$

$$s_m^{(2r-1)}(\xi) = o(m^{2r-1}\log m),$$

$\overline{(c)}$
$$\begin{cases} (-1)^{r-1}\dfrac{s_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}} - \left(\bar{s}_m^*(\xi) - \dfrac{D}{\pi}C\right) + (2r-1)\left(\bar{\sigma}_m^*(\xi) - \left(\dfrac{D}{\pi}C - 1\right)\right) \\ \qquad\qquad \to \dfrac{D}{\pi(2r-1)}, \\ (-1)^r\dfrac{s_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}} + \bar{s}_m(\xi) \\ \dfrac{}{\log m} \to \dfrac{D}{\pi}; \quad s_m^{(2r-1)}(\xi) = o(m^{2r-1}\sqrt{m}). \end{cases}$$

Wir können jetzt die Bemerkung 13, I verschärfen:

Wenn die Fourierkoeffizienten $O\left(\frac{1}{n}\right)$ *sind, folgt im Falle* $(\overline{14\,c})$ *bereits die Konvergenz der* $\bar{s}_m^*(\xi)$.

In der Tat ergibt Subtraktion beider Formeln $(\bar{c})$ aus 13 und 14

(α) $$(-1)^{r-1}\left\{\frac{s_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}} + \frac{\bar{s}_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}}\right\} - \left(\bar{\sigma}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi}(C-1)\right) \to \frac{D}{\pi}\cdot\frac{1}{2r(2r-1)},$$

und hieraus folgt zunächst, wie oben, $\bar{\sigma}_m^*(\xi) \to \frac{D}{\pi}(C-1)$ und dann $\bar{s}_m^*(\xi) \to \frac{D}{\pi}C$.

15. **Koppelung der konjugierten Abschnitte**[70]**:**

I. $\varphi(x) = \cos x; \quad x_m = h_m; \quad \gamma_m = \dfrac{\bar{s}_m(\xi+h_m) + \bar{s}_m(\xi-h_m)}{2}.$

$\overline{(b)}$ $$\frac{\bar{s}_m(\xi+h_m) + \bar{s}_m(\xi-h_m)}{2\log m} \to \frac{D}{\pi},$$

$\overline{(c)}$
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\log m}\left\{\dfrac{\bar{s}_m(\xi+h_m) + \bar{s}_m(\xi-h_m)}{2} - \bar{s}_m(\xi)\cos m h_m\right\} - \dfrac{D}{\pi}(1-\cos m h_m) \to 0, \\ \dfrac{\bar{s}_m\left(\xi+\dfrac{u\pi}{2m}\right) + \bar{s}_m\left(\xi-\dfrac{u\pi}{2m}\right)}{2\log m} \to \dfrac{D}{\pi}; \\ \dfrac{s_m\left(\xi+\dfrac{k\pi}{m}\right) + 2(-1)^{k-1}\bar{s}_m(\xi) + \bar{s}_m\left(\xi-\dfrac{k\pi}{m}\right)}{4\log m} \to \dfrac{D}{\pi}\cdot\dfrac{1+(-1)^{k-1}}{2}. \end{cases}$$

[70]) Vgl. auch 17, III, dieses Paragraphen.

II. $\varphi(x) = \dfrac{\sin x}{x}$; $\quad x_m = h_m \neq 0$; $\quad \gamma_m = \dfrac{1}{2h_m}\int\limits_{\xi-h_m}^{\xi+h_m} \bar{s}_m(x)\,dx$,

(b) $\quad \dfrac{1}{2h_m \log m}\int\limits_{\xi-h_m}^{\xi+h_m} \bar{s}_m(x)\,dx \to \dfrac{D}{\pi}$, $\qquad$ (c) $\quad \dfrac{m}{2k\pi \log m}\int\limits_{\xi-\frac{k\pi}{m}}^{\xi+\frac{k\pi}{m}} \bar{s}_m(x)\,dx \to \dfrac{D}{\pi}$.

16. **Koppelung der Abschnitte:**

$$\varphi(x,y) = x\cdot\frac{\sin y}{y};\quad x_m = \frac{1}{m};\quad y_m = h_m \neq 0;\quad \gamma_m = \frac{s_m(\xi+h_m) - s_m(\xi-h_m)}{2mh_m}$$

$$G_m = \frac{1}{mh_m}\sum_1^m \frac{\sin u h_m}{u} = \frac{1}{2mh_m}\int_0^{mh_m}\frac{\sin t}{t}\,dt + o(1),$$

(a) $$\frac{s_m(\xi+h_m) - s_m(\xi-h_m)}{2} - \frac{D}{\pi}\int_0^{mh_m}\frac{\sin t}{t} = o(m|h_m|) = o(1),$$

(b) $$\frac{s_m\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right) - s_m\left(\xi-\frac{k\pi}{m}\right)}{2} \to \frac{D}{\pi}\int_0^{k\pi}\frac{\sin t}{t}$$ [22]);

$$s_m(\xi+h_m) - s_m(\xi-h_m) = o(m\log m\,|h_m|) = o(\log m),$$

(c)
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\log m}\left\{\dfrac{s_m(\xi+h_m) - s_m(\xi-h_m)}{2} - \bar{s}_m(\xi)\sin m h_m\right\} + \dfrac{D}{\pi}\sin m h_m \\ \qquad = o(m|h_m|) = o(1), \\ s_m(\xi+h_m) - s_m(\xi-h_m) = o(m\sqrt{m}\,|h_m|) = o(\sqrt{m}); \\ s_m\left(\xi+\dfrac{k\pi}{m}\right) - s_m\left(\xi-\dfrac{k\pi}{m}\right) = o(\log m). \end{cases}$$

17. **Koppelung der konjugierten Abschnittsableitungen gerader Ordnung:**

I. $\varphi(x,y) = x^{2r}\cos y$; $\quad x_m = \dfrac{1}{m}$, $y_m = h_m$;

$$\gamma_m = (-1)^r\frac{\bar{s}_m^{(2r)}(\xi+h_m) + \bar{s}_m^{(2r)}(\xi-h_m)}{2m^{2r}};$$

$$G_m = \frac{1}{m^{2r}}\sum_1^m u^{2r-1}\cos u h_m = \frac{(-1)^{r-1}}{2^{2r}}\frac{d^{2r-1}}{d\tau^{2r-1}}\left(\frac{\sin^2\tau}{\tau}\right)_{\tau=\frac{mh_m}{2}} + o(1)$$ [71]).

---

[71]) Es sei m ungerade. Dann ist

$$\sum_1^m \sin u t = \frac{1-\cos(m+1)t}{2\sin t} = \frac{\sin^2(m+1)\frac{t}{2}}{t} + \frac{1-\cos(m+1)t}{2}\left\{\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right\}.$$

Wegen

$$\frac{d^k}{dt^k}\left\{\frac{1-\cos(m+1)t}{2}\left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right)\right\} = O(m^k)$$

(a) $$\frac{\bar{s}_m^{(2r)}(\xi+h_m)+\bar{s}_m^{(2r)}(\xi-h_m)}{2m^{2r}}+\frac{D}{2^{2r-1}\pi}\frac{d^{2r-1}}{d\tau^{2r-1}}\left(\frac{\sin^2\tau}{\tau}\right)_{\tau=\frac{mh_m}{2}}\to 0.$$

(b) $$\bar{s}_m^{(2r)}(\xi+h_m)+\bar{s}_m^{(2r)}(\xi-h_m)=o(m^{2r}\log m);$$

$$\frac{\bar{s}_m^{(2r)}\left(\xi+\frac{u\pi}{2m}\right)+\bar{s}_m^{(2r)}\left(\xi-\frac{u\pi}{2m}\right)}{2m^{2r}}\to-\frac{D}{2^{2r-1}\pi}\frac{d^{2r-1}}{d\tau^{2r-1}}\left(\frac{\sin^2\tau}{\tau}\right)_{\tau=\frac{u\pi}{4}}.$$

(c) $$\bar{s}_m^{(2r)}(\xi+h_m)+\bar{s}_m^{(2r)}(\xi-h_m)=o(m^{2r}\sqrt{m});$$

$$\bar{s}_m^{(2r)}\left(\xi+\frac{u\pi}{2m}\right)+\bar{s}_m^{(2r)}\left(\xi-\frac{u\pi}{2m}\right)=o(m^{2r}\log m).$$

II. $\varphi(x,y)=x^{2r}\cos^2 y;\quad x_m=\frac{1}{m};\quad y_m=\frac{h_m}{2}.$

(c) $$\frac{\bar{s}_m^{(2r)}\left(\xi+\frac{u\pi}{m}\right)+2\bar{s}_m^{(2r)}(\xi)+\bar{s}_m^{(2r)}\left(\xi-\frac{u\pi}{m}\right)}{4m^{2r}}$$

$$\to\frac{D}{\pi}\left\{\frac{(-1)^r}{4r}-\frac{1}{2^{2r}}\frac{d^{2r-1}}{d\tau^{2r-1}}\left(\frac{\sin^2\tau}{\tau}\right)_{\tau=\frac{u\pi}{1}}\right\}.$$

III. $\varphi(x,y)=x^{2r}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2;\quad x_m=\frac{1}{m};\quad y_m=\frac{h_m}{2}\neq 0;$

$$\gamma_m=(-1)^r\frac{\bar{s}_m^{2(r-1)}(\xi+h_m)-2\bar{s}_m^{2(r-1)}(\xi)+\bar{s}_m^{2(r-1)}(\xi-h_m)}{m^{2r}h_m^2}$$

$$G_m=\frac{2}{m^{2r}h_m^2}\sum_1^m u^{2(r-1)-1}(1-\cos u h_m)$$

$$=\frac{(-1)^{r-1}}{2^{2(r-1)+1}}\left\{\frac{1}{\tau^2}\left(\frac{d^{2(r-1)-1}}{d\tau^{2(r-1)-1}}\frac{\sin^2\tau}{\tau}\right)_0^{\tau}\right\}_{\tau=\frac{mh_m}{2}}+o(1)\ ^{72}).$$

---

ist

$$G_m=\frac{(-1)^{r-1}}{m^{2r}}\frac{d^{2r-1}}{dt^{2r-1}}\left(\sum_1^m\sin ut\right)_{t=h_m}=\frac{(-1)^{r-1}}{m^{2r}}\frac{d^{2r-1}}{dt^{2r-1}}\left(\frac{\sin^2(m+1\frac{t}{2})}{t}\right)_{t=h_m}+o(1).$$

Mit $\tau=\frac{m+1}{2}t$ folgt die obige Formel.

72) Es ist

$$\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left\{\frac{1-\cos(m+1)t}{2}\left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right)\right\}=O(m^{2k}|t|)$$

und

$$G_m=\frac{2(-1)^{2r-1}}{m^{2r}h_m^2}\int_0^{h_m}\frac{d^{2(r-1)}}{dt^{2(r-1)}}\left(\sum_1^m\sin ut\right)dt$$

$$=\frac{2(-1)^{r-1}}{m^{2r}h_m^2}\frac{d^{2(r-1)-1}}{dt^{2(r-1)-1}}\left(\frac{\sin^2(m+1)\frac{t}{2}}{t}\right)_0^{h_m}+o(1).$$

(a) $$\frac{\bar{s}_m^{2(r-1)}(\xi+h_m)-2\,\bar{s}_m^{2(r-1)}(\xi)+\bar{s}_m^{2(r-1)}(\xi-h_m)}{4\,m^{2(r-1)}}$$
$$+\frac{D}{2^{2(r-1)}\pi}\left(\frac{d^{2(r-1)-1}}{d\tau^{2(r-1)-1}}\frac{\sin^2\tau}{\tau}\right)_0^{\frac{m h_m}{2}}=o(m^2 h_m^2)=o(1),$$

(b) $$\bar{s}_m^{2(r-1)}(\xi+h_m)-2\,\bar{s}_m^{2(r-1)}(\xi)+\bar{s}_m^{2(r-1)}(\xi-h_m)=o(m^{2r}\log m\cdot h_m^2)$$
$$=o(m^{2(r-1)}\log m),$$

(c) $$\bar{s}_m^{2(r-1)}(\xi+h_m)-2\,\bar{s}_m^{2(r-1)}(\xi)+\bar{s}_m^{2(r-1)}(\xi-h_m)=o(m^{2r}\sqrt{m}\cdot h_m^2)$$
$$=o(m^{2(r-1)}\sqrt{m}),$$

(c) $$\frac{\bar{s}_m^{2(r-1)}\left(\xi+\frac{2k\pi}{m}\right)-2\,\bar{s}_m^{2(r-1)}(\xi)+\bar{s}_m^{2(r-1)}\left(\xi-\frac{2k\pi}{m}\right)}{4\,m^{2(r-1)}}$$
$$\to-\frac{D}{2^{2(r-1)}\pi}\left(\frac{d^{2(r-1)-1}}{d\tau^{2(r-1)-1}}\frac{\sin^2\tau}{\tau}\right)_0^{k\pi}.$$

18. Koppelung der konjugierten Abschnittsableitungen ungerader Ordnung:

$$\varphi(x,y)=x^{2r}\frac{\sin y}{y};\quad x_m=\frac{1}{m},\quad y_m=h_m\neq 0;$$
$$\gamma_m=(-1)^r\frac{\bar{s}_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)-\bar{s}_m^{(2r-1)}(\xi-h_m)}{2\,m^{2r}h_m},$$

$$G_m=\frac{1}{m^{2r}h_m}\sum_1^m u^{2(r-1)}\sin u\,h_m=\frac{(-1)^{r-1}}{2^{2r}}\left\{\frac{1}{\tau}\frac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}}\frac{\sin^2\tau}{\tau}\right\}_{\tau=\frac{m h_m}{2}}+o(1)^{73}).$$

(a) $$\frac{\bar{s}_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)-\bar{s}_m^{(2r-1)}(\xi-h_m)}{2\,m^{2r-1}}+\frac{D}{\pi\,2^{2(r-1)}}\left(\frac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}}\frac{\sin^2\tau}{\tau}\right)_{\tau=\frac{m h_m}{2}}$$
$$=o(m\,|h_m|)=o(1).$$

(b) $$\bar{s}_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)-\bar{s}_m^{(2r-1)}(\xi-h_m)=o(m^{2r}\log m\,|h_m|)=o(m^{2r-1}\log m),$$
$$\frac{\bar{s}_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)-\bar{s}_m^{(2r-1)}\left(\xi-\frac{k\pi}{m}\right)}{2\,m^{2r-1}}\to-\frac{D}{\pi\,2^{2(r-1)}}\left(\frac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}}\frac{\sin^2\tau}{\tau}\right)_{\tau=\frac{k\pi}{2}}.$$

(c) $$\bar{s}_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)-\bar{s}_m^{(2r-1)}(\xi-h_m)=o(m^{2r}\sqrt{m}\,|h_m|)=o(m^{2r-1}\sqrt{m}),$$
$$\bar{s}_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)-\bar{s}_m^{(2r-1)}\left(\xi-\frac{k\pi}{m}\right)=o(m^{2r-1}\log m).$$

Mit $\tau=\frac{m+1}{2}t$ folgt die obige Formel.

Man beachte den Fall $r=1$; hier bedeutet

$$\frac{d^{-1}}{d\tau^{-1}}\left(\frac{\sin^2\tau}{\tau}\right)_0^{\tau}=\int_0^{\tau}\frac{\sin^2 t}{t}\,dt.$$

[73]) Vgl. Fußnoten [71]) und [72]).

19. Koppelung der Abschnittsableitungen gerader Ordnung

$$\varphi(x,y) = x^{2r-1}\left(\frac{\sin y}{y}\right); \quad x_m = \frac{1}{m},\ y_m = h_m \neq 0;$$

$$\gamma_m = (-1)^{r-1}\frac{s_m^{2(r-1)}(\xi+h_m) - s_m^{2(r-1)}(\xi-h_m)}{2\,m^{2r-1}h_m},$$

$$G_m = \frac{1}{m^{2r-1}h_m}\sum_0^m u^{2(r-1)-1}\sin u h_m$$

$$= \frac{(-1)^{r-1}}{2}\left\{\frac{1}{\tau}\frac{d^{2(r-1)-1}}{d\tau^{2(r-1)-1}}\left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right)\right\}_{\tau = m h_m} + o(1)\ ^{74}).$$

(a) $$\frac{s_m^{2(r-1)}(\xi+h_m) - s_m^{2(r-1)}(\xi-h_m)}{2\,m^{2(r-1)}} - \frac{D}{\pi}\frac{d^{2(r-1)-1}}{d\tau^{2(r-1)-1}}\left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right)_{\tau = m h_m}$$
$$= o(m|h_m|) = o(1).$$

(b)
$$s_m^{2(r-1)}(\xi+h_m) - s_m^{2(r-1)}(\xi-h_m) = o(m^{2r-1}\log m\,|h_m|)$$
$$= o(m^{2(r-1)}\log m),$$
$$\frac{s_m^{2(r-1)}\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right) - s_m^{2(r-1)}\left(\xi-\frac{k\pi}{m}\right)}{2\,m^{2(r-1)}} \to \frac{D}{\pi}\frac{d^{2(r-1)-1}}{d\tau^{2(r-1)-1}}\left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right)_{\tau = k\pi}.$$

(c)
$$s_m^{2(r-1)}(\xi+h_m) - s_m^{2(r-1)}(\xi-h_m) = o(m^{2r-1}\sqrt{m}\,|h_m|)$$
$$= o(m^{2(r-1)}\sqrt{m}),$$
$$s_m^{2(r-1)}\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right) - s_m^{2(r-1)}\left(\xi-\frac{k\pi}{m}\right) = o(m^{2(r-1)}\log m).$$

---

74) Für $r = 1$ vgl. 16. Für ungerades m ist

$$\sum_1^m \cos u t = \frac{\sin(m+1)t}{2\sin t} = \frac{\sin(m+1)t}{2t} + \frac{\sin(m+1)t}{2}\left\{\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right\}.$$

Wegen

$$\frac{d^u}{dt^u}\left\{\frac{\sin(m+1)t}{2}\left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right)\right\} = O(m^u\,|t|)$$

ist

$$G_m = \frac{(-1)^{r-1}}{m^{2r-1}h_m}\frac{d^{2(r-1)-1}}{dt^{2(r-1)-1}}\left(\sum_1^m \cos u t\right)_{t = h_m}$$
$$= \frac{(-1)^{r-1}}{m^{2r-1}h_m}\frac{d^{2(r-1)-1}}{dt^{2(r-1)-1}}\left(\frac{\sin(m+1)t}{2t}\right)_{t = h_m} + o(1).$$

Mit $\tau = (m+1)t$ folgt die obige Formel.

20. Koppelung der Abschnittsableitungen ungerader Ordnung:

I. $\varphi(x, y) = x^{2r-1} \cos y; \quad x_m = \frac{1}{m}, \; y_m = h_m;$

$$\gamma_m = (-1)^{r-1} \frac{s_m^{(2r-1)}(\xi + h_m) + s_m^{(2r-1)}(\xi - h_m)}{2 m^{2r-1}};$$

$$G_m = \frac{1}{m^{2r-1}} \sum_1^m u^{2(r-1)} \cos u h_m$$

$$= \frac{(-1)^{r-1}}{2} \frac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}} \left(\frac{\sin \tau}{\tau}\right)_{\tau = m h_m} + o(1) \; [75].$$

(a) $$\frac{s_m^{(2r-1)}(\xi + h_m) + s_m^{(2r-1)}(\xi - h_m)}{2 m^{2r-1}} - \frac{D}{\pi} \frac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}} \left(\frac{\sin \tau}{\tau}\right)_{\tau = m h_m} \to 0.$$

(b) $$s_m^{(2r-1)}(\xi + h_m) + s_m^{(2r-1)}(\xi - h_m) = o(m^{2r-1} \log m);$$

$$\frac{s_m^{(2r-1)}\left(\xi + \frac{u\pi}{2m}\right) + s_m^{(2r-1)}\left(\xi - \frac{u\pi}{2m}\right)}{2 m^{2r-1}} \to \frac{D}{\pi} \frac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}} \left(\frac{\sin \tau}{\tau}\right)_{\frac{u\pi}{2}}.$$

(c) $$s_m^{(2r-1)}(\xi + h_m) + s_m^{(2r-1)}(\xi - h_m) = o(m^{2r-1} \sqrt{m});$$

$$s_m^{(2r-1)}\left(\xi + \frac{u\pi}{2m}\right) + s_m^{(2r-1)}\left(\xi - \frac{u\pi}{2m}\right) = o(m^{2r-1} \log m).$$

II. $\varphi(x, y) = x^{2r-1} \cos^2 y; \quad x_m = \frac{1}{m}, \; y_m = \frac{h_m}{2}.$

(c) $$\frac{s_m^{(2r-1)}\left(\xi + \frac{u\pi}{m}\right) + 2 s_m^{(2r-1)}(\xi) + s_m^{(2r-1)}\left(\xi - \frac{u\pi}{m}\right)}{4 m^{2r-1}}$$

$$\to \frac{D}{\pi} \left\{\frac{(-1)^{r-1}}{2(2r-1)} + \frac{1}{2} \frac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}} \left(\frac{\sin \tau}{\tau}\right)_{u\pi}\right\}.$$

III. $\varphi(x, y) = x^{2r+1} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2; \quad x_m = \frac{1}{m}, \; y_m = \frac{h_m}{2} \neq 0;$

$$\gamma_m = (-1)^r \frac{s_m^{(2r-1)}(\xi + h_m) - 2 s_m^{(2r-1)}(\xi) + s_m^{(2r-1)}(\xi - h_m)}{m^{2r+1} h_m^2};$$

$$G_m = \frac{2}{m^{2r+1} h_m^2} \sum_1^m u^{2(r-1)} (1 - \cos u h_m)$$

$$= \left\{\frac{(-1)^r}{\tau^2} \left(\frac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}} \frac{\sin \tau}{\tau}\right)_0^r\right\}_{\tau = m h_m} + o(1) \; [76].$$

---

[75]) Man beachte Fußnote [74]) und $\frac{d^k}{dt^k} \left\{\frac{\sin(m+1)t}{2} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right)\right\} = O(m^k)$.

[76]) Es ist $G_m = \frac{2}{m^{2r+1} h_m^2} \int_0^{h_m} \left(\sum_1^m u^{2r-1} \sin u t\right) dt$; vgl. Fußnote [74]).

$$\overline{(a)} \quad \frac{s_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)-2s_m^{(2r-1)}(\xi)+s_m^{(2r-1)}(\xi-h_m)}{4m^{(2r-1)}} - \frac{D}{2\pi}\left(\frac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}}\frac{\sin\tau}{\tau}\right)_0^{mh_m} = o(m^2h_m^2) = o(1).$$

$$\overline{(b)} \quad s_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)-2s_m^{(2r-1)}(\xi)+s_m^{(2r-1)}(\xi-h_m) = o(m^{2r+1}\log m\, h_m^2) = o(m^{2r-1}\log m).$$

$$\overline{(c)} \quad \begin{cases} s_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)-2s_m^{(2r-1)}(\xi)+s_m^{(2r-1)}(\xi-h_m) \\ \qquad = o(m^{2r+1}\sqrt{m}\,h_m^2) = o(m^{2r-1}\sqrt{m}); \\ \dfrac{s_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{2k\pi}{m}\right)-2s_m^{(2r-1)}(\xi)+s_m^{(2r-1)}\left(\xi-\frac{2k\pi}{m}\right)}{4m^{2r-1}} \\ \qquad \to \frac{D}{\pi}\left(\frac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}}\frac{\sin\tau}{\tau}\right)_0^{2k\pi}. \end{cases}$$

21. **Bildungen aus den $\sigma_m(x)$ und $\bar\sigma_m(x)$:**

Wenn

$$(\alpha) \qquad \varphi(P) = \varphi(x, P^*) = (1-x)\,\psi(P^*), \qquad x_m = \frac{1}{m}$$

ist, so wird $\overline{(43c)}$ zu

$$\overline{(43c')} \quad \left(\gamma_m - \frac{2D}{\pi}G_m\right) - \psi(0)\left(\psi_m(\xi) - \frac{D}{\pi}\log 2m\right) + \left(\bar\sigma_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi}(C-1)\right)\psi(mP_m^*) \to 0,$$

woraus weiter

$$\overline{(19c')} \qquad \frac{\gamma_m}{\log m} \to \frac{D}{\pi}\psi(0)$$

folgt. Und wenn

$$(\beta) \qquad mP_m^* = Q + O\left(\frac{1}{\log m}\right); \qquad \psi(Q) = \psi(0) = 0$$

ist, so gilt

$$\overline{(43c'')} \qquad \gamma_m - \frac{2D}{\pi}G_m \to 0.$$

Ebenso wird $\overline{(43b)}$ zu

$$\overline{(43b')} \qquad \left(\gamma_m - \frac{2D}{\pi}G_m\right) - \psi(0)\left(\psi_m(\xi) - \frac{D}{\pi}\log 2m\right) \to 0.$$

22. **Einige Beispiele:**

I. $\psi \equiv 1; \quad \gamma_{m+1} = \bar\sigma_m(\xi).$

$$\overline{(c)} \qquad \frac{\bar\sigma_m(\xi)}{\log m} \to \frac{D}{\pi}.$$

II. $\psi(y) = y^{2r}; \quad y_{m+1} = \frac{1}{m}; \quad \gamma_{m+1} = (-1)^r\frac{\bar\sigma_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}}.$

$$G_{m+1} = \frac{1}{m^{2r}}\sum_1^m u^{2r-1}\left(1-\frac{u}{m+1}\right) \to \frac{1}{4r(2r+1)}.$$

(b) $$(-1)^r \frac{\bar{\sigma}_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}} \to \frac{D}{2r(2r+1)\pi}.$$

(c) $$(-1)^r \frac{\bar{\sigma}_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}} - \left(\bar{\sigma}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi}(C-1)\right) \to \frac{D}{2r(2r+1)\pi};$$
$$\bar{\sigma}_m^{(2r)}(\xi) = o(m^{2r} \log m).$$

III. $$\psi(y) = y^{2r-1}; \quad y_{m+1} = \frac{1}{m}; \quad \gamma_{m+1} = (-1)^{r-1} \frac{\sigma_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}};$$
$$G_{m+1} = \frac{1}{m^{2r-1}} \sum_1^m u^{2(r-1)} \left(1 - \frac{u}{m+1}\right) \to \frac{1}{4r(2r-1)}.$$

(b)[23] $$(-1)^{r-1} \frac{\sigma_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}} \to \frac{D}{2r(2r-1)\pi}.$$

(c) $$(-1)^{r-1} \frac{\sigma_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}} - \left(\bar{\sigma}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi}(C-1)\right) \to \frac{D}{2r(2r-1)\pi};$$
$$\sigma_m^{(2r-1)}(\xi) = o(m^{2r-1} \log m).$$

IV. a: $$\psi(y) = \cos y; \quad y_{m+1} = h_m; \quad \gamma_{m+1} = \frac{\bar{\sigma}_m(\xi+h_m) + \bar{\sigma}_m(\xi-h_m)}{2}.$$

(c) $$\frac{\bar{\sigma}_m(\xi+h_m) + \bar{\sigma}_m(\xi-h_m)}{2 \log m} \to \frac{D}{\pi}.$$

b: $$\psi(y) = \frac{\sin y}{y}; \quad y_{m+1} = h_m \neq 0; \quad \gamma_{m+1} = \frac{1}{2h_m} \int_{\xi-h_m}^{\xi+h_m} \bar{\sigma}_m(x)\, dx.$$

(c) $$\frac{1}{2h_m \log m} \int_{\xi-h_m}^{\xi+h_m} \bar{\sigma}_m(x)\, dx \to \frac{D}{\pi}.$$

V. $$\psi(y,z) = y \frac{\sin z}{z}; \quad y_{m+1} = \frac{1}{m}, \; z_{m+1} = h_m \neq 0;$$
$$\gamma_{m+1} = \frac{\sigma_m(\xi+h_m) - \sigma_m(\xi-h_m)}{2mh_m}.$$

$$G_{m+1} = \frac{1}{mh_m} \sum_1^m \frac{1}{u} \left(1 - \frac{u}{m+1}\right) \sin u h_m$$
$$= \frac{1}{2mh_m} \left\{ \int_0^{mh_m} \frac{\sin t}{t} dt - \frac{\sin^2 (m+1)\frac{h_m}{2}}{\frac{(m+1)h_m}{2}} \right\} + o(1)$$
$$= \frac{1}{2mh_m} \int_0^{\frac{mh_m}{2}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt + o(1)\,[77].$$

---

[77] Vgl. 16. und die Identität

$$\int_0^{2\tau} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{1-\cos 2\tau}{2\tau} + \int_0^{2\tau} \frac{1-\cos t}{t^2} dt = \frac{\sin^2 \tau}{\tau} + \int_0^{\tau} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt.$$

(b) $$\frac{\sigma_m(\xi+h_m)-\sigma_m(\xi-h_m)}{2}-\frac{D}{\pi}\int_0^{\frac{m h_m}{2}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt = o(m|h_m|) = o(1).$$

(c) $$\begin{cases}\sigma_m(\xi+h_m)-\sigma_m(\xi-h_m) = o(m\log m|h_m|) = o(\log m),\\ \dfrac{\sigma_m\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)-\sigma_m\left(\xi-\frac{k\pi}{m}\right)}{2}\to\dfrac{D}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{k\pi}{2}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt.\end{cases}$$

Die nun folgenden Formeln unter VI bis IX werden ähnlich bewiesen wie die unter 17 bis 20:

VI.

(b) $$\begin{cases}\dfrac{\bar\sigma_m^{(2r)}(\xi+h_m)+\bar\sigma_m^{(2r)}(\xi-h_m)}{2m^{2r}}+\dfrac{D}{\pi}\dfrac{d^{2r-1}}{d\tau^{2r-1}}\left(\dfrac{\tau-\sin\tau}{\tau^2}\right)_{\tau=m h_m}\to 0,\\ \dfrac{\bar\sigma_m^{2(r-1)}(\xi+h_m)-2\bar\sigma_m^{2(r-1)}(\xi)+\bar\sigma_m^{2(r-1)}(\xi-h_m)}{4m^{2r-1}}\\ \qquad+\dfrac{D}{2\pi}\dfrac{d^{2(r-1)-1}}{d\tau^{2(r-1)-1}}\left(\dfrac{\tau-\sin\tau}{\tau^2}\right)_0^{m h_m} = o(m^2h_m^2) = o(1).\end{cases}$$

(c) $$\begin{cases}\bar\sigma_m^{(2r)}(\xi+h_m)+\bar\sigma_m^{(2r)}(\xi-h_m) = o(m^{2r}\log m);\\ \dfrac{\bar\sigma_m^{(2r)}\left(\xi+\frac{u\pi}{2m}\right)+\bar\sigma_m^{(2r)}\left(\xi-\frac{u\pi}{2m}\right)}{2m^{2r}}\to-\dfrac{D}{2\pi}\dfrac{d^{2r-1}}{d\tau^{2r-1}}\left(\dfrac{\tau-\sin\tau}{\tau^2}\right)_{\tau=\frac{u\pi}{2}};\\ \bar\sigma_m^{2(r-1)}(\xi+h_m)-2\bar\sigma_m^{2(r-1)}(\xi)+\bar\sigma_m^{2(r-1)}(\xi-h_m)\\ \qquad=o(m^{2r}\log m h_m^2) = o(m^{2(r-1)}\log m);\\ \dfrac{\bar\sigma_m^{2(r-1)}\left(\xi+\frac{2k\pi}{m}\right)-2\bar\sigma_m^{2(r-1)}(\xi)+\bar\sigma_m^{2(r-1)}\left(\xi-\frac{2k\pi}{m}\right)}{4m^{2(r-1)}}\\ \qquad\to-\dfrac{D}{2\pi}\dfrac{d^{2(r-1)-1}}{d\tau^{2(r-1)-1}}\left(\dfrac{\tau-\sin\tau}{\tau^2}\right)_0^{2k\pi}.\end{cases}$$

VII.

(b) $$\frac{\sigma_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)-\bar\sigma_m^{(2r-1)}(\xi-h_m)}{2m^{2r-1}}+\frac{D}{\pi}\frac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}}\left(\frac{\tau-\sin\tau}{\tau^2}\right)_{\tau=m h_m}$$
$$= o(m|h_m|) = o(1).$$

(c) $$\begin{cases}\bar\sigma_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)-\bar\sigma_m^{(2r-1)}(\xi-h_m) = o(m^{2r}\log m|h_m|)\\ \qquad\qquad = o(m^{2r-1}\log m);\\ \dfrac{\bar\sigma_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)-\bar\sigma_m^{(2r-1)}\left(\xi-\frac{k\pi}{m}\right)}{2m^{2r-1}}\to-\dfrac{D}{\pi}\dfrac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}}\left(\dfrac{\tau-\sin\tau}{\tau^2}\right)_{\tau=k\pi}.\end{cases}$$

VIII.

(b) $$\frac{\sigma_m^{2(r-1)}(\xi+h_m)-\sigma_m^{2(r-1)}(\xi-h_m)}{2m^{2(r-1)}} - \frac{D}{2^{2(r-1)}\pi}\frac{d^{2(r-1)-1}}{d\tau^{2(r-1)-1}}\left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right)^2_{\tau=\frac{mh_m}{2}} = o(m|h_m|) = o(1).$$

(c)
$$\sigma_m^{2(r-1)}(\xi+h_m)-\sigma_m^{2(r-1)}(\xi-h_m) = o(m^{2r-1}\log m|h_m|) = o(m^{2(r-1)}\log m);$$
$$\frac{\sigma_m^{2(r-1)}\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)-\sigma_m^{2(r-1)}\left(\xi-\frac{k\pi}{m}\right)}{2m^{2(r-1)}} \to \frac{D}{2^{2(r-1)}\pi}\frac{d^{2(r-1)-1}}{d\tau^{2(r-1)-1}}\left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right)^2_{\tau=\frac{k\pi}{2}}.$$

IX.

(b)
$$\frac{\sigma_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)+\sigma_m^{(2r-1)}(\xi-h_m)}{2m^{2r-1}} - \frac{D}{2^{2r-1}\pi}\frac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}}\left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right)^2_{\tau=\frac{mh_m}{2}} \to 0;$$
$$\frac{\sigma_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)-2\sigma_m^{(2r-1)}(\xi)+\sigma_m^{(2r-1)}(\xi-h_m)}{4m^{2r-1}} - \frac{D}{2^{2r}\pi}\frac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}}\left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right)^2\Bigg|_0^{\frac{mh_m}{2}} = o(m^2h_m^2) = o(1).$$

(c)
$$\sigma_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)+\sigma_m^{(2r-1)}(\xi-h_m) = o(m^{2r-1}\log m);$$
$$\frac{\sigma_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{u\pi}{2m}\right)+\sigma_m^{(2r-1)}\left(\xi-\frac{u\pi}{2m}\right)}{2m^{2r-1}} \to \frac{D}{2^{2r-1}\pi}\frac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}}\left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right)^2_{\tau=\frac{u\pi}{4}};$$
$$\sigma_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)-2\sigma_m^{(2r-1)}(\xi)+\sigma_m^{(2r-1)}(\xi-h_m) = o(m^{2r+1}\log m h_m^2) = o(m^{2r-1}\log m);$$
$$\frac{\sigma_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{2k\pi}{m}\right)-2\sigma_m^{(2r-1)}(\xi)+\sigma_m^{(2r-1)}\left(\xi-\frac{2k\pi}{m}\right)}{4m^{2r-1}} \to \frac{D}{2^{2r}\pi}\frac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}}\left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right)^2\Bigg|_0^{k\pi}.$$

§ 6.

Abschnittsnäherungen der Fourierreihe und Gibbssche Erscheinung.

1. Wir behandeln in diesem Paragraphen solche „regulären" Sprungstellen ξ, in denen gleichzeitig mindestens die beiden Voraussetzungen (11 c) und ($\overline{14}$ c) erfüllt sind. D. h. es sollen in ξ die Grenzwerte

(27 c) $$\frac{1}{t}\int_0^t f(\xi+\tau)\,d\tau \to A_+;\quad \frac{1}{t}\int_0^t f(\xi-\tau)\,d\tau \to A_-,\quad t \to +0;$$
$$A = \frac{A_+ + A_-}{2};\quad D = A_+ - A_-$$

existieren. Da an diesen Stellen mindestens (10 c) und ($\overline{13\ c}$) gleichzeitig erfüllt sind, können die Resultate aus § 2 (bzw. § 4) und aus § 5 kombiniert werden.

Man beachte ferner, daß nach dem früheren „*fast alle* ξ" *regulär* (sogar mit $A = f(\xi)$, $D = 0$, also „Stetigkeitspunkte") sind.

Wir geben zunächst im folgenden einige genügend einfache solche Kombinationsergebnisse an. Die Doppelbuchstaben vor den Formeln weisen auf die feineren jeweils gemachten Voraussetzungen (10) und ($\overline{13}$) hin.

2. **Abschnittsnäherungen:** (Kombination von § 2, 3 und § 5, 16).

$$(\mathrm{a},\bar{\mathrm{a}}) \qquad s_m(\xi + h_m) = A + \frac{D}{\pi}\int_0^{m h_m} \frac{\sin t}{t}\,dt + o(1);$$

$$(\mathrm{b},\bar{\mathrm{a}}) \quad s_m\left(\xi + \frac{u\pi}{2m}\right) \to A + \frac{D}{\pi}\int_0^{\frac{u\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\,dt; \qquad (\mathrm{a},\bar{\mathrm{b}}) \quad s_m\left(\xi + \frac{k\pi}{m}\right) \to A + \frac{D}{\pi}\int_0^{k\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt;$$

$$(\mathrm{c},\bar{\mathrm{b}}) \qquad s_m\left(\xi + \frac{u\pi}{m}\right) + s_m(\xi) \to 2A + \frac{D}{\pi}\int_0^{u\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Die Formel (a, ā) besagt diejenige Erscheinung, die wir in der Einleitung als „Gibbssches Verhalten im Nahen" bezeichnet hatten. *Es findet sich z. B. nach* § 1, 7 *und* § 5, 14 *bei Funktionen, deren Fourierkoeffizienten* $O\left(\frac{1}{n}\right)$ *sind, fast überall.*

Aus (a, b̄) *aber auch schon aus* (c, b̄) *folgt* $\left(h_m = \pm\frac{\pi}{m}\right)$, *daß die Abschnittskurven in* $x = \xi$ *mindestens die Gibbssche Strecke approximieren**).

Um schließen zu können, daß genau die Gibbssche Strecke approximiert wird, muß h_m in (a, ā) (Formel (25) der Einleitung) eine beliebige Nullfolge durchlaufen dürfen. In diesem Falle werden wir vom „Gibbsschen Verhalten" schlechthin sprechen.

Es ist nun beachtenswert, daß an regulären Stellen das durch die obigen Formeln gegebene Abschnittsverhalten auch umgekehrt für die angegebenen Voraussetzungen hinreichend ist.

---

*) Es gibt eine Teilfolge m_ν mit $s_{m_\nu}(\xi) \to A$, also ist im Falle (c, b̄)

$$s_{m_\nu}\left(\xi \pm \frac{\pi}{m_\nu}\right) \to A \pm \frac{D}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Den entsprechenden Schluß für den allgemeinsten Fall (c, c̄) habe ich nicht beweisen können.

Es sei etwa die Formel (b, ā) für ein festes Paar $\pm u$ erfüllt, so daß

$$(\alpha)\quad \frac{s_m\left(\xi+\frac{u\pi}{2m}\right)+s_m\left(\xi-\frac{u\pi}{2m}\right)}{2}\to A;\quad \frac{s_m\left(\xi+\frac{u\pi}{2m}\right)-s_m\left(\xi-\frac{u\pi}{2m}\right)}{2}\to\frac{D}{\pi}\int_0^{\frac{u\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}dt$$

gelten. Aus der ersten Relation folgt nach § 1, 4, II (es ist $\varphi=\cos x$), daß die $\sum_0^\infty \alpha_k(\xi)$ (C, 1)-summierbar ist. Und aus der zweiten Relation folgt nach § 5, 9, III (es ist $\varphi=\sin x$), daß $\bar{s}_m^*(\xi)$ konvergiert. *Man beachte noch, daß aus der Formel* (a, ā) *schon dann die Konvergenz von* $s_m(\xi)$ *und* $\bar{s}_m^*(\xi)$ *folgt, wenn sie für ein einziges Paar* $\pm h_m=\frac{\varrho}{m}$, $\varrho\neq\frac{k\pi}{2}$ *richtig ist.* Der Beweis ist analog dem obigen.

3. **Näherungen mit Abschnittsableitungen:** (Kombination von § 2, 4 und 5 mit § 5, 19 und 20).

$$(\mathrm{a},\bar{\mathrm{a}})\quad \frac{s_m^{(k)}(\xi+h_m)}{m^k}=\frac{D}{\pi}\frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}\left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right)_{\tau=mh_m}+o(1);$$

$$(\mathrm{b},\bar{\mathrm{a}})\quad \frac{s_m^{(2r)}\left(\xi+\frac{u\pi}{2m}\right)}{m^{2r}}\to\frac{D}{\pi}\frac{d^{2r-1}}{d\tau^{2r-1}}\left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right)_{\frac{u\pi}{2}};\quad \frac{s_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)}{m^{2r-1}}\to\frac{D}{\pi}\frac{d^{2r-1}}{d\tau^{2r-1}}\left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right)_{k\pi};$$

$$(\mathrm{a},\bar{\mathrm{b}})\quad \frac{s_m^{(2r)}\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)}{m^{2r}}\to\frac{D}{\pi}\frac{d^{2r-1}}{d\tau^{2r-1}}\left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right)_{k\pi};\quad \frac{s_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{u\pi}{2m}\right)}{m^{2r-1}}\to\frac{D}{\pi}\frac{d^{2r-1}}{d\tau^{2r-1}}\left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right)_{\frac{u\pi}{2}}.$$

Auch diese Formeln sind umgekehrt an regulären Stellen für die angegebenen Voraussetzungen hinreichend.

4. **Näherungen mit (C,1)-Mitteln:** (Kombination von § 2, 6 mit § 5, 22).

$$(\mathrm{b},\bar{\mathrm{b}})\quad\begin{cases}\sigma_m(\xi+h_m)=A+\dfrac{D}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{mh_m}{2}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2dt+o(1);\\ \dfrac{\sigma_m^{(k)}(\xi+h_m)}{m^k}\to\dfrac{D}{2^k\pi}\dfrac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}\left(\dfrac{\sin\tau}{\tau}\right)^2_{\tau=\frac{mh_m}{2}}+o(1).\end{cases}$$

$$(\mathrm{c},\bar{\mathrm{b}})\quad\begin{cases}\sigma_m\left(\xi+\dfrac{u\pi}{2m}\right)\to A+\dfrac{D}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{u\pi}{4}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2dt;\\ \dfrac{\sigma_m^{(2r)}\left(\xi+\frac{u\pi}{2m}\right)}{m^{2r}}\to\dfrac{D}{2^{2r}\pi}\dfrac{d^{2r-1}}{d\tau^{2r-1}}\left(\dfrac{\sin\tau}{\tau}\right)^2_{\frac{u\pi}{4}};\\ \dfrac{\sigma_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)}{m^{2r-1}}\to\dfrac{D}{2^{2r-1}\pi}\dfrac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}}\left(\dfrac{\sin\tau}{\tau}\right)^2_{\frac{k\pi}{2}}.\end{cases}$$

$$(\mathrm{b},\bar{\mathrm{c}})\quad\begin{cases}\sigma_m\left(\xi+\dfrac{k\pi}{m}\right)\to A+\dfrac{D}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{k\pi}{2}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt;\\[2ex]\dfrac{\sigma_m^{(2r)}\left(\xi+\dfrac{k\pi}{m}\right)}{m^{2r}}\to\dfrac{D}{2^{2r}\pi}\dfrac{d^{(2r-1)}}{d\tau^{(2r-1)}}\left(\dfrac{\sin\tau}{\tau}\right)^2_{\frac{k\pi}{2}};\\[2ex]\dfrac{\sigma_m^{(2r-1)}\left(\xi+\dfrac{u\pi}{2m}\right)}{m^{2r-1}}\to\dfrac{D}{2^{2r-1}\pi}\dfrac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}}\left(\dfrac{\sin\tau}{\tau}\right)^2_{\frac{u\pi}{4}}.\end{cases}$$

Wiederum sind alle diese Formeln an regulären Stellen hinreichend für die angegebenen Voraussetzungen.

Das in der ersten Formel $(\mathrm{b},\bar{\mathrm{b}})$ ausgedrückte Verhalten der (C, 1)-Mittel wollen wir als „Fejérsches Verhalten im Nahen“ bezeichnen[78]). Wenn es für beliebige Nullfolgen $\{h_m\}$ erfüllt ist, sprechen wir vom „Fejérschen Verhalten“ schlechthin.

Man beachte noch, daß die Formeln dieser Nummer für fast alle ξ (sogar mit $A = f(\xi)$, $D = 0$) gelten.

5. Für die feinere Untersuchung des Abschnittsverhaltens an regulären Stellen sind die folgenden Hilfssätze von Bedeutung. In ihnen bedeutet $g(t)$ eine in $\langle 0, \pi\rangle$ Lebesgue-integrierbare Funktion, und es handelt sich bei gegebenem $\varepsilon > 0$ um die Ungleichung

$$(47)\qquad |I_m(\eta)| = \left|\frac{1}{m}\int_0^{\pi} g(t)\left(\frac{\sin(m+1)\frac{\eta-t}{2}}{\sin\frac{\eta-t}{2}}\right)^2 dt\right| \leqq \varepsilon.$$

Hilfssatz 3[79]): *Aus*

$$(48\,\alpha)\qquad g(t)\to 0;\quad t\to +0$$

folgt (47) *für* $-\frac{\pi}{2}\leqq\eta\leqq \mathsf{H}(\varepsilon)$, $m\geqq M(\varepsilon)$.

Beweis: Für $0<\delta=\delta(\varepsilon)<\frac{\pi}{2}$ und alle m ist wegen

$$(\alpha)\qquad \frac{1}{\pi(m+1)}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin(m+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt = 1$$

[78]) Fejér 2.
[79]) Fejér 2.

ersichtlich $\left|\frac{1}{m}\int_0^{\delta}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$. Bei festem $\delta(\varepsilon)$ und $-\frac{\pi}{2} \leqq \eta \leqq \frac{\delta}{2} = \mathsf{H}(\varepsilon)$ ist sodann

$$(\beta) \qquad \left|\frac{1}{m}\int_{\delta}^{\pi}\right| = O\left(\frac{1}{m\,\delta^2}\int_0^{\pi}|g(t)|\,dt\right) \leqq \frac{\varepsilon}{2},$$

für $m \geqq M(\varepsilon)$.

Hilfssatz 4: *Aus*

$$(48\beta) \qquad \frac{1}{t}\int_0^{t}|g(\tau)|\,d\tau \to 0$$

folgt (47) *für* $-\frac{\pi}{2} \leqq \eta \leqq \frac{K}{m}$, $K > 0$, $m \geqq M(\varepsilon)$.

Beweis: Es werde $G(t) = \int_0^{t}|g(\tau)|\,d\tau$ gesetzt. Es sei

$$\varrho_m = \mathrm{Max}\left(0, \eta + \frac{1}{m}\right).$$

Gleichmäßig in den $-\frac{\pi}{2} \leqq \eta \leqq \frac{K}{m}$ ist dann

$$(\gamma) \qquad \left|\frac{1}{m}\int_0^{\varrho_m}\right| \leqq \frac{(m+1)^2}{m}\int_0^{\frac{K+1}{m}}|g(t)|\,dt = o(1);$$

$$(\delta) \qquad \left|\frac{1}{m}\int_{\varrho_m}^{\pi}\right| = O\left(\frac{1}{m}\int_{\varrho_m}^{\pi}\frac{|g(t)|}{(t-\eta)^2}dt\right) = O\left\{\frac{G(\pi)}{(\pi-\eta)^2 m} + \frac{2}{m}\int_{\varrho_m}^{\pi}\frac{G(t)}{(t-\eta)^3}dt\right\}$$

$$= O\left(\frac{1}{m}\right) + o\left(\frac{1}{m}\int_{\varrho_m}^{\pi}\frac{t}{(t-\eta)^3}dt\right) = o(1) + o\left(\frac{1}{m}\int_{\varrho_m}^{\pi}\frac{dt}{(t-\eta)^2} + \frac{K}{m^2}\int_{\varrho_m}^{\pi}\frac{dt}{(t-\eta)^3}\right) = o(1).$$

Hilfssatz 5[80]: *Ohne weitere Voraussetzungen über* $g(t)$ *gilt* (47) *für* $-\frac{\pi}{2} \leqq \eta \leqq -\frac{K}{\sqrt{m}}$, $K > 0$, $m \geqq M(\varepsilon)$.

Beweis: Für $0 < \delta = \delta(\varepsilon) < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leqq \eta \leqq -\frac{K}{\sqrt{m}}$ und alle m ist

$$(\varepsilon) \qquad \left|\frac{1}{m}\int_0^{\delta}\right| = O\left(\frac{1}{m\,\eta^2}\int_0^{\delta}|g(t)|\,dt\right) = O\left(\frac{1}{K^2}\int_0^{\delta}|g(t)|\,dt\right) \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Bei festem $\delta(\varepsilon)$ gilt sodann (β) für $m \geqq M(\varepsilon)$.

---

[80]) Rogosinski 3.

6. Wir wenden jetzt unsere Hilfssätze auf die Formel

$$(49)\qquad \sigma_m(\xi+\eta) = \frac{1}{2\pi(m+1)}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi+t)\left(\frac{\sin(m+1)\frac{\eta-t}{2}}{\sin\frac{\eta-t}{2}}\right)^2 dt$$

$$= \frac{1}{2\pi(m+1)}\left\{\int_0^{\pi} f(\xi+t)\left(\frac{\sin(m+1)\frac{\eta-t}{2}}{\sin\frac{\eta-t}{2}}\right)^2 dt + \int_0^{\pi} f(\xi-t)\left(\frac{\sin(m+1)\frac{-\eta-t}{2}}{\sin\frac{-\eta-t}{2}}\right)^2 dt\right\}$$

an:

I[79]). *$f(x)$ sei in $x=\xi$ stetig.* Aus Hilfssatz 3 (unter Beachtung von 5 (α)) folgt

$$(50)\qquad |\sigma_m(\xi+\eta) - f(\xi)| < \varepsilon$$

für $|\eta| \leqq H(\varepsilon)$, $m \geqq M(\varepsilon)$. *Insbesondere gilt also für eine beliebige Nullfolge $\{\eta_m\}$ die Relation*

$$(50^*)\qquad \sigma_m(\xi+\eta_m) \to f(\xi).$$

Allgemeiner ergibt die Elimination des Sprunges, *daß die* (C, 1)-*Mittel an jeder „gewöhnlichen Sprungstelle" (Existenz von $f(\xi+0)$ und $f(\xi-0)$) das (in 4 erklärte) Fejérsche Verhalten zeigen. Insbesondere tritt bei den* (C, 1)-*Mitteln keine Gibbssche Erscheinung auf; sie approximieren genau die „Sprungstrecke". (Fejér*[79])*.*

II. *$f(x)$ sei in ξ im absoluten Mittel stetig*, d. h. es sei

$$(27\,b^*)\qquad \frac{1}{t}\int_{-t}^{t} |f(\xi+\tau) - A|\,d\tau \to 0, \quad t \to 0.$$

Dann gibt Hilfssatz 4 die Ungleichung

$$(50^*)\qquad |\sigma_m(\xi+\eta) - A| < \varepsilon,$$

für die $|\eta| \leqq \frac{K}{m}$, $K > 0$, $m \geqq M(\varepsilon)$.

Elimination des Sprunges liefert an den Sprungstellen, wo

$$(27\,b)\qquad \frac{1}{t}\int_0^t |f(\xi+\tau) - A_+|\,dt \to 0; \quad \frac{1}{t}\int_0^t |f(\xi-\tau) - A_-|\,d\tau \to 0, \quad t \to +0$$

ist, erneut für die (C, 1)-Mittel die uns schon bekannte Eigenschaft des „Fejérschen Verhaltens im Nahen" (Nr. 4, (b, $\bar{\text{b}}$)).

Es ist aber beachtenswert, daß, wenn etwa $f(\xi+0)$ existiert, während nach links nur die zweite Formel (27 b) *vorausgesetzt wird, dann die η_m*

nur nach unten durch $\eta_m \geqq -\frac{K}{m}$ *beschränkt zu sein brauchen, nach oben aber eine beliebige Nullfolge durchlaufen dürfen.* Entsprechendes gilt für die Ungleichung (50*).

III. *Es existiere* $f(\xi+0)$, *während links von* ξ *über* $f(x)$ *nichts vorausgesetzt wird.*

Aus den Hilfssätzen 3 und 5 folgt jetzt

$$|\sigma_m(\xi+\eta) - f(\xi+0)| < \varepsilon, \tag{50**}$$

für die $\frac{K}{\sqrt{m}} \leqq \eta \leqq \mathsf{H}(\varepsilon)$, $K>0$, $m \geqq M(\varepsilon)$. *Insbesondere gilt für alle Nullfolgen* (η_m) *mit*

$$\lim \sqrt{m}\ \eta_m > 0 \tag{51}$$

die Relation[80])

$$\sigma_m(\xi+\eta_m) \to f(\xi+0). \tag{52}$$

7. Wir wenden 6, I und II noch auf die Funktionen $\varphi_\xi(t)$ und $\psi_\xi(t)$ in $t=0$ an.

I: Aus $\varphi(t) \to A$, $t \to 0$, folgt

$$\left|\frac{\sigma_m(\xi+\eta)+\sigma_m(\xi-\eta)}{2} - A\right| < \varepsilon \tag{53}$$

für $|\eta| \leqq \mathsf{H}(\varepsilon)$, $m \geqq M(\varepsilon)$. Für eine beliebige Nullfolge (η_m) wird also

$$\frac{\sigma_m(\xi+\eta_m)+\sigma_m(\xi-\eta_m)}{2} \to A. \tag{54}$$

Unter der Voraussetzung (11 b) gilt (53) noch für $|\eta| \leqq \frac{K}{m}$, $m \geqq M(\varepsilon)$ und (54) für $\eta_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$ (vgl. § 2, 6).

II: Aus $\psi(t) \to 0$, $t \to 0$, folgt

$$|\sigma_m(\xi+\eta) - \sigma_m(\xi+\eta)| < \varepsilon \tag{55}$$

für $|\eta| \leqq \mathsf{H}(\varepsilon)$, $m \geqq M(\varepsilon)$. Und aus $\psi(t) \to D$, $t \to +0$, folgt für eine beliebige Nullfolge (η_m) die Relation

$$\frac{\sigma_m(\xi+\eta_m) - \sigma_m(\xi-\eta_m)}{2} = \frac{D}{\pi}\int_0^{\frac{m\eta_m}{2}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt + o(1). \tag{56}$$

Unter der Voraussetzung (14 b) gilt (55) (wenn $D=0$ ist) noch für $|\eta| \leqq \frac{K}{m}$, $m \geqq M(\varepsilon)$, und (56) bleibt für $\eta_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$ richtig (vgl. § 5, 22, V).

8. Die vorstehenden Eigenschaften der $\sigma_m(x)$ gestatten nun bemerkenswerte Ergänzungen zu dem bisher festgestellten Verhalten der Mittel-

bildungen γ_m. Wir bezeichnen diese, angewandt auf die $c_k = \alpha_k(x)$, jetzt mit $\gamma_m(x)$. Satz I b und sein Beweis zusammen mit den Ungleichungen aus 6. und 7. liefern nämlich, wenn man den Zusatz in § 1, 1 zum Toeplitzschen Satze beachtet, unmittelbar die folgenden Sätze, in denen stets $\varphi(P)$ zweimal stetig differenzierbar und die Nullfolge $P_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$ sein soll:

Satz VI b: *Ist $f(x)$ in $x = \xi$ stetig, $f(\xi) = A$, so gilt*

(57 b) $$|\gamma_m(\xi+\eta) - (s_m(\xi+\eta) - A)\,\varphi(m P_m) - A\,\varphi(0)| < \varepsilon$$

für $|\eta| \leqq \mathsf{H}(\varepsilon)$, $m \geqq M(\varepsilon)$. Für eine beliebige Nullfolge (η_m) wird also

(58 b) $$\gamma_m(\xi+\eta_m) - (s_m(\xi+\eta_m) - A)\,\varphi(m P_m) \to A\,\varphi(0).$$

Satz VI b*: *Aus*

(27 b*) $$\frac{1}{t}\int_{-t}^{t} |f(\xi+\tau) - A|\,d\tau \to 0, \quad t \to 0$$

folgt (57 b) *für* $|\eta| \leqq \frac{K}{m}$, $m \geqq M(\varepsilon)$, *und* (58 b) *für* $\eta_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$.

Man beachte auch die Schlußbemerkung in 6, II.

Satz VI b**: *Existiert $f(\xi+0)$, während links von ξ über $f(x)$ nichts vorausgesetzt wird, so gilt* (57 b) *mit* $A = f(\xi+0)$ *für* $\frac{K}{\sqrt{m}} \leqq \eta \leqq \mathsf{H}(\varepsilon)$, $K > 0$, $m \geqq M(\varepsilon)$, *und* (58 b) *für jede Nullfolge* (η_m) *mit* $\varliminf \sqrt{m}\,\eta_m > 0$.

Satz VII b: *Wenn $\varphi(t) \to A$, $t \to 0$, ist, so gilt*

(59 b) $$\left|\frac{\gamma_m(\xi+\eta)+\gamma_m(\xi-\eta)}{2} - \left(\frac{s_m(\xi+\eta)+s_m(\xi-\eta)}{2} - A\right)\varphi(m P_m) - A\,\varphi(0)\right| < \varepsilon$$

für $|\eta| \leqq \frac{\mathsf{H}}{\varepsilon}$, $m \geqq M(\varepsilon)$. *Für eine beliebige Nullfolge (η_m) ist also*

(60 b) $$\frac{\gamma_m(\xi+\eta_m)+\gamma_m(\xi-\eta_m)}{2} - \left(\frac{s_m(\xi+\eta_m)+s_m(\xi-\eta_m)}{2} - A\right)\varphi(m P_m) \to A\,\varphi(0).$$

Unter der Voraussetzung (11 b) *gilt* (59 b) *noch für* $|\eta| \leqq \frac{K}{m}$, $m \geqq M(\varepsilon)$ *und* (60 b) *für* $\eta_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$.

Satz VIII b: *Wenn $\psi(t) \to 0$, $t \to 0$ ist, so gilt*

(61 b) $$|(\gamma_m(\xi+\eta) - \gamma_m(\xi-\eta)) - (s_m(\xi+\eta) - s_m(\xi-\eta))\,\varphi(m P_m)| < \varepsilon$$

für $|\eta| \leqq \mathsf{H}(\varepsilon)$, $m \geqq M(\varepsilon)$. *Für eine beliebige Nullfolge (η_m) ist also*

(62 b) $$(\gamma_m(\xi+\eta_m) - \gamma_m(\xi-\eta_m)) - (s_m(\xi+\eta_m) - s_m(\xi-\eta_m))\,\varphi(m P_m) \to 0.$$

Unter der Voraussetzung $(\overline{14\,b})$ *mit* $D = 0$ *gilt* (61 b) *noch für* $|\eta| \leqq \frac{K}{m}$, $m \geqq M(\varepsilon)$, *und* (62 b) *für* $\eta_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$.

Die Behandlung von Sprungstellen mit $D \neq 0$ geschieht durch Elimination des Sprunges.

9. Die interessanteste Anwendung der obigen Sätze bezieht sich auf das in der Einleitung erwähnte „Schwingungsverhalten" der Abschnitte „um" Stetigkeitsstellen:

I: Mit $\varphi(x) = \cos x$, $x_m = h_m$ folgt aus (57 b) an jeder Stetigkeitsstelle die für $|\eta| \leqq \mathsf{H}(\varepsilon)$, $m \geqq M(\varepsilon)$ gültige Ungleichung $(A = f(\xi))$

$$(\alpha) \qquad \left| \frac{s_m(\xi+\eta+h_m) + s_m(\xi+\eta-h_m)}{2} - (s_m(\xi+\eta) - A)\cos m h_m - A \right| < \varepsilon$$

und insbesondere

$$(\beta) \qquad \left| \frac{s_m\left(\xi+\eta+\frac{\pi}{2m}\right) + s_m\left(\xi+\eta-\frac{\pi}{2m}\right)}{2} - A \right| < \varepsilon$$

Diese letztere Ungleichung zeigt deutlich, daß an den Endpunkten eines „nahe bei ξ" gelegenen Intervalls der Länge $\frac{\pi}{m}$ die Werte des m-ten Abschnitts für große m ungefähr gleichweit aber entgegengesetzt von dem Mittelwert $A = f(\xi)$ differieren. *Es tritt also in der Tat in der Nähe einer Stetigkeitsstelle ein schwingungsartiges Verhalten der Periode* $\frac{2\pi}{m}$ *um* $A = f(\xi)$ *als Mittellage ein*[81]).

Das gleiche Verhalten zeigt sich nach Satz VI b* *aber auch an den allgemeineren Stellen* (27 b*), *also fast überall.* Nur muß man sich hier beim m-ten Abschnitt auf *Umgebungen der Größenordnung* $O\left(\frac{1}{m}\right)$, das sind solche, die nur eine feste Zahl der obigen Perioden umspannen, beschränken.

Man schließt weiter leicht aus (β), daß *die von den Abschnittskurven an Stetigkeitsstellen approximierte Strecke* (auf $x = \xi$ in der x, y-Zahlenebene) *symmetrisch zu* $x = \xi$, $y = A$ *liegt*[82]). An den Stellen (27 b*) ist dieser Schluß nur für Approximationen $\eta_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$ beim m-ten Abschnitt richtig.

Allgemeiner oszillieren in der Nähe jeder „gewöhnlichen" Sprungstelle, wie die Elimination des Sprunges zeigt, die m-ten Abschnittskurven mit den Perioden $\frac{2\pi}{m}$ um die m-ten Abschnittskurven der eliminierenden Funktion

$$(40^*) \qquad A + \frac{2D}{\pi} \sum_{u=1}^{\infty} \frac{\sin u(x-\xi)}{u}.$$

---

[81]) Rogosinski 1; vgl. Rogosinski 4, S. 107.
[82]) Rogosinski 1; vgl. Rogosinski 4, S. 112.

Hieraus folgt dann wieder, daß an solchen Sprungstellen und (nach dem obigen) *allgemeiner an allen Sprungstellen* (27 b) *die Abschnittskurven mindestens die Gibbssche Strecke approximieren*[83]). (Vgl. Nr. 2.)

Es sei ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß an den obigen Sprungstellen mit $D \neq 0$ der Schluß auf eine zu A symmetrisch gelegene Approximationsstrecke nur für Annäherungen $\eta_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$ richtig bleibt. Für beliebige Approximationen scheint diese Behauptung auch falsch zu sein.

II. Nach Satz VI b** gilt die Ungleichung (α) mit $A = f(\xi + 0)$ noch für $\frac{K}{\sqrt{m}} \leqq \eta \leqq \mathsf{H}(\varepsilon)$, $m \geqq M(\varepsilon)$, an solchen Stellen ξ, wo wenigstens $f(\xi + 0)$ existiert. *Das Schwingen der Abschnitte ist jetzt also um $f(\xi + 0)$ als Mittellage in „genügend entfernten" rechtsseitigen Umgebungsteilen von ξ noch festzustellen.*

An den Stellen, wo $\varphi(t) \to A$, $t \to 0$, gilt, oszillieren entsprechend die Abschnittssummen $\frac{s_m(\xi + \eta) + s_m(\xi - \eta)}{2}$ für kleine $|\eta|$ mit der Periode $\frac{2\pi}{m}$ um A als Mittellage (Satz VII b); an den Stellen (11 b), also fast überall, ist dies noch für Umgebungen der Größenordnung $O\left(\frac{1}{m}\right)$ der Fall.

An den Stellen, wo $\psi(t) \to 0$, $t \to 0$, gilt, oszillieren die Abschnittsdifferenzen $s_m(\xi + \eta) - s_m(\xi - \eta)$ für kleine $|\eta|$ mit der Periode $\frac{2\pi}{m}$ um 0 als Mittellage (Satz VIII b); an den Stellen (14 b) mit $D = 0$ ist dies noch für Umgebungen der Größenordnung $O\left(\frac{1}{m}\right)$ richtig. Das Verhalten dieser Differenzen an Sprungstellen mit $D \neq 0$ ist daraus leicht ersichtlich.

III. Entsprechend zeigt man, daß *die in der Einleitung erwähnten Schwingungs- bzw. Periodizitätserscheinungen der geraden bzw. ungeraden Abschnittsableitungen bereits um Stetigkeitsstellen im Sinne von* I *auftreten.*

10. Eine weitere interessante Folgerung unserer Sätze bezieht sich auf Fourierreihen, deren Koeffizienten $O\left(\frac{1}{n}\right)$ sind:

Mit $\varphi(x) = x^{2r}$, $x_m = \frac{1}{m}$, folgt nämlich nach (58 b) an einer Stetigkeitsstelle für eine beliebige Nullfolge (η_m) die Relation

$$(\alpha) \qquad s_m(\xi + \eta_m) + (-1)^{r-1} \frac{s_m^{(2r)}(\xi + \eta_m)}{m^{2r}} \to f(\xi).$$

Und hieraus ergibt sich (vgl. § 1, 7) weiter

$$(\beta) \qquad s_m(\xi + \eta_m) \to f(\xi).$$

Die Elimination des Sprunges ergibt nunmehr den Satz:

---

[83]) Vgl. Rogosinski 3 und Rogosinski 4, S. 112.

Eine Fourierreihe, deren Koeffizienten $O\left(\frac{1}{n}\right)$ sind, zeigt an jeder gewöhnlichen Sprungstelle der Funktion das Gibbssche Verhalten.

Insbesondere haben die Fourierreihen der Funktionen beschränkter Schwankung überall das Gibbssche Verhalten[84]).

Daß Fourierreihen, deren Koeffizienten $O\left(\frac{1}{n}\right)$ sind, an den Stellen (11 x), also fast überall, konvergieren, wissen wir bereits. (Für die konjugierte Reihe gilt entsprechend (13 a) an den Stellen (14 c), also fast überall). Aus dem Zusatz in § 1, 7 folgt schließlich noch die Bemerkung, daß eine solche Fourierreihe in jedem abgeschlossenen Stetigkeitsintervall der Funktion gleichmäßig konvergiert (vgl. § 4, 5.).

Literaturverzeichnis.

P. Czillag: Über die Fourierschen Konstanten der Funktionen von beschränkter Schwankung, Math. és phys. lapok **27** (1918), S. 301—208.

L. Fejér: 1. Untersuchungen über Fouriersche Reihen, Math. Annalen **58** (1904), S. 501—569. — 2. Über die Bestimmung des Sprunges einer Funktion aus ihrer Fourierreihe, Journ. f. Math. **142** (1913), S. 165—188.

G. H. Hardy: 1. Theorems relating to the convergence and summability of slowly oscillating series, Proc Lond. Math. Soc. **8** (1909), S. 301—320. — 2. On the summability of Fourier series, Proc. Lond. Math. Soc. **12** (1913), S. 365—372.

M. Jacob: 1. Über die Verallgemeinerung einiger Theoreme von Hardy in der Theorie der Fourierschen Reihen, Proc. Lond. Math. Soc. **26** (1927), S. 470—492. — 2. Beitrag zur Darstellung der Ableitungen einer Funktion durch ihre Fouriersche Reihe, Bull. Acad. Pol. (1927), S. 287—294.

K. Knopp: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 3. Aufl., Berlin (1931).

H. Lebesgue: Recherches sur la convergence des series de Fourier, Math. Annalen **61** (1905), S. 251—280.

F. Lukàcs: Über die Bestimmung des Sprunges einer Funktion aus ihrer Fourierreihe, Journ. f. Math, **150** (1920), S. 107—112.

R. E. A. C. Paley: On the Cesàro summability of Fourier series and allied series, Proc. Cambr. **26** (1930), S. 173—203.

A. Plessner: 1. Zur Theorie der konjugierten trigonometrischen Reihen, Mitt. d. Math. Sem. Gießen **10** (1923), S. 1—36. — 2. Trigonometrische Reihen, Pascals Repertorium I 3, Leipzig-Berlin (1929).

A. Pringsheim: Über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise, Münch. Sitzungsber. **30** (1900), S. 37—100.

---

[84]) Die Fourierkoeffizienten sind $O\left(\frac{1}{n}\right)$; vgl. Zygmund S. 18, Rogosinski 4, S. 24.

W. Rogosinski: 1. Über die Abschnitte trigonometrischer Reihen, Math. Annalen 95 (1925), S. 110—134. — 2. Reihensummierung durch Abschnittskoppelungen, Math. Zeitschr. 25 (1926), S. 132—149. — 3. Über den Einfluß einseitiger Eigenschaften einer Funktion auf ihre Fourierreihe, Schrift. d. Königsberg. Gel. Ges. (1926), Heft 3. — 4. Fouriersche Reihen, Sammlung Göschen, Berlin-Leipzig (1930).

S. Szidon: Bestimmung des Sprunges der Funktion aus der Fourierreihe, Math. és phys. lapok 27 (1918), S. 309—311.

O. Toeplitz: Über allgemeine lineare Mittelbildungen, Prace Math.-Fiz. 22 (1911), S. 113—119.

S. Verblunsky: Note on the sum of an oscillating series, Proc. Cambr. 26 (1930), S. 152—157, 484—488.

F. T. Wang: On the convergence factor of Fourier series at a point, Tôhoku Math. Journ. 41 (1935), S. 91—108.

W. H. Young: On the mode of oscillation of a Fourier series and of its allied series, Proc. Lond. Math. Soc. 12 (1913), S. 433—452.

A. Zygmund: Trigonometrical series, Warschau-Lwów (1935).

(Eingegangen am 7. Oktober 1935.)

Das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen im Hilbertschen Raum.

Von

Gottfried Köthe in Münster i. W.

Die neueren Untersuchungen über den Hilbertschen Raum $\mathfrak{H}$ beschäftigen sich fast ausschließlich mit dem weiteren Ausbau der Hilbert-von Neumannschen Resultate über die Spektralzerlegung der Operatoren in $\mathfrak{H}$, also mit dem Problemkreis der orthogonalen (unitären) Transformation der quadratischen (hermiteschen) Formen. Der Versuch, in $\mathfrak{H}$ auch eine affine Theorie der quadratischen Formen aufzubauen, wurde bisher nur von A. Wintner[1]) unternommen. Es gelang ihm, den Fall eines beschränkten hermiteschen Operators mit eindeutiger Reziproken zu erledigen. Es ergibt sich eine dem gewöhnlichen Trägheitsgesetz weitgehend analoge Klasseneinteilung dieser Operatoren.

Wintners Resultat erledigt nur einen Spezialfall. Man erhält das Problem in voller Allgemeinheit erst dann, wenn man sich erstens von der Voraussetzung der Existenz der Reziproken befreit, zweitens auch die der Beschränktheit des Operators fallen läßt, also wie in der Hilbert-von Neumannschen Theorie *beliebige* selbstadjungierte (hypermaximale) Operatoren untersucht.

Die Lösung des Problems in dieser Allgemeinheit gelang, nachdem für das Wintnersche Resultat der in § 1 dargestellte einfache Beweis gefunden war, dessen Grundgedanke sich bei Heranziehung der Spektralzerlegung auf beliebige selbstadjungierte Operatoren anwenden läßt (§ 2).

Das Resultat lautet: *Jeder selbstadjungierte Operator läßt sich affin in einen „Diagonaloperator" transformieren*, d. h. einen Operator, der in einem geeigneten orthogonalen Koordinatensystem in $\mathfrak{H}$ sich als Diagonalmatrix darstellt. Im n-dimensionalen Raum lassen sich bekanntlich die Diagonalelemente noch affin in $+1$, -1, 0 abändern. Dies ist in $\mathfrak{H}$ nicht mehr möglich. In § 4 wird nämlich bewiesen, daß *zwei Diagonalmatrizen dann und nur dann affine Operatoren darstellen, wenn sie erstens die gleiche Kardinalzahl von Nullen in der Hauptdiagonale haben und wenn zweitens bei passender Anordnung der von Null verschiedenen Diagonalglieder* d_n

[1]) Math. Zeitschr. 37 (1933), S. 254—263.

und d'_n die Quotienten d_n/d'_n zwischen festen von n unabhängigen positiven Schranken liegen. Damit ist die volle affine Klasseneinteilung der selbstadjungierten Operatoren gefunden.

Die Überlegungen, mit denen die Verschiedenheit der Normalformen in § 3 und 4 bewiesen wird, haben elementaren Charakter, dagegen wird bei der Ableitung der Normalform die Spektraltheorie benützt, einen nur affine Begriffe verwendenden Beweis zu führen, war mir bisher unmöglich.

Wie im n-dimensionalen Raum ist es natürlich möglich, aus der Kenntnis des Spektrums eines Operators sofort die affine Normalform herzuleiten (vgl. den Schluß von § 2). Als Nebenresultat unserer Überlegungen ergibt sich, daß jeder selbstadjungierte Operator in der Form DQ dargestellt werden kann, D Diagonaloperator, Q positiv definit, beschränkt, mit eindeutiger Reziproken und mit D vertauschbar.

§ 3 bringt einen mengentheoretischen Satz, der wohl auch als solcher von Interesse sein dürfte.

Herrn F. Rellich verdanke ich zwei wesentliche Ergänzungen meines ursprünglichen Manuskriptes.

§ 1.

Der Wintnersche Fall.

Wir bezeichnen den (komplexen) Hilbertschen Raum mit $\mathfrak{H}$, seine Elemente mit kleinen lateinischen Buchstaben, (lineare) Operatoren mit großen lateinischen, komplexe Zahlen mit griechischen Buchstaben. Ist A beschränkt, so bezeichnen wir mit $\mathsf{M}(A)$ die obere Grenze der Zahlen $|(Ax, y)|$, x, y beliebige Elemente vom Absolutbetrag 1 aus $\mathfrak{H}$. A heißt *intakt*, falls A beschränkt ist und ein beschränkter Operator B existiert mit $AB = BA = E$, E der identische Operator. A heißt *hermitesch*, wenn A beschränkt und $A^* = A$ ist. Für hermitesche A ist $\mathsf{M}(A)$ auch gleich der oberen Grenze der Zahlen $|(Ax, x)|$, x beliebig vom Absolutbetrag 1 aus $\mathfrak{H}$[2]). Mit $\mu(A)$ bezeichnen wir die untere Grenze der $|(Ax, x)|$ mit $|x| = 1$.

Ist A hermitesch und ist stets $(Ax, x) \geqq 0$, so heißt A *nichtnegativ*, gilt das Gleichheitszeichen nur für $x = 0$, so heißt A *positiv*.

Ein Operator P mit $P^2 = P$, $P^* = P$, heißt *Projektionsoperator* (Einzeloperator). Ist $E = \sum_\alpha E_\alpha$, wobei die E_α paarweise orthogonale Projektionsoperatoren sind, so sprechen wir von einer *Zerlegung der Identität*.

---

[2]) Vgl. z. B. F. Riesz, Acta litt. ac scient. Szeged 5 (1930), S. 23—54, speziell S. 29/30.

Wir stützen uns auf zwei bekannte Sätze der Operatorentheorie:

I. Zu jedem hermiteschen Operator A gibt es eine Zerlegung der Identität, $E = E_- + E_+$, derart, daß

1. E_- und E_+ mit A und mit jedem mit A vertauschbaren beschränkten Operator vertauschbar sind,

2. AE_- und AE_+ nichtpositiv beziehungsweise nichtnegativ sind und $A = AE_- + AE_+$ ist,

3. aus $Ax = 0$ die Beziehungen $E_- x = 0$, $E_+ x = x$ folgen[3]).

Für diesen und den folgenden von A. Wintner[4]) stammenden Satz hat kürzlich F. Wecken sehr einfache Beweise gegeben (Math. Annalen **110** (1935), S. 722—725).

II. Ist A hermitesch und nichtnegativ, so gibt es genau einen hermiteschen nichtnegativen Operator P mit $P^2 = A$[5]). Ist $\mu(A) > 0$, so sind A und P intakt und es gilt

$$(1) \qquad \mathsf{M}(P) = \sqrt{\mathsf{M}(A)}, \qquad \mathsf{M}(P^{-1}) = \sqrt{\frac{1}{\mu(A)}}.$$

Ist umgekehrt A intakt und nichtnegativ, so sind $\mu(A)$ und $\mu(P)$ größer als 0, A und P also positiv.

Definition 1. *Der Operator B heißt affin zu A, wenn $B = P^* A P$ ist für einen geeigneten intakten Operator P.*

Satz 1. *Jeder intakte hermitesche Operator A hat die Form $P^*(E_1 - E_2)P$, P intakt, positiv und mit A vertauschbar, E_1, E_2 zwei mit A und P vertauschbare Projektionsoperatoren, die eine Zerlegung der Identität bilden. A ist also affin zu $E_1 - E_2$.*

Beweis: Wir bilden nach I die Operatoren AE_- und AE_+. Wir bezeichnen den Raum aller $E_+ x$, x aus $\mathfrak{H}$, mit $E_+ \mathfrak{H}$. $E_+ \mathfrak{H}$ ist entweder selbst ein Hilbertscher Raum oder ein komplexer R_n. Aus $AA^{-1} = E$ folgt nach I 1. $AE_+ \cdot A^{-1}E_+ = AA^{-1} \cdot E_+^2 = EE_+ = E_+ = A^{-1}E_+ \cdot AE_+$. E_+ ist der identische Operator in $E_+\mathfrak{H}$, also ist AE_+

[3]) Vgl. F. Riesz, l. c. S. 37.

[4]) A. Wintner, l. c. S. 256, vgl. auch E. Hellinger u. O. Toeplitz, Enzykl. d. math. Wiss. IIC 13, S. 1567. Anm. 522a).

[5]) Dies wird von F. Wecken l. c. bewiesen. (1) folgt aus den beiden elementaren Beziehungen $\mathsf{M}(P^2) = [\mathsf{M}(P)]^2$ und $\mathsf{M}(P^{-1}) = \frac{1}{\mu(P)}$ für beliebige hermitesche bzw. positive intakte Operatoren (vgl. z. B. A. Wintner, Spektraltheorie der unendlichen Matrizen, Leipzig 1929, S. Hirzel, § 65, 66). Die übrigen Behauptungen sind Folgerungen aus dem Reziprokentheorem von O. Toeplitz: $\mu(P^*P) > 0$ und $\mu(PP^*) > 0$ sind notwendig und hinreichend für die Intaktheit eines beschränkten Operators P (vgl. O. Toeplitz, Die Jakobische Transformation ..., Göttinger Nachrichten 1907, S. 1—8).

in $E_+\mathfrak{H}$ intakt. Da AE_+ in $E_+\mathfrak{H}$ auch nichtnegativ und hermitesch ist, wird nach II $AE_+ = B^2$, B intakt und nichtnegativ in $E_+\mathfrak{H}$[6]). Analog wird $AE_- = -C^2$ in $E_-\mathfrak{H}$. B und C lassen sich zu Operatoren in $\mathfrak{H}$ erweitern, wenn man sie auf $E_-\mathfrak{H}$ bzw. $E_+\mathfrak{H}$ gleich Null setzt. Es gilt dann

$$BE_- = E_-B = 0, \qquad CE_+ = E_+C = 0. \tag{2}$$

$P = B + C$ ist nichtnegativ, ferner intakt, denn die Summe der zu Operatoren in ganz $\mathfrak{H}$ erweiterten Inversen von B und C ist zu P reziprok; nach II ist P also positiv. Aus (2) folgt nun

$$P(E_+ - E_-)P = B^2 - C^2 = A.$$

E_- und E_+ sind nach I 1. mit A vertauschbar, B und C nach Definition, also ist auch P mit A, E_1 und E_2 vertauschbar. Da $P^* = P$ ist, sind alle Behauptungen von Satz 1 bewiesen.

Zu jedem hermiteschen A lassen sich zwei *Trägheitsindizes* t_1 und t_2 erklären:

$\mathfrak{L}$ sei ein linearer Teilraum von $\mathfrak{H}$, auf dem A überall positiv ist. Die obere Grenze der Dimensionen aller solchen Teilräume $\mathfrak{L}$ sei t_1. t_1 ist eine natürliche Zahl oder ∞. Durch Betrachtung der Räume, auf denen A negativ ist, erhält man t_2.

t_1 und t_2 sind affine Invarianten, denn zu P^*AP gehören die Räume $P^{-1}\mathfrak{L}$, wenn zu A die Räume $\mathfrak{L}$ gehören, und P^{-1} ändert als intakte Transformation die Dimension nicht.

Satz 2: *Zwei intakte hermitesche Operatoren sind dann und nur dann affin, wenn ihre Trägheitsindizes übereinstimmen.*

Beweis. Es braucht nur gezeigt zu werden, daß die Bedingung hinreichend ist. Satz 1 gestattet uns, uns auf den Fall zweier Operatoren $E_1 - E_2$ und $F_1 - F_2$ zu beschränken, deren Trägheitsindizes dieselben sind. Wir zeigen zuerst, daß der Trägheitsindex t_1 von $E_1 - E_2$ gleich der Dimension d_1 von $E_1\mathfrak{H}$ ist. $\mathfrak{L}$ sei ein Raum, auf dem $E_1 - E_2$ positiv ist. Wäre die Dimension von $\mathfrak{L}$ größer als d_1, so müßte es in $\mathfrak{L}$ zwei Elemente x und x' mit $E_1x = E_1x'$ geben, $y = x - x' \neq 0$ aus $\mathfrak{L}$ müßte in $E_2\mathfrak{H}$ liegen, $((E_1 - E_2)y, y) = -(y, y) \leqq 0$ ist aber unmöglich, also $t_1 \leqq d_1$. Da andererseits $E_1 - E_2$ auf $E_1\mathfrak{H}$ positiv definit ist, ist $t_1 = d_1$.

[6]) Mein ursprünglicher Beweis, ebenso der von § 2 Satz 2, verwandte statt der Quadratwurzel die von O. Toeplitz stammende Jakobische Transformation (vgl. Anm. 5), die AE_+ in P^*P zerlegt, P intakt. Herr F. Rellich machte mich darauf aufmerksam, daß die Zerlegung $AE_+ = B^2$ außer der Affinität von A zu $E_1 - E_2$ bzw. D noch die übrigen Aussagen von § 1 Satz 1 und § 2 Satz 2 liefert, die durch die Jakobische Transformation nicht zu erreichen sind.

Aus der Gleichheit der Dimensionen von $E_1\mathfrak{H}$ und $F_1\mathfrak{H}$ bzw. $E_2\mathfrak{H}$ und $F_2\mathfrak{H}$ folgt die Existenz eines unitären Operators U, der $E_1\mathfrak{H}$ in $F_1\mathfrak{H}$ und $E_2\mathfrak{H}$ in $F_2\mathfrak{H}$ überführt. Es wird also

$$F_1 - F_2 = U(E_1 - E_2)U^{-1} = U(E_1 - E_2)U^*,$$

q. e. d.

§ 2.

Die Normalform der selbstadjungierten Operatoren.

Ein auf einem in $\mathfrak{H}$ überall dichten linearen Teilraum $\mathfrak{L}$ erklärter Operator A heißt *selbstadjungiert*[7]) (hypermaximal), wenn er die folgenden Bedingungen erfüllt: 1. Für f, g aus $\mathfrak{L}$ gilt stets $(Af, g) = (f, Ag)$; 2. gilt für h_0, h_1 aus $\mathfrak{H}$ und alle f aus $\mathfrak{L}$ $(Af, h_0) = (f, h_1)$, so liegt h_0 in $\mathfrak{L}$ und es ist $Ah_0 = h_1$.

Satz 1. *Durch affine Transformation entsteht aus einem selbstadjungierten Operator stets wieder ein selbstadjungierter Operator.*

Beweis. Ist $\mathfrak{L}$ der Definitionsbereich des selbstadjungierten Operators A, so ist $\tilde{\mathfrak{L}} = P^{-1}\mathfrak{L}$ der Definitionsbereich von P^*AP, $P^{-1}\mathfrak{L}$ ist in $\mathfrak{H}$ überall dicht.

f, g seien aus $\mathfrak{L}$. Es ist $(Af, g) = (P^*Af, P^{-1}g)$. Setzen wir $f = P\tilde{f}$, $g = P\tilde{g}$, mit $\tilde{f}, \tilde{g}$ aus $\tilde{\mathfrak{L}}$, so erhalten wir weiter $(Af, g) = (P^*AP\tilde{f}, \tilde{g})$. Ebenso wird $(f, Ag) = (\tilde{f}, P^*AP\tilde{g})$. Aus $(Af, g) = (f, Ag)$ für alle f und g aus $\mathfrak{L}$ folgt also $(P^*AP\tilde{f}, \tilde{g}) = (\tilde{f}, P^*AP\tilde{g})$ für alle $\tilde{f}, \tilde{g}$ aus $\tilde{\mathfrak{L}}$.

Ist schließlich $(P^*AP\tilde{f}, h_0) = (\tilde{f}, h_1)$ für alle $\tilde{f}$ aus $\tilde{\mathfrak{L}}$, so ist $(Af, Ph_0) = (f, (P^{-1})^*h_1)$ für alle f aus $\mathfrak{L}$, also liegt Ph_0 in $\mathfrak{L}$ und es ist $APh_0 = (P^{-1})^*h_1$. Also liegt h_0 in $\tilde{\mathfrak{L}}$ und es ist $P^*APh_0 = h_1$.

Definition. *Ein Operator $D = \Sigma \delta_i F_i$, δ_i komplex, F_i die Komponenten einer Zerlegung der Identität, heiße Diagonaloperator.*

Ein Diagonaloperator ist dann und nur dann selbstadjungiert, wenn die δ_i reell sind.

Satz 2. *Jeder selbstadjungierte Operator A hat die Form P^*DP, P intakt, positiv und mit A vertauschbar, D ein mit A und P vertauschbarer selbstadjungierter Diagonaloperator mit demselben Existenzbereich wie A. A ist also affin zu D.*

Wir geben zuerst eine Skizze des Beweisganges[8]): $\mathfrak{H}$ wird mittels der Spektralschar von A in paarweise orthogonale Teilräume $F_i\mathfrak{H}$ zerlegt,

---

[7]) Vgl. F. Riesz, l. c. S. 38/39, oder K. Friedrichs, Math. Annalen 109 (1934), S. 465—487, speziell S. 479.

[8]) Verwendet man die Integraldarstellung der selbstadjungierten Operatoren, so kann man statt wie im Text auch so vorgehen (diesen Beweis teilte mir Herr F. Rellich mit): Die mit A vertauschbaren Operatoren haben die Gestalt $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda)\, dE_\lambda$. ($E_\lambda$ wird weiter unten im Text erklärt; wegen der im folgenden nicht ausgeführten

die durch A in sich selbst abgebildet werden. Die Abbildungen AF_i sind beschränkt und positiv oder negativ. AF_i läßt sich also wie in § 1 Satz 1 in der Form $\delta_i P_i^2$ schreiben, δ_i ein reeller Proportionalitätsfaktor, der so gewählt wird, daß die Summe P aller P_i ein beschränkter intakter Operator wird. Damit wird $A = P\left(\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i F_i\right) P$.

Wir geben ferner kurz an, was wir aus der Spektraltheorie voraussetzen[9]).

Die Spektralschar von A. Jeder reellen Zahl α seien zwei Symbole α^- und α^+ zugeordnet, die wir allgemein mit α' bezeichnen. Die α' lassen sich anordnen: Es sei $\alpha_1' < \alpha_2^+$, wenn $\alpha_1 < \alpha_2$ ist, ferner $\alpha^- < \alpha^+$. Jedem α' entspricht nun ein durch A bestimmter Projektionsoperator $E_{\alpha'}$, deren Gesamtheit die Spektralschar von A heißt und durch vier Eigenschaften charakterisiert ist:

1. Alle $E_{\alpha'}$ sind untereinander und mit A vertauschbar,
2. es ist $E_{\alpha'} E_{\beta'} = E_{\alpha'}$ für $\alpha' < \beta'$,
3. es ist $E_{\alpha'} \to 0$ bzw. E für $\alpha \to -\infty$, bzw. $+\infty$,
4. es ist $E_{\alpha'} \to E_{\beta}{}^-$ bzw. $E_{\beta}{}^+$, wenn α monoton gegen β wächst bzw. fällt

(die Konvergenz ist als starke Konvergenz zu verstehen: $E_{\alpha'} \to E_{\beta'}$ bedeutet, daß $E_{\alpha'} x$ für alle x stark gegen $E_{\beta'} x$ konvergiert).

Einzelheiten sei auf die in Anm. 2 zitierte Arbeit von F. Riesz verwiesen, mit deren Hilfe man mühelos alles ergänzen kann). Wir setzen P in dieser Form an. P ist intakt und positiv, wenn für geeignete γ, η gilt $0 < \gamma \leqq \varphi(\lambda) \leqq \eta < \infty$. $D = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\lambda)\, dE_\lambda$ ist Diagonaloperator, wenn $\delta(\lambda)$ stückweise konstant ist und die Sprungstellen sich nur bei $0, \pm\infty$ häufen. Soll $P^* D P = A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, dE_\lambda$ sein, so muß in $(-\infty, +\infty)$ $\varphi^2(\lambda)\,\delta(\lambda) \equiv \lambda$ sein. Man setze

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(\lambda) = \sqrt{\lambda\, 2^{-n}} \text{ in } 2^n \leqq \lambda < 2^{n+1},$$
$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad \varphi(\lambda) = \varphi(-\lambda) \text{ für } \lambda < 0,$$

$\delta(0) = 0$, $\delta(\lambda) = 2^n$ in $2^n \leqq \lambda < 2^{n+1}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $\delta(\lambda) = -\delta(-\lambda)$ für $\lambda < 0$. Es ist $1 \leqq \varphi(\lambda) \leqq \sqrt{2}$, P ist also intakt, positiv und mit A vertauschbar, D ist Diagonaloperator und wegen $\varphi^2(\lambda)\,\delta(\lambda) \equiv \lambda$ ist auch $PDP = A$. Der Existenzbereich $\mathfrak{L}$ von A besteht aus allen x, für die $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2\, d(E_\lambda x, x) < \infty$ ist, der Existenzbereich $\mathfrak{E}$ von D besteht aus allen x, für die $\int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(\lambda)]^2\, d(E_\lambda x, x) < \infty$ ist. Wie man leicht sieht, ist $\mathfrak{L} = \mathfrak{E}$, damit ist Satz 2 bewiesen.

[9]) Wir schließen uns eng an die in Anm. 2 und 7 zitierten Arbeiten von F. Riesz und K. Friedrichs an, in denen die Beweise ausgeführt sind.

Die Differenz $F = E_{\alpha'} - E_{\beta'}, \beta' < \alpha'$, ist wieder ein Projektionsoperator, für den

$$\beta(Ff, f) \leqq (AFf, f) \leqq \alpha(Ff, f) \tag{1}$$

gilt.

Beweis von Satz 2. Zur Zerspaltung von $\mathfrak{H}$ verwenden wir die folgende Zerlegung der Identität

$$\begin{aligned} E = & \quad E_{0-} & & +(E_{0+}-E_{0-}) + & & (E-E_{0+}) \\ = & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (E_{(-2^n)-} - E_{(-2^{n+1})-}) & & +(E_{0+}-E_{0-}) + & & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (E_{(2^{n+1})-} - E_{(2^n)-}) \\ = & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n^- & & + \quad F_0 \quad + & & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n^+. \end{aligned} \tag{2}$$

Daß diese Summe wirklich E ergibt und daß die F paarweise orthogonal sind, ergibt sich leicht aus den Eigenschaften 1 bis 4 der Spektralschar.

Aus (1) ergibt sich $AF_0 = 0$. Af existiert dann und nur dann, wenn

$$\Sigma |AF_n^- f|^2 + \Sigma |AF_n^+|^2 \tag{3}$$

konvergiert[10]); für jedes f, für das Af existiert, gilt im Sinn der starken Konvergenz

$$Af = \Sigma AF_n^- f + \Sigma AF_n^+ f.$$

Berücksichtigt man, daß die F Projektionsoperatoren sind, so erhält man aus (1)

$$\begin{aligned} -2^{n+1}|F_n^- f|^2 \leqq (AF_n^- f, F_n^- f) \leqq -2^n |F_n^- f|^2 \\ 2^n |F_n^+ f|^2 \leqq (AF_n^+ f, F_n^+ f) \leqq 2^{n+1} |F_n^+ f|^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Wir setzen $-\frac{1}{2^n} AF_n^- = B_n, \frac{1}{2^n} AF_n^+ = C_n$. (4) ist gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} \mu(B_n) \geqq 1, \quad & \mathsf{M}(B_n) \leqq 2, \\ \mu(C_n) \geqq 1, \quad & \mathsf{M}(C_n) \leqq 2, \end{aligned} \tag{5}$$

wobei B_n und C_n nur als Operatoren auf $F_n^- \mathfrak{H}$ bzw. $F_n^+ \mathfrak{H}$ aufgefaßt sind. Nach § 1, II lassen sich also aus B_n und C_n die Quadratwurzeln ziehen, $B_n = P_n^2$, $C_n = Q_n^2$. P_n und Q_n lassen sich auf ganz $\mathfrak{H}$ erklären, so daß $P_n F, FP_n$ bzw. $Q_n F, FQ_n$ verschwinden für $F \neq F_n^-$ bzw. $F \neq F_n^+$. Es ist

$$P_n(-2^n F_n^-) P_n = AF_n^-, \qquad Q_n(2^n F_n^+) Q_n = AF_n^+. \tag{6}$$

$P = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n + F_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Q_n$ besitzt die formale Reziproke

$$P^{-1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n^{-1} + F_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Q_n^{-1}$$

---

[10]) Bei F. Riesz l. c. S. 48 wird eine speziellere Aussage bewiesen, der Beweis überträgt sich sofort auf unsere Behauptung.

(unter P_n^{-1} ist dabei der auf ganz $\mathfrak{H}$ ausgedehnte zu P_n auf $F_n^- \mathfrak{H}$ reziproke Operator zu verstehen). Aus (5) folgt nach § 1 (1) $\mathsf{M}(P) \leqq \sqrt{2}$, $\mu(P) \geqq 1$, $\mathsf{M}(P^{-1}) \leqq 1$, P ist also intakt und positiv. Durch Summation der Gleichungen (6) erhält man

$$P\Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} - 2^n F_n^- + 0 \cdot F_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n F_n^+\Big) P = A,$$

also ist A dem Diagonaloperator $D = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} - 2^n F_n^- + 0 \cdot F_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n F_n^+$ affin. Die Behauptungen über die Vertauschbarkeit von D und P mit A und von D mit P sind klar.

Zum Beweise von Satz 2 fehlt nur noch der Nachweis, daß D denselben Existenzbereich hat wie A. Nach (3) folgt dies aus

$$(7) \quad \Sigma |2^n F_n^- f|^2 = \Sigma 4^n |F_n^- f|^2 \leqq \Sigma |A F_n^- f|^2 \leqq \Sigma 4^{n+1} |F_n^- f|^2 = 4 \Sigma |2^n F_n^- f|^2$$

und derselben Ungleichung für die F_n^+. (7) beweist man so: Es ist unter Berücksichtigung von (4)

$$|A F_n^- f|^2 = (A F_n^- f, A F_n^- f) \geqq |(A F_n^- f, F_n^- f)| \cdot \frac{|A F_n^- f|}{|F_n^- f|} \geqq 2^n |A F_n^- f| \, |F_n^- f|,$$

also $|A F_n^- f|^2 \geqq 4^n |F_n^- f|^2$, also gilt die linke Seite von (7). Aus $\mathsf{M}(A F_n^-) \leqq 2^{n+1}$ folgt $|A F_n^- f| \leqq 2^{n+1} |F_n^- f|$, also die rechte Seite von (7).

Das Resultat von Satz 2 verschafft uns auch einen genauen Überblick über alle selbstadjungierten Operatoren: Die Diagonaloperatoren $D = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n F_n$ sind besonders einfache Operatoren. Dies wird deutlich bei Einführung eines geeigneten Koordinatensystems. Führt man in den einzelnen $F_n \mathfrak{H}$ orthogonale Koordinaten ein, so bedeutet die Ausübung von $\delta_n F_n$ die Multiplikation eines Elementes $\mathfrak{x}^{(n)} = \{\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots\}$ aus $F_n \mathfrak{H}$ mit der Diagonalmatrix $\delta_n \mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}$ die Einheitsmatrix. D wird also durch die Diagonalmatrix

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \delta_1 \mathfrak{E} & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & \delta_2 \mathfrak{E} & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & \delta_3 \mathfrak{E} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

dargestellt. Die Anwendung von D auf x geschieht durch Multiplikation der Matrix $\mathfrak{D}$ mit dem x darstellenden Vektor $\mathfrak{x} = \{\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \ldots; \xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \ldots; \ldots\}$, der als Spalte zu schreiben ist. Dx existiert dann und nur dann, wenn $\mathfrak{D}\mathfrak{x}$ wieder ein Element des Hilbertschen Raumes ist, das heißt wenn $\sum_{m,n} |\delta_n \xi_m^{(n)}|^2$ konvergiert.

Satz 2 besagt nun, *daß man aus den Diagonaloperatoren D und den intakten beschränkten Operatoren Q bereits alle selbstadjungierten Operatoren erhält, wenn man die Produkte DQ bildet, Q mit D vertauschbar.*

Die affine Normalform D läßt sich in einfacher Weise aus dem Spektrum von A ableiten (das Spektrum besteht bekanntlich aus allen Nichtkonstanzstellen der Schar E_λ^-: vgl. für das folgende etwa das in Anmerkung 5 zitierte Buch von A. Wintner): Die Dimension α_n von $F_n^+ \mathfrak{H} = (E_{(2^{n+1})^-} - E_{(2^n)^-})\,\mathfrak{H}$ ist dann und nur dann endlich, wenn im links abgeschlossenen, rechts offenen Intervall $[2^n, 2^{n+1})$ nur endlich viele Werte des Punktspektrums liegen, jeder mit endlicher Vielfachheit, aber kein innerer Punkt des Streckenspektrums. α_n ist dann gleich der Anzahl der Punkteigenwerte (in ihrer Vielfachheit gezählt) in $[2^n, 2^{n+1})$. Liegen in $[2^n, 2^{n+1})$ abzählbar viele diskrete Eigenwerte oder ein Eigenwert unendlicher Vielfachheit oder ein innerer Punkt des Streckenspektrums, so ist $\alpha_n = \infty$. Wenn wir ein Streckenspektrum gleich abzählbar vielen Eigenwerten setzen, können wir auch in diesem Fall sagen, daß α_n gleich der Anzahl der Eigenwerte von A in $[2^n, 2^{n+1})$ ist. Ähnliches gilt für die Dimensionen β_n, γ von $F_n^- \mathfrak{H}, F_0 \mathfrak{H}$. Wir erhalten somit die folgende Regel zur Aufstellung der D darstellenden Matrix $\mathfrak{D}$:

Man setze die Zahlen 2^n, -2^n, 0 so oft in die Hauptdiagonale von $\mathfrak{D}$, als es Eigenwerte von A in $[2^n, 2^{n+1})$ bzw. in $[-2^{n+1}, -2^n)$ bzw. gleich 0 gibt.

Durch affine Transformation kann also jedes Streckenspektrum in ein Punktspektrum aufgelöst werden, das höchstens die Häufungspunkte $0, \pm\infty$ hat.

§ 3.
Ein mengentheoretischer Satz.

Der Untersuchung der Verschiedenheit der Diagonaloperatoren schicken wir den Beweis eines dabei verwendeten mengentheoretischen Satzes voraus.

Satz 1. *$\mathfrak{m}_i$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, seien endliche oder abzählbar unendliche, paarweise elementefremde Mengen, α_i sei die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{m}_i$. Ebenso seien Mengen $\mathfrak{n}_i$ mit den Anzahlen β_i gegeben. Es gebe ein $k > 0$, so daß für alle ganzen n und positiven ganzen l die Ungleichungen*

$$\begin{aligned} &\alpha_n + \alpha_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+l} \leqq \beta_{n-k} + \beta_{n-k+1} + \ldots + \beta_{n+l+k} \\ &\beta_n + \beta_{n+1} + \ldots + \beta_{n+l} \leqq \alpha_{n-k} + \alpha_{n-k+1} + \ldots + \alpha_{n+l+k} \end{aligned} \tag{1}$$

gelten. Dann gibt es eine eineindeutige Zuordnung von $\mathfrak{m} = \sum_i \mathfrak{m}_i$ auf $\mathfrak{n} = \sum_i \mathfrak{n}_i$, bei der ein Element aus $\mathfrak{m}_i$ stets auf ein Element aus $\sum_{n=i-k-1}^{i+k+1} \mathfrak{n}_n$ und ein Element aus $\mathfrak{n}_i$ stets auf ein Element aus $\sum_{n=i-k-1}^{i+k+1} \mathfrak{m}_n$ abgebildet wird.

Beweis. Zu jedem $\mathfrak{m}_i$ mit $\alpha_i = \infty$ gibt es nach (1) ein $\mathfrak{n}_j$ mit $\beta_j = \infty$ und $i - k \leqq j \leqq i + k$. Jedem unendlichen $\mathfrak{m}_i$ werde ein solches $\mathfrak{n}_j$ zugeordnet. Den unendlichen $\mathfrak{n}_i$, die noch nicht Bilder eines unendlichen $\mathfrak{m}_l$ sind, ordnen wir in derselben Weise ein unendliches $\mathfrak{m}_l$ mit $i - k \leqq l \leqq i + k$ zu. Jedem unendlichen $\mathfrak{m}_i$ und $\mathfrak{n}_i$ sind so höchstens endlichviele unendliche $\mathfrak{n}_j$ bzw. $\mathfrak{m}_l$ zugeordnet, man kann sofort eine eineindeutige Zuordnung der im Satz verlangten Art zwischen der Vereinigungsmenge der unendlichen $\mathfrak{m}_i$ und der der unendlichen $\mathfrak{n}_i$ herstellen. Die ganze Schwierigkeit besteht nun darin, diese Zuordnung auf die endlichen $\mathfrak{m}_i$ und $\mathfrak{n}_i$ auszudehnen. Wir bemerken, daß die Zuordnung der unendlichen Mengen aufeinander ohne weiteres so abgeändert werden kann, daß in jedes solche $\mathfrak{m}_i$ oder $\mathfrak{n}_i$ noch weitere endlichviele Elemente abgebildet werden.

Zwischen den unendlichen Mengen $\mathfrak{m}_i$ und $\mathfrak{m}_{i+l+1}$ mögen die l endlichen Mengen $\mathfrak{m}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{m}_{i+l}$ liegen. Es gibt dann ein unendliches $\mathfrak{n}_g$ mit $i - k \leqq g \leqq i + k$ und ein unendliches $\mathfrak{n}_h$ mit $i + l + 1 - k \leqq h \leqq i + l + 1 + k$, die eventuell auch zusammenfallen können. Es kann angenommen werden, daß $h - g \geqq 0$ ist und daß alle $\mathfrak{n}_s$ zwischen $\mathfrak{n}_g$ und $\mathfrak{n}_h$ endlich sind (dies läßt sich durch Abänderung der Zuordnung der unendlichen Mengen aufeinander erreichen).

Sind l und $h - g - 1 \leqq 2k$, so kann man, wie leicht zu sehen ist, die $\mathfrak{m}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{m}_{i+l}$ alle teils auf $\mathfrak{n}_g$ teils auf $\mathfrak{n}_h$ so abbilden, daß der Index $i + r$ von $\mathfrak{m}_{i+r}$ sich von g bzw. h um weniger als k unterscheidet, ebenso kann man die $\mathfrak{n}_l$ zwischen $\mathfrak{n}_g$ und $\mathfrak{n}_h$ auf $\mathfrak{m}_i$ oder $\mathfrak{m}_{i+l+1}$ in der im Satz verlangten Weise abbilden. Die Zuordnung der unendlichen Mengen aufeinander kann also zu einer eineindeutigen Zuordnung erweitert werden, die auch noch die $\mathfrak{m}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{m}_{i+l}$ und $\mathfrak{n}_{g+1}, \ldots, \mathfrak{n}_{h-1}$ umfaßt.

Sei nun $l > 2k$ (der Fall $h - g - 1 > 2k$ geht durch Vertauschung von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ in diesen Fall über). Wir konstruieren uns eine endliche Anzahl von Zuordnungen der Menge $\mathfrak{m}_{i+1} + \ldots + \mathfrak{m}_{i+l}$ auf Teilmengen von $\mathfrak{n}$. Wir bilden aus den Elementen von $\mathfrak{m}_{i+1} + \ldots + \mathfrak{m}_{i+l}$ eine Folge, indem wir der Reihe nach die Elemente von $\mathfrak{m}_{i+1}$, dann die von $\mathfrak{m}_{i+2}$ usf. anschreiben,

$$(2) \qquad m_1^{(i+1)}, \ldots, m_{\alpha_{i+1}}^{(i+1)}, \quad m_1^{(i+2)}, \ldots, m_{\alpha_{i+l}}^{(i+l)}.$$

Wir konstruieren uns ferner eine Folge von Elementen aus $\mathfrak{n}$. Wegen $l > 2k$ sind sicher $\mathfrak{n}_g$ und $\mathfrak{n}_h$ verschieden, es ist sogar $h - g \geqq 2$. Wir nehmen aus der unendlichen Menge $\mathfrak{n}_g$ $\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2} + \ldots + \alpha_{g+k} = r$ Elemente $n_1^{(g)}, \ldots, n_r^{(g)}$ heraus (es ist $r = 0$, falls $g + k < i + 1$, was nur für

$g = i - k$ eintritt), ordnen sie in eine Reihe, fügen die Elemente von $\mathfrak{n}_{g+1}, \ldots$ an, bis wir zur unendlichen Menge $\mathfrak{n}_h$ kommen, aus der wir $s = \alpha_{h-k} + \ldots + \alpha_{i+l}$ Elemente herausnehmen ($s = 0$ für $h = i + l + k + 1$). Wir erhalten so die Folge

$$(3) \qquad n_1^{(g)}, \ldots, n_r^{(g)}, \quad n_1^{(g+1)}, \ldots, n_1^{(h)}, \ldots, n_s^{(h)}.$$

(2) enthält $\alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_{i+l}$ Glieder, (3) enthält mindestens ebenso viele Glieder, da nach (1) $\alpha_{g+k+1} + \ldots + \alpha_{h-k-1} \leqq \beta_{g+1} + \ldots + \beta_{h-1}$ ist.

Die erste Zuordnung $\mathfrak{Z}_1$ erhalten wir, indem wir (2) eineindeutig und anordnungstreu auf die ersten $\alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_{i+l}$ Glieder von (3) abbilden, $\mathfrak{Z}_2$, indem wir (2) auf die ersten $\alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_{i+l}$ Glieder der um das Anfangsglied verkürzten Reihe (3) abbilden usf. Die Zuordnung, die (2) auf die letzten $\alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_{i+l}$ Glieder von (3) abbildet, sei $\mathfrak{Z}_q$.

Hilfssatz. *Eine der Zuordnungen $\mathfrak{Z}_1, \ldots, \mathfrak{Z}_q$ hat die Eigenschaft, daß jedes Element $m_p^{(d)}$ aus (2) auf ein $n_r^{(e)}$ mit $d - k \leqq e \leqq d + k$ abgebildet wird.*

Beweis. a) *$\mathfrak{Z}_1$ bildet jedes $m_p^{(d)}$ auf ein $n_r^{(e)}$ mit $e \leqq d + k$ ab.*

Würde nämlich ein $m_p^{(d)}$ auf ein $n_r^{(e)}$ mit $e > d + k$ abgebildet, so müßte nach der Konstruktion von (3) $\mathfrak{m}_{g+k+1} + \ldots + \mathfrak{m}_d$ mehr Elemente enthalten als $\mathfrak{n}_{g+1} + \ldots + \mathfrak{n}_{d+k}$, im Widerspruch zu (1) wäre

$$\alpha_{g+k+1} + \ldots + \alpha_d > \beta_{g+1} + \ldots + \beta_{d+k}.$$

b) *$\mathfrak{Z}_q$ bildet jedes $m_s^{(u)}$ auf ein $n_t^{(v)}$ mit $v \geqq u - k$ ab.*

Würde ein $m_s^{(u)}$ auf ein $n_t^{(v)}$ mit $v < u - k$ abgebildet, so hätte $\mathfrak{m}_u + \ldots + \mathfrak{m}_{h-k-1}$ mehr Elemente als $\mathfrak{n}_{u-k} + \ldots + \mathfrak{n}_{h-1}$, also wäre im Widerspruch zu (1) $\alpha_u + \ldots + \alpha_{h-k-1} > \beta_{u-k} + \ldots + \beta_{h-1}$.

c) *Kein $\mathfrak{Z}_a$ ordnet sowohl einem $m_p^{(d)}$ ein $n_r^{(e)}$ mit $e > d + k$, wie auch einem $m_s^{(u)}$ ein $n_t^{(v)}$ mit $v < u - k$ zu.*

Für $u < d$ würde daraus folgen, daß $\mathfrak{m}_u + \ldots \mathfrak{m}_d$ mehr Elemente enthielte als $\mathfrak{n}_{u-k} + \ldots + \mathfrak{n}_{d+k}$, für $d < u$ müßte $\mathfrak{n}_{d+k+1} + \ldots + \mathfrak{n}_{u-k-1}$ mehr Elemente als $\mathfrak{m}_{d+1} + \ldots + \mathfrak{m}_{u-1}$ enthalten, beides widerspricht (1).

Wir können annehmen, daß $\mathfrak{Z}_1$ ein $m_s^{(u)}$ auf ein $n_t^{(v)}$ mit $v < u - k$ abbildet, andernfalls wäre nach a) $\mathfrak{Z}_1$ bereits die im Hilfssatz verlangte Zuordnung. Ebenso gebe es in $\mathfrak{Z}_q$ ein $m_p^{(d)}$, das auf ein $n_r^{(e)}$ mit $e > d + k$ abgebildet wird. Aus a), b), c), folgt nun, daß entweder ein $\mathfrak{Z}_a$ der im Hilfssatz verlangten Art existiert oder, daß es ein Paar $\mathfrak{Z}_a, \mathfrak{Z}_{a+1}$ gibt, wobei $\mathfrak{Z}_a$ ein $m_s^{(u)}$ auf ein $n_t^{(v)}$ mit $v < u - k$ abbildet, $\mathfrak{Z}_{a+1}$ ein $m_p^{(d)}$ auf ein $n_r^{(e)}$ mit $e > d + k$.

Der Hilfssatz wird bewiesen sein, wenn dies als unmöglich eingesehen ist. Es gebe ein solches Paar $\mathfrak{Z}_a, \mathfrak{Z}_{a+1}$. $\mathfrak{Z}_{a+1}$ entsteht aus $\mathfrak{Z}_a$, indem

(2) um eins gegenüber $\mathfrak{Z}_a$ nach rechts verschoben in (3) abgebildet wird. Damit kein Widerspruch gegen c) vorliegt, muß also $n_t^{(r)}$ das letzte Element von $\mathfrak{n}_{u-k-1}$ sein, ebenso muß $n_r^{(e)}$ das erste Element von $\mathfrak{n}_{d+k+1}$ sein. Ist $d < u$, so müßte daher $\mathfrak{n}_{d+k+1} + \ldots + \mathfrak{n}_{u-k-1}$ wenigstens ein Element mehr als $\mathfrak{m}_{d+1} + \ldots + \mathfrak{m}_{u-1}$ enthalten, was (1) widerspricht. Ist $u < d$, so müßte $\mathfrak{m}_u + \ldots + \mathfrak{m}_d$ wenigstens ein Element mehr als $\mathfrak{n}_{u-k} + \ldots + \mathfrak{n}_{d+k}$ enthalten. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Mit der im Hilfssatz gefundenen Zuordnung $\mathfrak{Z}_a$ von $\mathfrak{m}_{i+1} + \ldots + \mathfrak{m}_{i+l}$ auf eine Teilmenge von $\mathfrak{n}$ sind die Elemente von $\mathfrak{m}_{i+1} + \ldots + \mathfrak{m}_{i+l}$ in der in Satz 1 verlangten Weise abgebildet. Die Elemente von $\mathfrak{n}_{g+1} + \ldots + \mathfrak{n}_{h-1}$ sind eventuell bis auf Elemente aus $\mathfrak{n}_{g+1} + \ldots + \mathfrak{n}_{i+k+1}$ und $\mathfrak{n}_{i+l-k} + \ldots + \mathfrak{n}_{h-1}$ sämtlich Bildelemente von Elementen aus $\mathfrak{m}_{i+1} + \ldots + \mathfrak{m}_{i+l}$, wie aus den Eigenschaften von $\mathfrak{Z}_a$ unmittelbar folgt. Die Elemente aus $\mathfrak{n}_{g+1} + \ldots + \mathfrak{n}_{i+k+1}$ und $\mathfrak{n}_{i+l-k} + \ldots + \mathfrak{n}_{h-1}$ werden nun Elementen aus den unendlichen Mengen $\mathfrak{m}_i$ bzw. $\mathfrak{m}_{i+l+1}$ zugeordnet, dann ist auch für sie die in Satz 1 gewünschte Zuordnung hergestellt.

Auf diese Weise läßt sich die Zuordnung zwischen den unendlichen Mengen ausdehnen auf alle zwischen zwei unendlichen Mengen liegenden endlichen $\mathfrak{m}_i$ und $\mathfrak{n}_i$. Die noch übrigbleibenden Fälle, daß alle $\mathfrak{m}_i$ oder die $\mathfrak{m}_i$ mit $i \geqq i_0$ bzw. $i \leqq i_0$ endlich sind, können in ganz analoger Weise erledigt werden: Sind z. B. alle $\mathfrak{m}_i$, also auch alle $\mathfrak{n}_i$ endlich, so bildet man aus allen Elementen von $\mathfrak{m}$ bzw. $\mathfrak{n}$ die Folgen

$$(4) \qquad \ldots, m_{\alpha_{-1}}^{(-1)}, m_1^{(0)}, \ldots, m_{\alpha_0}^{(0)}, m_1^{(1)}, \ldots.$$

$$(5) \qquad \ldots, n_{\beta_{-1}}^{(-1)}, n_1^{(0)}, \ldots, n_{\beta_0}^{(0)}, n_1^{(1)}, \ldots.$$

Sei $\mathfrak{m}_{i_0} \neq 0$. Wir betrachten dann die Zuordnungen von (4) auf (5), die durch anordnungstreue Abbildung entstehen, wenn man das erste Element von $\mathfrak{m}_{i_0}$ der Reihe nach allen Elementen von $\sum_{j=i_0-k}^{i_0+k} \mathfrak{n}_j$ zuordnet. Eine dieser Zuordnungen ist die gesuchte.

§ 4.

Die Affinität der Normalformen.

Ist P ein intakter Operator, so gibt es nach dem Reziprokentheorem von O. Toeplitz (vgl. Anm. 5) eine Zahl $\mathsf{M} \geqq 1$, so daß für alle $x \neq 0$ gilt

$$(1) \qquad \frac{1}{\mathsf{M}} \leqq \frac{|Px|}{|x|} \leqq \mathsf{M} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\mathsf{M}} \leqq \frac{|P^{-1}x|}{|x|} \leqq \mathsf{M}.$$

Es sei $D_2 = P^* D_1 P$, D_1 und D_2 selbstadjungierte Diagonaloperatoren, P der eben betrachtete intakte Operator. Wir bezeichnen den Ausdruck $\frac{(D_1 x, x)}{|x|^2}$ mit $(x)_1$, analog $\frac{(D_2 x, x)}{|x|^2}$ mit $(x)_2$. Es gilt dann für alle $x \neq 0$, für die $D_2 x$ existiert.

$$\frac{1}{\mathsf{M}^2} \leqq \frac{(x)_2}{(Px)_1} \leqq \mathsf{M}^2. \tag{2}$$

Denn es ist

$$(x)_2 = \frac{(D_2 x, x)}{|x|^2} = \frac{(P^* D_1 P x, x)}{|x|^2} = \frac{(D_1 P x, P x)}{|P x|^2} \cdot \frac{|P x|^2}{|x|^2}.$$

(1) ergibt sofort die Behauptung.

Wir ordnen $D_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^{(1)} F_i^{(1)}$ eine Zerspaltung von $\mathfrak{H}$ zu: Für jedes ganze n bilden wir die kleinste abgeschlossene Hülle $\mathfrak{E}_n^{(1)}$ aller $F_i^{(1)} \mathfrak{H}$, deren zugehörige $\delta_i^{(1)}$ der Ungleichung $2^n \leqq \delta_i^{(1)} < 2^{n+1}$ genügen. Analog wird $\mathfrak{G}_n^{(1)}$ aus allen $F_i^{(1)} \mathfrak{H}$ gebildet, deren $\delta_i^{(1)}$ die Ungleichung $-2^{n+1} \leqq \delta_i^{(1)} < -2^n$ erfüllen. $\mathfrak{H}_0^{(1)}$ sei schließlich die abgeschlossene Hülle aller $F_i^{(1)} \mathfrak{H}$, deren $\delta_i^{(1)} = 0$ sind. Dann ist

$$\mathfrak{H} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{E}_n^{(1)} \oplus \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{G}_n^{(1)} \oplus \mathfrak{H}_0^{(1)} \tag{3}$$

eine Zerspaltung von $\mathfrak{H}$ in paarweise orthogonale abgeschlossene Teilräume. Die Dimensionen der $\mathfrak{E}_n^{(1)}$, $\mathfrak{G}_n^{(1)}$, $\mathfrak{H}_0^{(1)}$ seien mit $\alpha_n^{(1)}$, $\beta_n^{(1)}$, $\gamma^{(1)}$ bezeichnet. Zu D_2 gehöre die Zerspaltung

$$\mathfrak{H} = \Sigma \mathfrak{E}_n^{(2)} \oplus \Sigma \mathfrak{G}_n^{(2)} \oplus \mathfrak{H}_0^{(2)} \tag{4}$$

mit den Dimensionen $\alpha_n^{(2)}$, $\beta_n^{(2)}$, $\gamma^{(2)}$.

Satz 1. *Ist D_2 affin zu D_1, $D_2 = P^* D_1 P$, so gibt es ein $k > 0$, so daß für jedes ganze n und jedes positive ganze l*

$$\alpha_n^{(1)} + \ldots + \alpha_{n+l}^{(1)} \leqq \alpha_{n-k}^{(2)} + \ldots + \alpha_{n+l+k}^{(2)},$$
$$\alpha_n^{(2)} + \ldots + \alpha_{n+l}^{(2)} \leqq \alpha_{n-k}^{(1)} + \ldots + \alpha_{n+l+k}^{(1)},$$
$$\beta_n^{(1)} + \ldots + \beta_{n+l}^{(1)} \leqq \beta_{n-k}^{(2)} + \ldots + \beta_{n+l+k}^{(2)},$$
$$\beta_n^{(2)} + \ldots + \beta_{n+l}^{(2)} \leqq \beta_{n-k}^{(1)} + \ldots + \beta_{n+l+k}^{(1)}$$

gilt.

Beweis. Wir nehmen an, der Satz sei falsch und zwar der Teil des Satzes, der sich auf die erste der vier Ungleichungen bezieht (für die anderen schließe man analog). Dann gibt es Folgen n_i und l_i von ganzen Zahlen und eine über alle Grenzen wachsende Folge von positiven Zahlen a_i, so daß für alle $i = 1, 2, \ldots$

$$\alpha_{n_i}^{(1)} + \ldots + \alpha_{n_i+l_i}^{(1)} > \alpha_{n_i-a_i}^{(2)} + \ldots + \alpha_{n_i+l_i+a_i}^{(2)} \tag{5}$$

gilt.

Wir setzen

$$P^{-1}(\mathfrak{E}_{n_i}^{(1)} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{E}_{n_i+l_i}^{(1)}) = \mathfrak{M}_i, \tag{6}$$

$$P^{-1}\Big(\sum_{n=-\infty}^{n_i-1} \mathfrak{E}_n^{(1)} \oplus \sum_{n_i+l_i+1}^{+\infty} \mathfrak{E}_n^{(1)} \oplus \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{G}_n^{(1)} \oplus \mathfrak{H}_0^{(1)}\Big) = \mathfrak{N}_i.$$

Der Übergang von einer Stelle x zur Stelle Px soll durch einen Strich bezeichnet werden, $Px = x'$. Speziell ist also

$$\mathfrak{M}_i' = \mathfrak{E}_{n_i}^{(1)} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{E}_{n_i+l_i}^{(1)}, \tag{7}$$

$$\mathfrak{N}_i' = \sum_{n=-\infty}^{n_i-1} \mathfrak{E}_n^{(1)} \oplus \sum_{n_i+l_i+1}^{+\infty} \mathfrak{E}_n^{(1)} \oplus \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{G}_n^{(1)} \oplus \mathfrak{H}_0^{(1)}.$$

Da $\mathfrak{H} = \mathfrak{M}_i' \oplus \mathfrak{N}_i'$ ist, $\mathfrak{M}_i'$ und $\mathfrak{N}_i'$ nach (3) zueinander orthogonal, läßt sich wegen der Intaktheit von P jedes x aus $\mathfrak{H}$ auch eindeutig in der Form $x = y + z$ darstellen, y aus $\mathfrak{M}_i$, z aus $\mathfrak{N}_i$,

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{M}_i \oplus \mathfrak{N}_i \text{ [11]}. \tag{8}$$

Nach der Definition von $\mathfrak{E}_n^{(1)}$ gilt für eine Stelle x aus $\mathfrak{M}_i'$ stets

$$2^{n_i} \leqq (x)_1 < 2^{n_i+l_i+1}. \tag{9}$$

Jede Stelle von $\mathfrak{M}_i$ hat die Form $y = P^{-1}x$, x aus $\mathfrak{M}_i'$. Es sei $\mathsf{M}^2 \leqq 2^\alpha$; mittels (2) erhält man sofort aus (9)

$$2^{n_i-\alpha} \leqq (y)_2 < 2^{n_i+l_i+1+\alpha} \tag{10}$$

für alle y aus $\mathfrak{M}_i$.

Der Raum $\sum_{n_i-a_i}^{n_i+l_i+a_i} \mathfrak{E}_n^{(2)}$ hat nach (5) kleinere Dimension wie $\mathfrak{M}_i$. In $\mathfrak{M}_i$ muß es also wenigstens ein Element x_i geben, dessen Komponente in $\sum_{n_i-a_i}^{n_i+l_i+a_i} \mathfrak{E}_n^{(2)}$ bei der Zerspaltung nach (4) verschwindet. Wir erhalten so eine Folge x_i, $i = 1, 2, \ldots$, von Stellen aus $\mathfrak{M}_i$, $x_i = y_i + z_i$, y_i in $\sum_{n_i+l_i+a_i+1}^{+\infty} \mathfrak{E}_n^{(2)}$, z_i in $\sum_{-\infty}^{n_i-a_i-1} \mathfrak{E}_n^{(2)} \oplus \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{G}_n^{(2)} \oplus \mathfrak{H}_0^{(2)}$. Da $D_2 x_i$ existiert, lassen sich auch $D_2 y_i$ und $D_2 z_i$ bilden. Es gilt offenbar

$$(y_i)_2 > 2^{n_i+l_i+a_i}, \qquad (z_i)_2 < 2^{n_i-a_i}. \tag{11}$$

---

[11]) Es gilt in Wirklichkeit noch mehr: $\mathfrak{H}$ ist sogar die „direkte stetige Summe“ (vgl. F. Menn, Die konvergenzfreien linearen Räume ..., Diss. Münster 1934) von $\mathfrak{M}_i$ und $\mathfrak{N}_i$: Ist $x^{(n)}$ schwach konvergent gegen x und ist $x^{(n)} = y^{(n)} + z^{(n)}$, so konvergiert auch $y^{(n)}$ schwach gegen y, $z^{(n)}$ schwach gegen z. Doch wird hiervon kein Gebrauch gemacht. Die direkte stetige Zerlegung ist die affininvariante Verallgemeinerung der nur unitärinvarianten orthogonalen Zerlegung von $\mathfrak{H}$.

y_i läßt sich nach (8) zerlegen in

$$y_i = u_i + v_i, \tag{12}$$

u_i in $\mathfrak{M}_i$, v_i in $\mathfrak{N}_i$. z_i hat dann die Zerlegung

$$z_i = x_i - y_i = (x_i - u_i) - v_i, \tag{13}$$

$x_i - u_i$ in $\mathfrak{M}_i$, $-v_i$ in $\mathfrak{N}_i$.

Wir üben auf (12) P aus, und erhalten $y_i' = u_i' + v_i'$, mit u_i' in $\mathfrak{M}_i'$, v_i' in $\mathfrak{N}_i'$. Wegen (9) gilt

$$(u_i')_1 < 2^{n_i + l_i + 1}, \tag{14}$$

(11), (2) und $\mathsf{M}^3 \leqq 2^\alpha$ ergeben

$$(y_i')_1 > 2^{n_i + l_i + a_i - \alpha}. \tag{15}$$

Wir behaupten nun

$$(v_i')_1 > 2^{n_i + l_i + a_i - \alpha} \text{ für } a_i > \alpha + 1. \tag{16}$$

Beweis: u_i' und v_i' liegen in den zueinander orthogonalen Räumen $\mathfrak{M}_i'$ und $\mathfrak{N}_i'$, deren Projektionsoperatoren mit D_1 vertauschbar sind. Daher gilt

$$(D_1(u_i' + v_i'), u_i' + v_i') = (D_1 u_i', u_i') + (D_1 v_i', v_i'),$$

woraus

$$(y_i')_1 = (u_i' + v_i')_1 = (u_i')_1 \frac{|u_i'|^2}{|u_i'|^2 + |v_i'|^2} + (v_i')_1 \frac{|v_i'|^2}{|u_i'|^2 + |v_i'|^2} \leqq \text{Max}\,\{(u_i')_1, (v_i')_1\}$$

folgt. Einsetzen von (14) und (15) ergibt (16).

Gehen wir nun zur näheren Untersuchung von (13) über. Durch Anwendung von P erhalten wir $z_i' = (x_i' - u_i') - v_i'$, $x_i' - u_i'$ in $\mathfrak{M}_i'$, $-v_i'$ in $\mathfrak{N}_i'$. Nach (9) ist $(x_i' - u_i')_1 \geqq 2^{n_i}$, nach (16) ist wegen $a_i \to +\infty$ für genügend große i $(-v_i')_1 = (v_i')_1 > 2^{n_i + l_i + a_i - \alpha}$. Wie oben beweist man $(z_i')_1 = ((x_i' - u_i') - v_i')_1 \geqq \text{Min}\,\{(x_i' - u_i')_1, (v_i')_1\}$. Für genügend großes i ist also $(z_i')_1 \geqq 2^{n_i}$. Aus (11) und (2) ergibt sich aber $(z_i')_1 < 2^{n_i - a_i + \alpha}$; da a_i positiv über alle Grenzen strebt, ergibt dies einen Widerspruch. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Satz 2. *Zwei selbstadjungierte Diagonaloperatoren D_1 und D_2 sind dann und nur dann affin, wenn $\gamma^{(1)} = \gamma^{(2)}$ ist und wenn es ein $k > 0$ gibt, so daß für jedes ganze n und jedes positive ganze l gilt:*

$$\begin{aligned}
&\alpha_n^{(1)} + \ldots + \alpha_{n+l}^{(1)} \leqq \alpha_{n-k}^{(2)} + \ldots + \alpha_{n+l+k}^{(2)},\\
&\alpha_n^{(2)} + \ldots + \alpha_{n+l}^{(2)} \leqq \alpha_{n-k}^{(1)} + \ldots + \alpha_{n+l+k}^{(1)},\\
&\beta_n^{(1)} + \ldots + \beta_{n+l}^{(1)} \leqq \beta_{n-k}^{(2)} + \ldots + \beta_{n+l+k}^{(2)},\\
&\beta_n^{(2)} + \ldots + \beta_{n+l}^{(2)} \leqq \beta_{n-k}^{(1)} + \ldots + \beta_{n+l+k}^{(1)}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Beweis: $\gamma^{(1)}$ ist die Dimension des „Nullraumes" $\mathfrak{L}_1$ aller x, für die $D_1 x = 0$ ist. Ist $D_2 = P^* D_1 P$, so ist der Nullraum von D_2 gleich $P^{-1}\mathfrak{L}_1$, dessen Dimension wegen der Intaktheit von P^{-1} ebenfalls $\gamma^{(1)}$ sein muß, aus der Affinität von D_1 und D_2 folgt also $\gamma^{(1)} = \gamma^{(2)}$.

Wir können uns daher darauf beschränken zu zeigen, daß zwei Operatoren D_1 und D_2 mit $\gamma^{(1)} = \gamma^{(2)} = 0$ affin sind, sobald (17) erfüllt ist.

Jedes der $F_i^{(1)}$ von D_1 zerspalten wir weiter in zueinander orthogonale Projektionsoperatoren $\widetilde{F}^{(1)}$, deren $\widetilde{F}^{(1)}\mathfrak{H}$ sämtlich eindimensional sind. Wir erhalten so $D_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{\delta}_j^{(1)} \widetilde{F}_j^{(1)}$. Alle $\widetilde{\delta}_j^{(1)}$ sind von Null verschieden, die Anzahl der $\widetilde{\delta}_j^{(1)}$ mit $2^n \leqq \widetilde{\delta}_j^{(1)} < 2^{n+1}$ ist $\alpha_n^{(1)}$, die Anzahl der $\widetilde{\delta}_j^{(1)}$ mit $-2^{n+1} \leqq \widetilde{\delta}_j^{(1)} < 2^n$ ist $\beta_n^{(1)}$. Analoges gilt für D_2.

Nach (17) und dem mengentheoretischen Satz von § 3 gibt es eine eindeutige Zuordnung aller positiven $\widetilde{\delta}_j^{(1)}$ auf alle positiven $\widetilde{\delta}_j^{(2)}$, so daß

$$\frac{1}{2^{k+2}} \leqq \frac{\widetilde{\delta}^{(2)}_{\mathfrak{P}(j)}}{\widetilde{\delta}_j^{(1)}} = \pi_j \leqq 2^{k+2} \tag{18}$$

gilt, wenn $\mathfrak{P}(j)$ die j zugeordnete Zahl ist. Ebenso lassen sich die negativen $\widetilde{\delta}_j^{(1)}$ auf die negativen $\widetilde{\delta}_j^{(2)}$ so abbilden, daß (18) gilt.

Es sei nun U der unitäre Operator, der jedes $\widetilde{F}^{(2)}_{\mathfrak{P}(j)}\mathfrak{H}$ in $\widetilde{F}_j^{(1)}\mathfrak{H}$ abbildet, P der wegen (18) intakte Operator $\sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\pi_j}\, \widetilde{F}^{(2)}_{\mathfrak{P}(j)}$. Dann ist

$$(UP)^* D_1 (UP) = P^* \left(\sum \widetilde{\delta}_j^{(1)} \widetilde{F}^{(2)}_{\mathfrak{P}(j)}\right) P = \sum \widetilde{\delta}^{(2)}_{\mathfrak{P}(j)} \widetilde{F}^{(2)}_{\mathfrak{P}(j)} = D_2,$$

also ist D_2 affin zu D_1.

Unser Resultat läßt sich besonders einfach mittels der in § 2 eingeführten Matrizenschreibweise formulieren:

Satz 2a. *D_1 und D_2 seien zwei selbstadjungierte Diagonaloperatoren, die als Diagonalmatrizen $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ mit den Diagonalgliedern $\delta_i^{(1)}$ bzw. $\delta_i^{(2)}$ dargestellt seien (die zugrundegelegten Orthogonalsysteme von $\mathfrak{H}$ brauchen nicht dieselben zu sein). D_1 und D_2 sind dann und nur dann affin, wenn in $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ gleichviele Diagonalglieder verschwinden und wenn es eine positive Zahl N und eine Zuordnung $\mathfrak{P}$ aller $\delta_i^{(1)} \neq 0$ auf alle $\delta_i^{(2)} \neq 0$ gibt, so daß*

$$\frac{1}{\mathsf{N}} \leqq \frac{\delta^{(2)}_{\mathfrak{P}(i)}}{\delta_i^{(1)}} \leqq \mathsf{N}$$

ist.

Wir haben hier nur Diagonaloperatoren betrachtet. Satz 2 kann aber sofort auch für beliebige selbstadjungierte Operatoren ausgesprochen werden, wir brauchen nur daran zu erinnern, daß die Zahlen $\alpha_n, \beta_n, \gamma$ der zu A gehörigen Normalform durch A selbst gegeben sind als die Dimensionen der Räume $F_n^+\mathfrak{H}, F_n^-\mathfrak{H}, F_0\mathfrak{H}$ oder als gewisse Anzahlen von Eigenwerten von A.

(Eingegangen am 11. Oktober 1935.)

Die Gleichungstheorie im Hilbertschen Raum.

Von

Gottfried Köthe in Münster.

Einleitung.

Die Theorie des Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$ nahm ihren Ausgang vom Problem der unendlichvielen linearen Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten. D. Hilbert löste es für den Fall einer vollstetigen Matrix[1]), E. Schmidt gab für sehr allgemeine Systeme Auflösungsmethoden und Formeln für die Lösungen, die im wesentlichen mit Hilfe des Orthogonalisierungsverfahrens gewonnen sind[2]). Ein auch algebraisch wirklich befriedigendes Ergebnis für beliebige beschränkte Matrizen, wie es etwa für die zeilenfiniten Matrizen von O. Toeplitz[3]) und später für die halbfiniten von O. Toeplitz und mir[4]) gewonnen wurde, liegt aber bis heute nicht vor. In neuerer Zeit unternahm W. Schmeidler einen Vorstoß in dieser Richtung, er bewies[5]), daß jedes Gleichungssystem mit beschränkter Matrix einem solchen äquivalent ist, dessen Matrix nach Streichen der Nullzeilen und -spalten nur in der Hauptdiagonale und der Schrägzeile darunter von Null verschiedene Koeffizienten besitzt. Die Frage, ob dies die endgültigen Normalformen sind, bleibt aber offen.

Im folgenden wird nun das der Gleichungstheorie entsprechende Äquivalenzproblem für Operatoren des Hilbertschen Raumes in sehr allgemeiner Fassung gelöst und so eine algebraisch befriedigende Auflösungstheorie gefunden. Problemstellung und Resultate seien jetzt ausführlich auseinandergesetzt.

---

[1]) Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Teubner 1912 und 1924, Kap. 12.

[2]) Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, Palermo Rend. **25** (1908), S. 53—77.

[3]) Über die Auflösung unendlichvieler linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, Palermo Rend. **28** (1909), S. 88—96.

[4]) Theorie der halbfiniten unendlichen Matrizen, Journal f. d. reine u. angew. Math. **165** (1931), S. 116—127.

[5]) Zum Äquivalenzproblem beschränkter Bilinearformen, Journal f. d. reine u. angew. Math. **163** (1930), S. 135—140.

A sei ein in einem in $\mathfrak{H}$ überall dichten linearen Teilraum $\mathfrak{L}$ erklärter, linearer abgeschlossener[6]) Operator („Operator" ohne weiteren Zusatz soll stets einen solchen Operator bezeichnen). Gesucht werden alle x aus $\mathfrak{H}$, die einer Gleichung

$$Ax = c \tag{1}$$

genügen, deren rechte Seite ebenfalls in $\mathfrak{H}$ liegt. Ist A speziell ein beschränkter Operator, so geht (1) bei Einführung eines orthogonalen Koordinatensystems in $\mathfrak{H}$ in ein System von unendlichvielen Gleichungen mit beschänkter Matrix über, umgekehrt entspricht jedem solchen Gleichungssystem eine Gleichung (1) mit beschränktem A.

Im Fall von n Gleichungen mit m Unbekannten erreicht man die Normalform des Gleichungssystems bekanntlich durch zwei Operationen, Übergang zu geeigneten linearen Kombinationen der ursprünglichen Gleichungen und Einführung neuer Unbekannter.

Der ersteren entspricht in $\mathfrak{H}$ der Übergang von (1) zu

$$QAx = Qc; \tag{2}$$

dabei ist Q ein „intakter", d. h. beschränkter und eine eindeutige beschränkte Reziproke besitzender Operator. (1) und (2) haben dieselben Lösungen.

Der Einführung neuer Unbekannter entspricht der Übergang von x zu $y = P^{-1}x$ mit intaktem P, statt (2) wird also

$$QAPy = Qc \tag{3}$$

betrachtet. Die Lösungen y von (3) entsprechen eineindeutig den Lösungen $x = Py$ von (1), es genügt also, (3) statt (1) zu behandeln.

Wir bezeichnen zwei Operatoren A und B als *äquivalent*, wenn es zwei intakte Operatoren P und Q gibt, so daß $B = QAP$ ist.

Das Problem der Gleichungstheorie in $\mathfrak{H}$ ist also gleichbedeutend damit, die Klasseneinteilung aller Operatoren nach der Äquivalenz anzugeben und für je einen zu einer Klasse gehörigen Operator die Gleichungen (3) aufzulösen.

Die gesuchte Klasseneinteilung ist in den beiden folgenden Sätzen enthalten:

Satz 1. *Jeder Operator A hat die Form $UGP = QGV$, U, V unitär, P, Q intakt, G ein Operator, der sich in einem geeigneten orthogonalen Koordinatensystem von $\mathfrak{H}$ als eine Matrix darstellt, die nach Streichen der Nullzeilen und -spalten nur noch in der Hauptdiagonale von Null verschiedene reelle Elemente δ_i besitzt. Jeder Operator ist also äquivalent einem Operator vom Typus G.*

---

[6]) Ein Operator A heißt *abgeschlossen*, wenn aus $x_n \to x$ und $Ax_n \to y$ folgt, daß Ax existiert und gleich y ist.

Wir bemerken, daß sich damit die Schmeidlersche Normalform als nicht endgültig erwiesen hat, auch in der Schrägzeile unterhalb der Hauptdiagonalen können noch lauter Nullen erzielt werden.

Die Auflösungsverhältnisse einer Gleichung $Gx = c$ sind ohne weiteres zu übersehen.

Satz 2. *Zwei Operatoren G_1 und G_2 sind dann und nur dann äquivalent, wenn die sie darstellenden Matrizen gleichviele Nullzeilen bzw. -spalten besitzen und wenn es eine eineindeutige Zuordnung der $\delta_i^{(1)}$ von G_1 auf die $\delta_i^{(2)}$ von G_2 gibt — $\delta_i^{(1)}$ entspreche $\delta_{p_i}^{(2)}$ —, so daß die Quotienten $|\delta_i^{(1)}|/|\delta_{p_i}^{(2)}|$ zwischen festen positiven Schranken liegen.*

Bis auf die Aussage, daß in beiden Zerlegungen von A dasselbe G genommen werden kann, läßt sich Satz 1 in einfacher Weise aus Resultaten von J. von Neumann[7]) und Ergebnissen von mir[8]) ableiten (§ 1), Satz 2 und die noch fehlende Aussage von Satz 1 ergeben sich nach einer elementaren Methode, die ich an einem ähnlichen Problem entwickelt habe[8]) (§ 2).

Unser Resultat ist von Interesse für die Theorie der linearen Räume. $\mathfrak{H}$ ist der erste, nicht konvergenzfreie[9]) lineare Raum, in dem jetzt eine einfache Gleichungstheorie gefunden ist, es ist zu hoffen, daß auch in anderen solchen Räumen, etwa in den von F. Riesz untersuchten[10]), eine solche Theorie möglich ist. Um die vorliegenden Ergebnisse übertragen zu können, wird man allerdings auch den Beweis von Satz 1 auf elementarem Wege, d. h. ohne Benutzung der Spektraltheorie führen müssen.

§ 1.

Mit A ist jeder zu A äquivalente Operator linear, abgeschlossen und in einem in $\mathfrak{H}$ überall dichten Teilraum erklärt.

B sei zu A äquivalent, $B = QAP$. Da P und Q linear sind, ist mit A auch B linear. Sei x_n konvergent gegen x, $QAPx_n$ gegen y. Dann ist wegen der Intaktheit von P auch Px_n konvergent gegen Px und wegen der Intaktheit von Q^{-1} ist $Q^{-1}(QAPx_n) = A(Px_n)$ gegen $Q^{-1}y$ konvergent.

---

[7]) Über adjungierte Funktionaloperationen, Annals of Math., sec. series 33 (1932), S. 294—310.

[8]) Das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen im Hilbertschen Raum, Math. Zeitschr. 41 (1936), S. 137—152. Wir bezeichnen diese Arbeit im Text mit K.

[9]) Vgl. § 15 von G. Köthe u. O. Toeplitz, Lineare Räume mit unendlichvielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen, Journal f. d. reine u. angew. Math. 171 (1934), S. 194—226. Bisher ist die Gleichungstheorie in den konvergenzfreien Räumen φ, ω, ψ vollständig entwickelt worden (vgl. die in den Anm. 3 und 4 zitierten Arbeiten).

[10]) F. Riesz, Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, Gauthier-Villars 1913.

Ist A abgeschlossen, so existiert $A(Px)$ und ist gleich $Q^{-1}y$. Also existiert auch $QAPx$ und ist gleich y, QAP ist abgeschlossen. Ist $\mathfrak{L}$ der Definitionsbereich von A, so ist $P^{-1}\mathfrak{L}$ der von QAP, daraus folgt die letzte Behauptung.

Damit ist der in der Einleitung ausgeführte Übergang von (1) zu (3) erst wirklich gerechtfertigt, QAP ist wieder ein Operator in dem von uns betrachteten Sinn.

Aus der Linearität und Abgeschlossenheit eines Operators A folgt sofort, daß die Menge aller x aus $\mathfrak{H}$, für die Ax erklärt und gleich Null ist, einen abgeschlossenen linearen Teilraum $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{H}$, den *Nullraum* von A, bildet. Die Gesamtheit der zu $\mathfrak{N}$ orthogonalen Elemente bildet den Komplementärraum $\mathfrak{H} - \mathfrak{N}$. Alle Ax bilden einen linearen Teilraum $\mathfrak{W}$ von $\mathfrak{H}$, dessen abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{W}}$ sei.

Als *Diagonaloperator* bezeichnen wir einen Operator der Form $D = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i F_i$, wobei δ_i eine komplexe Zahl ist und die F_i paarweise orthogonale Projektionsoperatoren bedeuten, deren Summe der identische Operator E ist. D ist dann und nur dann selbstadjungiert (hypermaximal), wenn die δ_i reell sind. Führt man Koordinaten in $\mathfrak{H}$ ein, indem man als Koordinatenvektoren ein normiertes Orthogonalsystem nimmt, das sich aus Orthogonalsystemen der einzelnen $F_i\mathfrak{H}$ zusammensetzt, so wird D durch eine Diagonalmatrix $\mathfrak{D}$ dargestellt mit den δ_i in der Hauptdiagonale, jedes so oft, wie die Dimension von $F_i\mathfrak{H}$ angibt. Ein Diagonaloperator ist also vom Typus G.

Wir beweisen nun Satz 1 bis auf die Gleichheit von G in den beiden Zerlegungen.

1. *Der Fall* $\mathfrak{N} = 0$, $\overline{\mathfrak{W}} = \mathfrak{H}$.

J. von Neumann hat bewiesen[11]), daß unter diesen Voraussetzungen A die Gestalt

$$A = UB = CU \tag{4}$$

hat; dabei bedeutet U einen unitären Operator, B und C sind die selbstadjungierten Operatoren $\sqrt{A^*A}$ und $\sqrt{AA^*}$.

Jeder selbstadjungierte Operator hat nach $K.$ die Form DR, D ein selbstadjungierter Diagonaloperator, R ein intakter mit D vertauschbarer Operator. Aus (4) erhalten wir somit

$$A = UD_1R_1 = R_2D_2U, \tag{5}$$

D_1, D_2 Diagonaloperatoren, R_1, R_2 intakt, U unitär. Satz 1 ist damit in unserem Spezialfall bis auf die Identität von D_1 und D_2 bewiesen.

[11]) Vgl. die in Anm. 7 zitierte Arbeit.

Wir bemerken noch, daß wir im Fall 1 sogar die Form

6) $$A = D_1 P = Q D_2$$

erreichen können, D_1, D_2 Diagonaloperatoren, P, Q intakt.

Denn $U D_1 R_1$ kann auch als $(U D_1 U^{-1})(U R_1)$ geschrieben werden, $U D_1 U^{-1}$ ist mit D_1 Diagonaloperator, $U R_1$ ist intakt.

2. *Der allgemeine Fall.*

A bildet $\mathfrak{H} - \mathfrak{N}$ linear und eineindeutig auf $\mathfrak{W}$ ab, $\mathfrak{H} - \mathfrak{N}$ und $\overline{\mathfrak{W}}$ haben also gleiche Dimension. Es gibt daher einen Operator W, der $\mathfrak{N}$ auf Null und $\mathfrak{H} - \mathfrak{N}$ isometrisch auf $\overline{\mathfrak{W}}$ abbildet. $\tilde{W}$ sei der Operator, der diese Abbildung rückgängig macht und $\mathfrak{H} - \overline{\mathfrak{W}}$ auf Null abbildet. $W\tilde{W}$ bildet $\overline{\mathfrak{W}}$ identisch auf sich ab, $\mathfrak{H} - \overline{\mathfrak{W}}$ auf Null. A läßt sich also in der Form

(7) $$A = W(\tilde{W} A) = W B$$

schreiben, B ein Operator, der $\mathfrak{N}$ auf Null abbildet und eine in $\mathfrak{H} - \mathfrak{N}$ dichte Lineamannigfaltigkeit in eine ebensolche. Auf B, als Operator in $\mathfrak{H} - \mathfrak{N}$ aufgefaßt, kann also (6) angewendet werden (falls $\mathfrak{H} - \mathfrak{N}$ endliche Dimension hat, gilt (6) natürlich auch!). Wir erhalten

(8) $$B = D P,$$

D selbstadjungierter Diagonaloperator in $\mathfrak{H} - \mathfrak{N}$, P intakt in $\mathfrak{H} - \mathfrak{N}$. Wir erklären D auf ganz $\mathfrak{H}$, indem wir ihn auf $\mathfrak{N}$ Null setzen, P wird in $\mathfrak{H}$ intakt, wenn wir ihn auf $\mathfrak{N}$ gleich dem identischen Operator setzen. (8) gilt auch für die erweiterten Operatoren.

Wir behaupten nun, daß

(9) $$W D = U G_1$$

ist, U unitär, G_1 von der in Satz 1 behaupteten Form G.

D ist ein selbstadjungierter Diagonaloperator, es gibt also in $\mathfrak{H} - \mathfrak{N}$ ein normiertes vollständiges Orthogonalsystem $\tilde{o}_j$, $j = 1, 2, \ldots$, so daß $D\tilde{o}_j = \delta_j \tilde{o}_j$ ist, mit reellen $\delta_j \neq 0$. Wir erweitern das System der $\tilde{o}_j$ zu einem Orthogonalsystem o_i von ganz $\mathfrak{H}$. Es sei etwa

(10) $$\tilde{o}_j = o_{m_j},\ m_1 < m_2 < \ldots.$$

Aus den o_i greifen wir ein zweites Teilsystem

(11) $$\tilde{\tilde{o}}_j = o_{n_j},\ n_1 < n_2 < \ldots$$

derart heraus, daß der von den $\tilde{\tilde{o}}_j$ aufgespannte abgeschlossene Teilraum $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{H}$ die Dimension von $\overline{\mathfrak{W}}$ hat und außerdem $\mathfrak{H} - \mathfrak{M}$ die Dimension von $\mathfrak{H} - \overline{\mathfrak{W}}$.

R sei der Operator, der den o_{m_j} eineindeutig die o_{n_j} zuordnet, also $\mathfrak{H} - \mathfrak{N}$ isometrisch auf $\mathfrak{M}$ abbildet, und $\mathfrak{N}$ annulliert.

RD hat den Typus G: Aus der Definition der $\tilde{o}_j = o_{m_j}$ folgt

(12) $(RD)\,o_{m_j} = \delta_j\, o_{n_j}, \quad (RD)\,o_k = 0, \quad k \neq m_j, \quad j = 1, 2, \ldots.$

Stellt man RD im Koordinatensystem o_i dar, so erhält man also eine Matrix, die nach Streichen der Nullzeilen und Nullspalten in eine Matrix übergeht, die in der Hauptdiagonale die Elemente δ_j, sonst überall Null stehen hat.

(9) ist bewiesen, falls wir zeigen können, daß $W = UR$ ist für einen geeigneten unitären Operator U.

W bildet $\mathfrak{H} - \mathfrak{N}$ isometrisch auf $\overline{\mathfrak{W}}$ ab, $\mathfrak{N}$ auf 0. R bildet $\mathfrak{H} - \mathfrak{N}$ isometrisch auf $\mathfrak{M}$ ab, $\mathfrak{N}$ auf 0. Um W aus R zu erhalten, hat man also nach R noch eine isometrische Abbildung von $\mathfrak{M}$ auf $\overline{\mathfrak{W}}$ auszuführen. Diese kann auf $\mathfrak{H} - \mathfrak{M}$ beliebig erklärt werden. Wegen der Gleichheit der Dimensionen von $\mathfrak{H} - \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{H} - \overline{\mathfrak{W}}$ kann man auch $\mathfrak{H} - \mathfrak{M}$ isometrisch auf $\mathfrak{H} - \overline{\mathfrak{W}}$ abbilden, so daß wir insgesamt einen unitären Operator U erhalten. W hat also die Form UR.

Aus (7), (8), (9) ergibt sich $A = UG_1P$. Die zweite in Satz 1 behauptete Zerlegung $A = QG_2V$ leitet man analog ab[12]). Satz 1 ist damit bis auf $G_1 = G_2$ bewiesen.

Es ist leicht, die Gleichung $RDx = G_1 x = c$ aufzulösen. Im Koordinatensystem o_i ist sie nach (12) äquivalent dem Gleichungssystem

$$\text{(13)} \qquad \begin{cases} \delta_j \xi_{m_j} = \gamma_{n_j}, & j = 1, 2, \ldots \\ 0 = \gamma_k, & k \neq n_j, \end{cases}$$

wobei die ξ und γ die Koordinaten von x bzw. c sind.

Das homogene System hat genau alle x mit $\xi_{m_j} = 0$, $j = 1, 2, \ldots$ als Lösungen. Das inhomogene System ist genau für alle c, für die $\sum_j \frac{|\gamma_{n_j}|^2}{|\delta_j|^2}$ konvergiert und alle $\gamma_k = 0$ sind, lösbar. Die Lösung x von kleinstem Absolutbetrag hat die Koordinaten $\xi_{m_j} = \frac{\gamma_{n_j}}{\delta_j}$, $j = 1, 2, \ldots$, $\xi_l = 0$ für $l \neq m_j$.

Satz 1 gibt uns einen einfachen Überblick über die Bildräume $\mathfrak{W}$ beliebiger Operatoren A. $\mathfrak{W}$ besteht aus allen Stellen UG_1Px. Mit x durchläuft auch Px ganz $\mathfrak{H}$, also ist $\mathfrak{W}$ auch der Bildraum des Operators UG_1. Die Stellen UG_1x sind aber leicht zu übersehen. Die G_1x sind gerade die Stellen $\sum_j \delta_j \xi_j o_{n_j}$, für die $\sum_j |\xi_j|^2$ und $\sum_j |\delta_j \xi_j|^2$ konvergiert. Die $U o_{n_j}$ bilden ein Orthogonalsystem $\hat{o}_j$ in $\mathfrak{W}$, wir erhalten also:

[12]) Man kann auch zu A^* übergehen und aus der Zerlegung von A^* die von A ableiten: Sei $A^* = UGP$. Dann ist $A = A^{**} = P^*G^*U^*$, G^* hat wieder den Typus G, P^* ist intakt, U^* unitär. Die Beziehung $A = A^{**}$ hat J. v. Neumann l. c. für beliebige lineare abgeschlossene Operatoren bewiesen.

In dem Bildraum $\mathfrak{W}$ eines beliebigen Operators gibt es stets ein normiertes Orthogonalsystem $\hat{o}_j$ und dazu reelle Zahlen $\delta_1, \delta_2, \ldots$ ungleich Null, so daß $\mathfrak{W}$ aus der Gesamtheit der Stellen $\sum_j \eta_j \hat{o}_j$ besteht, für die sowohl $\Sigma |\eta_j|^2$ wie auch $\sum \frac{|\eta_j|^2}{|\delta_j|^2}$ konvergiert.

Dies kann auch in der Form eines Lösbarkeitskriteriums für (1) ausgesprochen werden [13]).

§ 2.

1. Wir zeigen zuerst, daß die Bedingungen von Satz 2 notwendig sind.

G_1 und G_2 seien zwei äquivalente Normalformen, $G_2 = Q G_1 P$, P, Q intakt.

Die G_1 und G_2 darstellenden Matrizen haben gleichviele Nullzeilen bzw. -spalten.

Die Anzahl der Nullspalten der G_1 (G_2) darstellenden Matrix ist gleich der Dimension des Nullraumes $\mathfrak{N}_1$ ($\mathfrak{N}_2$). Aus $G_2 = Q G_1 P$ folgt $\mathfrak{N}_2 = P^{-1}\mathfrak{N}_1$. P^{-1} ist intakt, also haben $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ gleiche Dimension.

Die Anzahl der Nullzeilen der G_1 (G_2) darstellenden Matrix ist gleich der Dimension von $\mathfrak{H} - \overline{\mathfrak{W}}_1$ ($\mathfrak{H} - \overline{\mathfrak{W}}_2$), $\mathfrak{W}_1$ ($\mathfrak{W}_2$) der Bildraum von G_1 (G_2). $\mathfrak{W}_2$ ist gleich $Q\mathfrak{W}_1$, wegen der umkehrbaren Stetigkeit von Q ist auch $\overline{\mathfrak{W}}_2 = Q\overline{\mathfrak{W}}_1$, schließlich bleibt bei Q die Dimension des Komplementärraumes ungeändert, $\mathfrak{H} - \overline{\mathfrak{W}}_1$ und $\mathfrak{H} - \overline{\mathfrak{W}}_2$ haben also gleiche Dimension.

Der Beweis, daß auch die Permutationsbedingung von Satz 2 notwendig ist, kann ganz analog dem Beweise von *K*, § 4, Satz 1 durchgeführt werden. Wir begnügen uns daher mit der Angabe der wichtigsten Punkte, die zur Übertragung nötig sind und überlassen die Durchführung im einzelnen dem Leser.

---

[13]) Noch in anderer Richtung läßt sich unser Resultat deuten: Wir führen einen neuen Hilbertschen Raum $\mathfrak{H}_A$ ein. $\mathfrak{H}_A$ bestehe aus allen $y = \Sigma \eta_j \hat{o}_j$ mit konvergenter $\sum \frac{|\eta_j|^2}{|\delta_j|^2}$. Die Metrik sei durch $|y| = \sum \frac{|\eta_j|^2}{|\delta_j|^2}$ festgelegt. $\mathfrak{H}_A$ hat ersichtlich die Eigenschaften eines Hilbertschen Raumes. UG läßt sich wegen (13) sofort zu einer isometrischen Abbildung von *ganz* $\mathfrak{H} - \mathfrak{N}$ auf $\mathfrak{H}_A$ erweitern, $A = UGQ$ kann also zu einem auf ganz $\mathfrak{H} - \mathfrak{N}$ erklärten Operator A fortgesetzt werden, der $\mathfrak{H} - \mathfrak{N}$ eineindeutig und umkehrbar stetig auf ganz $\mathfrak{H}_A$ abbildet:

Jeder (linear abgeschlossene) Operator A in $\mathfrak{H}$ läßt sich zu einem auf ganz $\mathfrak{H} - \mathfrak{N}$ und damit auf ganz $\mathfrak{H}$ erklärten Operator fortsetzen, der $\mathfrak{H} - \mathfrak{N}$ linear homöomorph auf einen anderen Hilbertschen Raum $\mathfrak{H}_A$ abbildet.

Nach dem Reziprokentheorem von O. Toeplitz[14]) gibt es zwei Konstanten $\mathsf{N}, \mathsf{H} > 1$, so daß

$$\frac{1}{\mathsf{N}} \leqq \frac{|Px|}{|x|} \leqq \mathsf{N}, \qquad \frac{1}{\mathsf{H}} \leqq \frac{|Qx|}{|x|} \leqq \mathsf{H} \tag{14}$$

für alle $x \neq 0$ aus $\mathfrak{H}$ gilt.

Wir setzen $\frac{|G_1 x|}{|x|} = \{x\}_1$, $\frac{|G_2 x|}{|x|} = \{x\}_2$ für $x \neq 0$. Aus (14) und

$$\{x\}_2 = \frac{|Q G_1 P x|}{|x|} = \frac{|Q(G_1 P x)|}{|G_1 P x|} \cdot \frac{|G_1 (P x)|}{|P x|} \cdot \frac{|P x|}{|x|}$$

folgt für $\mathsf{N}\mathsf{H} = \mathsf{M}$

$$\frac{1}{\mathsf{M}} \leqq \frac{\{x\}_2}{\{Px\}_1} \leqq \mathsf{M}, \tag{15}$$

das Analogon zur Beziehung (2) in *K.* § 4.

G_1 wird nun eine Zerlegung von $\mathfrak{H}$ in paarweise orthogonale Teilräume zugeordnet. Nach der Definition der Operatoren vom Typus G gibt es zu G_1 ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem $o_i^{(1)}$ von $\mathfrak{H}$, so daß

$$G_1 o_{m_j}^{(1)} = \delta_j^{(1)} o_{n_j}^{(1)}, \quad G_1 o_k^{(1)} = 0, \quad k \neq m_j, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{16}$$

gilt. Diejenigen $o_{m_j}^{(1)}$, deren zugehörige $\delta_j^{(1)}$ der Ungleichung

$$2^n \leqq |\delta_j^{(1)}| < 2^{n+1} \tag{17}$$

genügen, spannen einen abgeschlossenen Teilraum $\mathfrak{E}_n^{(1)}$ von $\mathfrak{H}$ auf. Der Nullraum $\mathfrak{N}_1$ von G_1 wird von den $o_k^{(1)}$ aufgespannt. Also ist

$$\mathfrak{H} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{E}_n^{(1)} \oplus \mathfrak{N}_1 \tag{18}$$

eine Zerlegung von $\mathfrak{H}$ in paarweise orthogonale Teilräume. Die Dimension $\alpha_n^{(1)}$ von $\mathfrak{E}_n^{(1)}$ ist gleich der Anzahl der $\delta_j^{(1)}$, die (17) erfüllen.

Zu G_2 gehöre die Zerlegung

$$\mathfrak{H} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{E}_n^{(2)} \oplus \mathfrak{N}_2. \tag{19}$$

$\alpha_n^{(2)}$ sei die Dimension von $\mathfrak{E}_n^{(2)}$.

Die *K.* § 4, Satz 1 entsprechende Behauptung lautet nun:

Es gibt ein $k > 0$, so daß für jedes ganze n und jedes positive ganze l

$$\begin{aligned} \alpha_n^{(1)} + \ldots + \alpha_{n+l}^{(1)} &\leqq \alpha_{n-k}^{(2)} + \ldots + \alpha_{n+l+k}^{(2)} \\ \alpha_n^{(2)} + \ldots + \alpha_{n+l}^{(2)} &\leqq \alpha_{n-k}^{(1)} + \ldots + \alpha_{n+l+k}^{(1)} \end{aligned} \tag{20}$$

ist.

---

[14]) Die Jacobische Transformation der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen, Göttinger Nachrichten 1907, S. 1—8.

Wie beim Beweise von *K.* § 4, Satz 1 wird angenommen, daß es je eine Folge n_i und l_i von ganzen Zahlen und eine über alle Grenzen wachsende Folge von positiven Zahlen a_i gibt, so daß für alle $i = 1, 2, \ldots$

$$\alpha^{(1)}_{n_i} + \ldots + \alpha^{(1)}_{n_i + l_i} > \alpha^{(2)}_{n_i - a_i} + \ldots + \alpha^{(2)}_{n_i + l_i + a_i}$$

ist. Dann wird wie bei *K.* eine Folge x_i konstruiert, x_i in

$$\mathfrak{M}_i = P^{-1}(\mathfrak{E}^{(1)}_{n_i} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{E}^{(1)}_{n_i + l_i}),$$

die Komponente von x_i in $\sum_{n_i - a_i}^{n_i + l_i + a_i} \mathfrak{E}^{(2)}_n$ gleich Null, aus deren Existenz ein Widerspruch mit den Ungleichungen (14) und (15) herzuleiten ist.

Setzt man $\mathsf{M} \leqq 2^{\alpha}$ und bezeichnet man wieder Px mit x', so ergeben sich die Ungleichungen (9), (10), (11), (14) und (15) aus *K.* auch für unsere geschweiften Klammern. Statt *K.* (16) erhalten wir nur die schwächere Beziehung

$$\{v'_i\}_1 > 2^{n_i + l_i + a_i - \alpha - 1} \quad \text{für} \quad a_i > \alpha + 2.$$

Denn die beim Beweise von (16) verwendete Ungleichung

$$(u'_i + v'_i)_1 \leqq \mathrm{Max}[(u'_i)_1, (v'_i)_1]$$

ist für die geschweiften Klammern nicht richtig, man hat aber

$$\{u'_i + v'_i\}_1 \leqq \mathrm{Max}\,[2\{u'_i\}_1, 2\{v'_i\}_1].$$

Ebenso hat man am Schlusse des Beweises die Ungleichung

$$\{(x'_i - u'_i) - v'_i\}_1 \geqq \mathrm{Min}\,[\tfrac{1}{2}\{x'_i - u'_i\}_1, \tfrac{1}{2}\{v'_i\}_1]$$

statt der ohne die Faktoren $\frac{1}{2}$ zu verwenden. Beide Ungleichungen sind elementar beweisbar[15]) und reichen für den Widerspruch hin.

Bedenkt man, daß $\alpha^{(1)}_n$ die Anzahl der $\delta^{(1)}_j$ in $\mathfrak{E}^{(1)}_n$ bedeutet, so folgert man aus (20) und dem mengentheoretischen Satz von *K.* § 3, daß es eine eineindeutige Zuordnung aller $\delta^{(1)}_j$ auf alle $\delta^{(2)}_j$ gibt, so daß das $\delta^{(1)}_j$

---

[15]) Wir beweisen etwa die erste: u'_i und v'_i sind nach Konstruktion orthogonal und es gilt $G_1(u'_i + v'_i) = G_1 u'_i + G_1 v'_i$. Also ist

$$(u'_i + v'_i)_1 = \frac{|G_1 u'_i + G_1 v'_i|}{|u'_i + v'_i|} \leqq \frac{|G_1 u'_i|}{|u'_i|} \cdot \frac{|u'_i|}{|u'_i + v'_i|} + \frac{|G_1 v'_i|}{|v'_i|} \cdot \frac{|v'_i|}{|u'_i + v'_i|}$$

$$< \frac{|u'_i| + |v'_i|}{|u'_i + v'_i|} \cdot \mathrm{Max}\,[\{u'_i\}_1, \{v'_i\}_1].$$

Es ist $|u'_i + v'_i| = \sqrt{|u'_i|^2 + |v'_i|^2}$. Aus $2(|u'_i + v'_i|^2) \geqq (|u'_i| + |v'_i|)^2$ folgt sogar $\frac{|u'_i| + |v'_i|}{|u'_i + v'_i|} \leqq \sqrt{2}$, also sicher die Behauptung.

aus $\mathfrak{E}_n^{(1)}$ zugeordnete $\delta_{p_j}^{(2)}$ in $\sum_{n-k-1}^{n+k+1} \mathfrak{E}_i^{(2)}$ liegt, also der Ungleichung

$$2^{n-k-1} \leqq |\delta_{p_j}^{(2)}| < 2^{n+k+2}$$

genügt. Wegen (17) ist daher $\frac{1}{2^{k+2}} \leqq \frac{|\delta_j^{(1)}|}{|\delta_{p_j}^{(2)}|} \leqq 2^{k+2}$, die Notwendigkeit der Bedingungen von Satz 2 ist bewiesen.

2. *Die Bedingungen von Satz 2 sind hinreichend.*

G_1 und G_2 seien zwei Operatoren, die sie erfüllen. Den Gleichungen (16) für G_1 mögen die Gleichungen

$$G_2 o_{r_l}^{(2)} = \delta_l^{(2)} o_{s_l}^{(2)}, \quad G_2 o_t^{(2)} = 0 \text{ für } t \neq r_l,\ l = 1, 2, \ldots \tag{21}$$

für G_2 entsprechen. Nach Voraussetzung haben $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{H} - \mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{H} - \mathfrak{N}_2$, $\overline{\mathfrak{W}}_1$ und $\overline{\mathfrak{W}}_2$, schließlich $\mathfrak{H} - \overline{\mathfrak{W}}_1$ und $\mathfrak{H} - \overline{\mathfrak{W}}_2$ gleiche Dimension. Ferner ist für geeignetes M

$$\frac{1}{\mathsf{M}} \leqq \frac{|\delta_i^{(1)}|}{|\delta_{p_i}^{(2)}|} \leqq \mathsf{M}, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{22}$$

Es gibt dann zwei unitäre Operatoren U und V, für die

$$U o_{r_{p_i}}^{(2)} = o_{m_i}^{(1)},\ i = 1, 2, \ldots, \quad U \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}_1,$$

$$V o_{n_i}^{(1)} = o_{s_{p_i}}^{(2)},\ i = 1, 2, \ldots, \quad V(\mathfrak{H} - \overline{\mathfrak{W}}_1) = \mathfrak{H} - \overline{\mathfrak{W}}_2$$

gilt. Für den Operator $V G_1 U$ gilt

$$V G_1 U o_{r_{p_i}}^{(2)} = \delta_i^{(1)} o_{s_{p_i}}^{(2)},\ i = 1, 2, \ldots, \quad V G_1 U \mathfrak{N}_2 = 0. \tag{23}$$

Der Operator R, der durch die Gleichungen

$$R o_{s_{p_i}}^{(2)} = \frac{\delta_{p_i}^{(2)}}{\delta_i^{(1)}} o_{s_{p_i}}^{(2)}, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

$Rx = x$ für x aus $\mathfrak{H} - \overline{\mathfrak{W}}_2$ erklärt ist, ist wegen (22) ein intakter selbstadjungierter Diagonaloperator. Da die p_i genau alle l durchlaufen, wird nach (23) und (21)

$$R V G_1 U = G_2,$$

G_2 ist äquivalent G_1. Satz 2 ist hiermit bewiesen.

3. Der Beweis von Satz 1 kann jetzt leicht vollendet werden. Es sei

$$A = U G_1 P = Q G_2 V. \tag{24}$$

G_1 und G_2 sind daher äquivalent. Nach dem eben Bewiesenen ist dann $G_2 = \dot{R} G_1 \dot{U}$, $\dot{R}$ intakt, $\dot{U}$ unitär. Einsetzen in (24) ergibt $A = (Q\dot{R}) G_1 (\dot{U} V)$. Da $Q\dot{R}$ intakt und $\dot{U} V$ unitär ist, kann in (24) $G_2 = G_1$ gewählt werden.

(Eingegangen am 22. Oktober 1935.)

Über den Konvergenzbereich des Verfahrens der schrittweisen Näherungen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Von

Max Müller in Heidelberg.

Sind in dem Differentialgleichungssystem

$$y_\nu' = f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

die Funktionen f_ν im Bereich

$$(1) \qquad |x - x_0| \leqq a, \ |y_1 - y_{10}| \leqq b, \ \ldots, \ |y_n - y_{n0}| \leqq b$$

stetig, ihrem absoluten Betrage nach nicht größer als M und einer Lipschitzbedingung unterworfen, so liefert die Methode der schrittweisen Näherungen das Integralsystem $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ mit den Ausgangswerten $y_1(x_0) = y_{10}, \ldots, y_n(x_0) = y_{n0}$ mindestens im Bereich

$$(2) \qquad |x - x_0| \leqq a' = \operatorname{Min}\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Sind alle Variablen und Funktionen komplex und die Funktionen f_ν im Bereich (1) regulär analytisch, so sind die Lösungen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ mindestens im Kreis $|x - x_0| < a'$ regulär analytisch, also ist der Konvergenzradius ihrer Potenzreihenentwicklungen an der Stelle x_0

$$(3) \qquad r \geqq a' = \operatorname{Min}\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Daß man für die Gesamtheit aller Differentialgleichungen, bei denen die Funktionen f_ν die im ersten Absatz genannten Voraussetzungen erfüllen, in (2) die Zahl a' nicht durch eine größere ersetzen kann, zeigt das triviale Beispiel, wo die Funktionen f_ν im Bereich (1) alle gleich der Konstanten M, außerhalb dieses Bereiches aber gar nicht definiert sind. Daß aber auch im analytischen Fall in (3) die Zahl a' nicht durch eine größere ersetzt werden kann, hat kürzlich Herr A. Wintner[1]) gezeigt.

Andererseits gibt es spezielle Klassen von Differentialgleichungen, bei denen der Existenzbereich bzw. der Regularitätsbereich der Integrale größer ist, und bei denen auch die Konvergenz des Verfahrens der schrittweisen Näherungen für einen Bereich bewiesen werden kann, der günstiger

[1]) A. Wintner, On the exact value of the bound for the regularity of solutions of ordinary differential equations. American Journal of Mathematics 57 (1935), S. 539 — 540.

ist als der durch den eingangs erwähnten Satz gelieferte. Diese Spezialfälle, die mehr oder weniger umfassend sind, erfuhren stets eine besondere Behandlung.

Man kann aber durch eine ganz einfache Abänderung des üblichen Beweisganges[2]) einen Konvergenzsatz für das Verfahren der schrittweisen Näherungen gewinnen, der schmiegsam genug ist, um solche Spezialfälle mit zu umfassen. Dies soll im folgenden dargelegt werden.

§ 1.

Der allgemeine Satz.

Im folgenden bedeute $\mathfrak{S}$, falls die Veränderliche x reell ist, ein Intervall

$$-a_1 \leqq x \leqq a_2 \qquad (a_1 \geqq 0, \quad a_2 \geqq 0),$$

falls die Veränderliche x komplex ist, einen Sternbereich

$$|x| \leqq \varrho(\arg x).$$

Die Funktion $\varrho(\omega)$ hat die Periode 2π. Die Zahl a' und der Bereich $\mathfrak{S}$ seien so gewählt, daß alle Punkte von $\mathfrak{S}$ im Bereich $|x| \leqq a'$ liegen.

Wir können für die Zahlen a_1 und a_2 auch den Wert ∞ zulassen, und ebenso darf $\varrho(\omega)$ den Wert ∞ annehmen, wenn in diesem Fall die Gültigkeit der Gleichheitszeichen in den den Bereich $\mathfrak{S}$ festlegenden Ungleichungen so eingeschränkt wird, daß der Bereich $\mathfrak{S}$ keine unendlich fernen Punkte enthält; der Bereich $|x| \leqq a'$ ist dann durch den Bereich $|x| < \infty$ zu ersetzen, ebenso das im folgenden auftretende Intervall $0 \leqq \xi \leqq a'$ durch das Intervall $0 \leqq \xi < \infty$.

Das angekündigte Ergebnis kann jetzt so ausgesprochen werden:

Satz: *Die Funktionen* $F_\nu(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *seien in dem durch die Ungleichungen*

$$(4) \qquad 0 \leqq \xi \leqq a', \quad 0 \leqq \eta_1 \leqq \varphi_1(\xi), \ldots, \quad 0 \leqq \eta_n \leqq \varphi_n(\xi)$$

festgelegten Bereich der reellen Veränderlichen $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$ *reell, stetig, nicht negativ und bezüglich jeder der* n *Veränderlichen* η_k *monoton steigend (im weiteren Sinne). Dabei sei* $\varphi_1(\xi), \ldots, \varphi_n(\xi)$ *ein System von im Intervall* $0 \leqq \xi \leqq a'$ *stetigen Lösungen der Deriviertenungleichungen*

$$(5) \qquad D_+ \varphi_\nu(\xi) \geqq F_\nu(\xi, \varphi_1(\xi), \ldots, \varphi_n(\xi)) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

mit den Anfangswerten $\varphi_\nu(0) = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$.

---

[2]) L. Bieberbach, Theorie der Differentialgleichungen. Dritte Auflage, Berlin 1930, S. 27—31, 34—35, 51—53. E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig 1930, S. 51—56, 124—126. É. Picard, Traité d'analyse II. Deuxième édition, Paris 1905, S. 340—344, 351—353. M. Müller, Über das Fundamentaltheorem in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Math. Zeitschrift **26** (1927), S. 620—628.

Im Bereich

$$x \text{ in } \mathfrak{S},\ |y_1 - y_{10}| \leqq \varphi_1(|x|), \ldots, |y_n - y_{n0}| \leqq \varphi_n(|x|) \tag{6}$$

der reellen oder komplexen Veränderlichen $x, y_1, \ldots, y_n$ seien die Funktionen $f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ stetig; außerdem sei dort

$$|f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqq F_\nu(|x|, |y_1 - y_{10}|, \ldots, |y_n - y_{n0}|) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Unter diesen Voraussetzungen können für den Bereich $\mathfrak{S}$ die System von Näherungsfunktionen

$$\begin{cases} y_{\nu 0}(x) = y_{10} & (\nu = 1, 2, \ldots, n), \\ y_{\nu, k+1}(x) = y_{\nu 0} + \int_0^x f_\nu(t, y_{1k}(t), \ldots, y_{nk}(t))\,dt & (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, 2, \ldots) \end{cases} \tag{8}$$

berechnet werden. Sie genügen für $k = 0, 1, 2, \ldots$ den Ungleichungen

$$|y_{\nu k}(x) - y_{\nu 0}| \leqq \varphi_\nu(|x|) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{9}$$

Erfüllen die Funktionen f_ν im Bereich (6) *eine Lipschitzbedingung bezüglich der Veränderlichen $y_1, \ldots, y_n$*[3]*, so konvergieren die durch* (8) *definierten Näherungssysteme im Bereich $\mathfrak{S}$ gegen ein Integralsystem $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ des Differentialgleichungssystems*

$$y_\nu' = f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{S}$$

das die Ausgangswerte $y_\nu(0) = y_{\nu 0} (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ hat[4]*. In jedem abgeschlossenen Teil von $\mathfrak{S}$ ist die Konvergenz gleichmäßig.*

Sind die Funktionen f_ν im Bereich (6) *der komplexen Veränderlichen $x, y_1, \ldots, y_n$ regulär analytisch, so sind die Näherungsfunktionen und die Funktionen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ des Integralsystems im Inneren von $\mathfrak{S}$ regulär analytisch. Ihre Potenzreihenentwicklungen an der Stelle $x = 0$ konvergieren mindestens im Kreis*

$$|x| < \operatorname*{fin\,inf}_{0 \leqq \omega \leqq 2\pi} (\varrho(\omega)).$$

Beweis: Beim Beweis, daß die Näherungsfunktionen (8) berechnet werden können und die Ungleichungen (9) erfüllen, benutzen wir zwei einfache Hilfssätze:

1. Aus der Ungleichung $D_+ \varphi(x) \geqq G(x)$, wo $\varphi(x)$ und $G(x)$ stetige Funktionen bedeuten, folgt für $x_1 < x_2$, daß

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) \geqq \int_{x_1}^{x_2} G(x)\,dx$$[5].

---

[3]) An die Stelle der gewöhnlichen Lipschitzbedingung kann auch eine andere die Konvergenz des Verfahrens erzwingende Bedingung treten. Vgl. M. Müller a. in Anm. [2]) a. O. Die Betrachtungen des dortigen § 2 lassen sich unmittelbar auf den Fall, daß die rechten Seiten analytische Funktionen komplexer Veränderlichen sind, übertragen.

[4]) Daß hier $x_0 = 0$ gewählt wird, bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit.

[5]) Vgl. O. Perron, Math. Annalen **76** (1915), S. 474, Fußnote.

2. Ist $\psi(x)$ eine stetige reelle oder komplexe Funktion der reellen oder komplexen Veränderlichen x, Ψ eine reelle, nicht negative, stetige Funktion, $|\psi(x)| \leqq \Psi(|x|)$, so ist, wenn geradlinig von 0 nach x integriert wird,

$$\left|\int_0^x \psi(t)\,dt\right| \leqq \int_0^{|x|} \Psi(\tau)\,d\tau.$$

Diese Ungleichung ergibt sich daraus, daß

$$\int_0^x \psi(t)\,dt = \lim_{m\to\infty} \sum_{\mu=0}^{m-1} \psi\left(\frac{\mu x}{m}\right)\frac{x}{m},$$

$$\left|\sum_{\mu=0}^{m-1} \psi\left(\frac{\mu x}{m}\right)\frac{x}{m}\right| \leqq \sum_{\mu=0}^{m-1} \left|\psi\left(\frac{\mu x}{m}\right)\right|\frac{|x|}{m} \leqq \sum_{\mu=0}^{m-1} \Psi\left(\frac{\mu|x|}{m}\right)\frac{|x|}{m},$$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{\mu=0}^{m-1} \Psi\left(\frac{\mu|x|}{m}\right)\frac{|x|}{m} = \int_0^{|x|} \Psi(\tau)\,d\tau.$$

Die Gültigkeit der Ungleichungen (9) kann jetzt folgendermaßen bewiesen werden: Da $F_\nu \geqq 0$, $\varphi_\nu(0) = 0$, ist nach (5) und dem ersten Hilfssatz, falls x auf $\mathfrak{S}$ beschränkt wird,

$$\varphi_\nu(|x|) \geqq \int_0^{|x|} F_\nu(\tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_n(\tau)) \cdot d\tau \geqq 0,$$

daher für $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$|y_{\nu 0}(x) - y_{\nu 0}| = |y_{\nu 0} - y_{\nu 0}| = 0 \leqq \varphi_\nu(|x|).$$

Für $k = 0$ sind also die Ungleichungen (9) erfüllt. Gelten sie aber für irgendeine Nummer k, so ist nach (7) und infolge der Monotonieeigenschaft der Funktionen F_ν

$$\begin{aligned}|f_\nu(t, y_{1k}(t), \ldots, y_{nk}(t))| &\leqq F_\nu(|t|, |y_{1k}(t) - y_{10}|, \ldots, |y_{nk}(t) - y_{n0}|),\\ &\leqq F_\nu(|t|, \varphi_1(|t|), \ldots, \varphi_n(|t|)),\end{aligned}$$

also nach (8) und dem zweiten Hilfssatz

$$\begin{aligned}|y_{\nu,k+1}(x) - y_{\nu 0}| &= \left|\int_0^x f_\nu(t, y_{1k}(t), \ldots, y_{nk}(t))\,dt\right|\\ &\leqq \int_0^{|x|} F_\nu(\tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_n(\tau))\,d\tau;\end{aligned}$$

das letzte Integral ist nach (5) und dem ersten Hilfssatz, weil $\varphi_\nu(0) = 0$ ist, nicht größer als $\varphi_\nu(|x|)$; also ist

$$|y_{\nu,k+1}(x) - y_{\nu 0}| \leqq \varphi_\nu(|x|) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

falls die entsprechenden Ungleichungen für die Nummer k bereits gelten.

Da es für $k = 0$ erfüllt war, gilt mithin das Ungleichungssystem (9) für alle Nummern k.

Damit steht nun fest, daß alle Näherungssysteme in dem Bereich bleiben, in welchem die Funktionen f_ν stetig sind; sie können also fortlaufend berechnet werden.

Der Beweis, daß diese Näherungssysteme in jedem abgeschlossenen Teil von $\mathfrak{S}$ gleichmäßig gegen ein Integralsystem konvergieren, und der Nachweis, daß dieses Integralsystem aus im Innern von $\mathfrak{S}$ regulären Funktionen besteht, falls die Funktionen f_ν regulär analytisch sind, verläuft nunmehr in der üblichen Weise[6]).

Zusatz: Wir wollen noch an einem Beispiel zeigen, daß bei den Funktionen F_ν die Monotonievoraussetzung nicht wegbleiben darf: Wird $y_0 = 0$ gewählt, so erfüllen die Funktionen

$$f(x, y) = e^{-|y|}, \quad F(\xi, \eta) = e^{-\eta}$$

alle Voraussetzungen des Satzes mit der einzigen Ausnahme, daß F nicht bezüglich η monoton steigt. Die Deriviertenungleichung

$$D_+ \varphi(\xi) \geqq F(\xi, \varphi(\xi))$$

hat die Lösung $\varphi(\xi) = \log(1 + \xi)$. Ferner ist $y_0(x) = 0$, $y_1(x) = x$, also für $x > 0$

$$|y_1(x) - y_0| = |x| > \lg(1 + |x|) = \varphi(|x|),$$

d. h. die Ungleichung (9) nicht erfüllt.

§ 2.

Spezialfälle.

Von der Art, wie man zu gegebenem Funktionensystem $f_1, \ldots, f_n$ die Funktionen F_ν wählen und hernach die Bedingungen (5) erfüllen kann, hängt die Größe des Bereiches ab, für welchen man die Konvergenz des Verfahrens der schrittweisen Näherungen sichern kann. Man wird, wie die folgenden Beispiele erkennen lassen, danach streben müssen, die Funktionen F_ν und die Funktionen $\varphi_\nu(\xi)$ möglichst klein zu halten. Wir wollen einige Spezialfälle besprechen.

I. Die Funktionen f_ν seien im Bereich

$$|x| \leqq a, \; |y_1 - y_{10}| \leqq b, \ldots, |y_n - y_{n0}| \leqq b \tag{10}$$

stetig, und es sei dort

$$|f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqq M \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

[6]) Vgl. die in Fußnote [2]) angeführte Literatur.

In diesem Fall kann man $F_1 = \ldots = F_n = M$ setzen und als günstigste Lösung von (5) die Funktionen

$$\varphi_\nu(\xi) = M \cdot \xi \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

wählen. Die Funktionen f_ν sind dann im Bereich

$$|x| \leqq a', |y_1 - y_{10}| \leqq M|x|, \ldots, |y_n - y_{n0}| \leqq M|x|$$

stetig, wenn $a' \leqq a$, $M|x| \leqq M \cdot a' \leqq b$, d. h. wenn

$$a' = \operatorname{Min}\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Genügen die Funktionen f_ν im Bereich (10) einer Lipschitzbedingung oder einer anderen konvergenzerzwingenden Bedingung[7]), so führt also nach dem Satz des § 1 das Verfahren der schrittweisen Näherungen im Bereich $|x| \leqq \operatorname{Min}\left(a, \frac{b}{M}\right)$ zum Ziel[8]).

Gelten die auf die Funktionen f_ν bezüglichen Voraussetzungen allgemeiner für einen Bereich

$$x \text{ in } \mathfrak{S}, \quad |y_1 - y_{10}| \leqq b, \ldots, |y_n - y_{n0}| \leqq b,$$

so sind die Funktionen f_ν in dem Bereich

$$x \text{ in } \mathfrak{S}', \quad |y_1 - y_{10}| \leqq b, \ldots, |y_n - y_{n0}| \leqq b$$

stetig, wenn der Bereich $\mathfrak{S}'$ im Bereich $\mathfrak{S}$ enthalten und in $\mathfrak{S}'$ außerdem $M|x| \leqq b$ ist. $\mathfrak{S}'$ ist also, wenn x reell ist, das Intervall

$$-\operatorname{Min}\left(a_1, \frac{b}{M}\right) \leqq x \leqq \operatorname{Min}\left(a_2, \frac{b}{M}\right),$$

falls x komplex ist, der Durchschnitt des Bereiches $\mathfrak{S}$ mit der Kreisscheibe $|x| \leqq \frac{b}{M}$. Die Konvergenz des Verfahrens der schrittweisen Näherungen läßt sich dann allgemeiner für diesen Bereich $\mathfrak{S}'$ beweisen.

II. Erfüllen die Funktionen f_ν im Bereich (10) eine Lipschitzbedingung, so ist insbesondere

$$|f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) - f_\nu(x, y_{10}, \ldots, y_{n0})| \leqq \sum_{\varrho=1}^{n} k_\varrho |y_\varrho - y_{\varrho 0}| \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

also, wenn für $|x| \leqq a$

$$|f_\nu(x, y_{10}, \ldots, y_{n0})| \leqq M_0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ist, im Bereich (10)

$$|f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqq M_0 + \sum_{\varrho=1}^{n} k_\varrho |y_\varrho - y_{\varrho 0}| \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

---

[7]) Vgl. M. Müller a. in [2]) a. O.

[8]) Diesen Konvergenzbereich haben im Anschluß an die grundlegende Arbeit des Herrn É. Picard zuerst die Herren I. Bendixson und E. Lindelöf gewonnen. Vgl. Encyclopädie der math. Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen, Bd. II, 1. Teil, 1. Hälfte, S. 198—200.

Jetzt kann

$$F_1 = \ldots = F_n = M_0 + \sum_{\varrho=1}^{n} k_\varrho \cdot \eta_\varrho$$

gesetzt und jedes φ_ν gleich der für $\xi = 0$ verschwindenden Lösung der Differentialgleichung

$$\varphi' = M_0 + \varphi(k_1 + k_2 + \ldots + k_n),$$

d. h.

$$\varphi_1(\xi) = \ldots = \varphi_n(\xi) = \varphi(\xi) = \frac{M_0}{k_1 + \ldots + k_n}\left[e^{(k_1 + \ldots + k_n)\xi} - 1\right]$$

gewählt werden. Es ergibt sich dann die Konvergenz des Verfahrens der schrittweisen Näherungen in dem zuerst von Herrn E. Lindelöf[9]) angegebenen Bereich

$$|x| \leqq \operatorname{Min}\left(a, \frac{1}{k_1 + \ldots + k_n} \log\left[1 + \frac{b(k_1 + \ldots + k_n)}{M_0}\right]\right).$$

Hier gilt eine ähnliche Verallgemeinerung wie bei I; der Bereich $\mathfrak{S}'$ wird der Durchschnitt der Bereiche $\mathfrak{S}$ und

$$|x| \leqq \frac{1}{k_1 + \ldots + k_n} \log\left[1 + \frac{b(k_1 + \ldots + k_n)}{M_0}\right].$$

III. Die beiden Spezialfälle I und II lassen sich einem allgemeineren Fall unterordnen: Die Funktionen f_ν mögen im Bereich (10) die Ungleichungen (7) erfüllen, die Funktionen F_ν im Bereich

$$0 \leqq \xi \leqq a, \quad 0 \leqq \eta_1 \leqq b, \ldots, \quad 0 \leqq \eta_n \leqq b \tag{11}$$

stetig und nicht negativ sein, sowie bezüglich jeder der n Veränderlichen η_k monoton steigen. Dann hat das Differentialgleichungssystem

$$\eta_\nu' = F_\nu(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{12}$$

eine minimale, durch den Nullpunkt laufende Integralkurve

$$\eta_1 = \varphi_1(\xi), \ldots, \eta_n = \varphi_n(\xi), \tag{13}$$

die bis an den Rand des Bereiches (11) fortgesetzt werden kann[10]). Es sei a' die größte Zahl derart, daß im Intervall $0 \leqq \xi \leqq a'$ die Integralkurve (13) im Bereich (11) bleibt. Dann können die Näherungssysteme (8)

---

[9]) E. Lindelöf, Sur l'application de la méthode des approximations successives aux équations différentielles du premier ordre. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences, Paris, **118** (1894), S. 454—457; Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude des intégrales réelles des équations différentielles ordinaires. Journal de mathématiques pures et appliquées (4) **10** (1894), S. 117—128. Vgl. É. Picard a. i. Anm. [2]) a. O., S. 344—345.

[10]) E. Kamke, Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen, II. Acta mathematica **58** (1932), S. 57—85, bes. S. 76—80. Ohne Beweis auch in der Arbeit: Über die Integralkurven von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **41** (1932), S. 158—164, bes. S. 161 f.

im Bereich $|x| \leqq a'$ berechnet werden, und das Verfahren der schrittweisen Näherungen konvergiert in diesem Bereich, sobald die Funktionen f_ν im Bereich (10) eine konvergenzerzwingende Bedingung erfüllen.

Sind insbesondere die Funktionen f_ν im Bereich (10) regulär analytisch, so genügen sie dort einer Lipschitzbedingung mit konstantem Koeffizienten

$$|f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) - f_\nu(x, y_1', \ldots, y_n')| \leqq K \sum_{\varrho=1}^{n} |y_\varrho - y_\varrho'| \quad (\nu = 1, \ldots, n);$$

dann konvergiert das Verfahren der schrittweisen Näherungen im Bereich $|x| \leqq a'$ gleichmäßig, liefert also ein im Innern dieses Bereiches regulär analytisches Integralsystem $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ des Differentialgleichungssystems (S)[11]).

Ersetzt man in den Voraussetzungen wie im Spezialfall I den Bereich $|x| \leqq a$ durch den Bereich $\mathfrak{S}$, so gelten die Ergebnisse für einen Bereich $\mathfrak{S}'$, der Durchschnitt der Bereiche $\mathfrak{S}$ und $|x| \leqq a'$ ist.

IV. In dem Ergebnis des letzten Absatzes sind wiederum, was den Regularitätsbereich des Lösungssystemes angeht, Ergebnisse enthalten, die sonst mittels der Majorantenmethode gewonnen werden; wir geben einige Proben.

1. Sind die Funktionen f_ν im Bereich (10), wobei der Einfachheit halber $y_{10} = \ldots = y_{n0} = 0$ gewählt werde, regulär analytisch und durch die absolut konvergenten Potenzreihen

$$f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) = \sum a^{(\nu)}_{l_0 l_1 \ldots l_n} x^{l_0} y_1^{l_1} \ldots y_n^{l_n} \tag{14}$$

darstellbar, so kann man

$$\max_{\nu=1,\ldots,n} |a^{(\nu)}_{l_0 l_1 \ldots l_n}| = A_{l_0 l_1 \ldots l_n},$$

$$F_1 = \ldots = F_n = F(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n) = \sum A_{l_0 l_1 \ldots l_n} \xi^{l_0} \eta_1^{l_1} \ldots \eta_n^{l_n}$$

setzen. Die Funktionen F_ν sind dann im Innern des Bereiches (10) regulär analytisch; das System (12) wird symmetrisch in $\eta_1, \ldots, \eta_n$; seine Lösung ist

$$\varphi_1(\xi) = \ldots = \varphi_n(\xi) = \varphi(\xi),$$

wobei $\varphi(\xi)$ diejenige Lösung der einzigen Differentialgleichung

$$\eta' = F(\xi, \eta, \ldots, \eta) = G(\xi, \eta)$$

---

[11]) Vgl. hierzu H. Nakano, Über den Konvergenzradius der Lösung einer Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Proceedings of the Imperial Academy of Japan 8 (1932), S. 29—31; Über den Konvergenzradius der Lösungen eines Differentialgleichungssystemes, ebenda, S. 113—115. Was den Regularitätsbereich der Lösungen anbetrifft, sind die Ergebnisse des Herrn Nakano allgemeiner, weil bei ihm die Funktionen F_ν schwächeren Bedingungen unterworfen sind als hier, andererseits wird der Konvergenzbereich des Verfahrens der schrittweisen Näherungen nicht untersucht.

ist, die für $\xi = 0$ verschwindet. Bleibt dieselbe nur $0 \leqq \xi \leqq a'$ im Rechteck $0 \leqq \xi \leqq a$, $0 \leqq \eta \leqq b$, so ist das Integralsystem $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ im Bereich $|x| < a'$ regulär analytisch[12]) und dort als Grenzsystem der Näherungssysteme (8) erhältlich, wenn man $y_{10} = \ldots = y_{n0} = 0$ setzt.

2. Da die Potenzreihen (14) noch für $x = a$, $y_1 = \ldots = y_n = b$ absolut konvergieren, gibt es eine Konstante S derart, daß

$$|a^{(\nu)}_{l_0 l_1 \ldots l_n}| a^{l_0} b^{l_1 + \ldots + l_n} \leqq S,$$

also für $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned} |f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)| &\leqq S \sum \left|\frac{x}{a}\right|^{l_0} \left|\frac{y_1}{b}\right|^{l_1} \ldots \left|\frac{y_n}{b}\right|^{l_n} \\ &= \frac{S}{\left(1 - \frac{|x|}{a}\right)\left(1 - \frac{|y_1|}{b}\right) \ldots \left(1 - \frac{|y_n|}{b}\right)} \\ &= F(|x|, |y_1|, \ldots, |y_n|). \end{aligned} \tag{15}$$

Die Funktionen $F_1 = \ldots = F_n = F$ erfüllen die Bedingungen des Satzes von § 1 im Innern des Bereiches (10); das System (12) hat die Lösung

$$\varphi_1(\xi) = \ldots = \varphi_n(\xi) = b - b\sqrt[n+1]{1 + \frac{(n+1)\,a\,S}{b} \log\left(1 - \frac{\xi}{a}\right)},$$

die für

$$|\xi| < a\left(1 - e^{-\frac{b}{(n+1)\,a\,S}}\right)$$

regulär ist und zwischen 0 und b liegt. Also konvergiert das Verfahren der schrittweisen Näherungen im Bereich

$$|x| < a\left(1 - e^{-\frac{b}{(n+1)\,a\,S}}\right)$$

und liefert dort ein regulär analytisches Integralsystem.

3. Entsprechend ergibt sich, wenn man statt der in (15) eingeführten Majorante von Cauchy die Stäckelsche Majorante[13])

$$\begin{aligned} F(|x|, |y_1|, \ldots, |y_n|) &= S \sum (l_0 + 1) \left|\frac{x}{a}\right|^{l_0} \left|\frac{y_1}{b}\right|^{l_1} \ldots \left|\frac{y_n}{b}\right|^{l_n} \\ &= \frac{S}{\left(1 - \frac{|x|}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{|y_1|}{b}\right) \ldots \left(1 - \frac{|y_n|}{b}\right)} \end{aligned}$$

---

[12]) L. Fejér, Sur le calcul des limites. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des scienees, Paris, **143** (1906), S. 957—959.

[13]) P. Stäckel, Über Potenzreihen von mehreren Veränderlichen. Jahresber. d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung **15** (1906), S. 576—585 und **16** (1907), S. 219—223. Davon, daß bei reellen Veränderlichen und Funktionen der Konvergenzbeweis mittels der Stäckelschen Majorante ganz im Reellen geführt werden kann, sehen wir hier ab.

benutzt, daß die Näherungsfunktionen (8) (mit $y_{10} = \ldots = y_{n0} = 0$) gegen ein reguläres Integralsystem mindestens im Bereich

$$|x| < \frac{ab}{b + (n+1)aS}$$

konvergieren.

4. Wählt man die Konstante A so, daß für $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$\sum |a^{(\nu)}_{l_0 l_1 \ldots l_n}| a^{l_0} b^{l_1 + \ldots + l_n} \leqq A,$$

so kann man auch $F_1 = \ldots = F_n = A$ und $\varphi_\nu(\xi) = A \cdot \xi$ setzen; der Satz des § 1 sichert dann die Konvergenz des Verfahrens der schrittweisen Näherungen im Bereich

$$|x| \leqq \operatorname{Min}\left(a, \frac{b}{A}\right)$$

und die Existenz eines regulären Integralsystems im Innern dieses Bereiches[14]). Da stets angenommen werden kann, daß $M \leqq A$, ist dieses Ergebnis auch im Spezialfall I enthalten.

§ 3.

Weitere Spezialfälle. Lineare und Riccatische Systeme.

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$(16) \quad y'_\nu = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} p_{\nu ik}(x)\, y_i y_k + \sum_{k=1}^{n} q_{\nu k}(x)\, y_k + r_\nu(x) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Funktionen $p_{\nu ik}(x)$, $q_{\nu k}(x)$ und $r_\nu(x)$ seien im Bereich $\mathfrak{S}$ stetig. Sind alle Koeffizienten $p_{\nu ik}(x)$ im Bereich $\mathfrak{S}$ gleich Null, so heißt das System (16) in dem Bereich linear; ist wenigstens einer dieser Koeffizienten im angegebenem Bereich nicht ständig gleich Null, so wird (16) in diesem Bereich als Riccatisches System bezeichnet.

Schreibt man das System (16) in der Form

$$y'_\nu = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} P_{\nu ik}(x)\,(y_i - y_{i0})\,(y_k - y_{k0}) + \sum_{k=1}^{n} Q_{\nu k}(x)\,(y_k - y_{k0}) + R_\nu(x)$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei

$$(17) \quad \begin{cases} P_{\nu ik}(x) = p_{\nu ik}(x), \\ Q_{\nu k}(x) = q_{\nu k}(x) + \sum_{i=1}^{n} \left(p_{\nu ik}(x) + p_{\nu ki}(x)\right) \cdot y_{i0}, \\ R_\nu(x) = r_\nu(x) + \sum_{k=1}^{n} y_{k0} \cdot Q_{\nu k}(x) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} p_{\nu ik}(x) \cdot y_{i0} y_{k0}, \end{cases}$$

und ist in $\mathfrak{S}$

$$(18) \quad |P_{\nu ik}(x)| \leqq P_*, \qquad |Q_{\nu k}(x)| \leqq Q_*, \qquad |R_\nu(x)| \leqq R_*,$$

[14]) Dieses Ergebnis stammt für $n = 1$ von Herrn Lindelöf, für $n > 1$ von Herrn Kamke. Vgl. E. Kamke a. in Anm. [2]) a. O., S. 66—72, 131—135.

so erkennt man, daß der absolute Betrag der rechten Seiten von (16) nicht größer ist als

$$F_\nu(|x|, |y_1 - y_{10}|, \ldots, |y_n - y_{n0}|)$$
$$= P_* \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |y_i - y_{i0}| \, |y_k - y_{k0}| + Q_* \sum_{k=1}^{n} |y_k - y_{k0}| + R_*.$$

Diese Funktionen $F_\nu(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ erfüllen die Voraussetzungen unseres Satzes. Da sie in $\eta_1, \ldots, \eta_n$ symmetrisch sind, ist

$$\varphi_1(\xi) = \varphi_2(\xi) = \ldots = \varphi_n(\xi) = \varphi(\xi),$$

wobei $\varphi(\xi)$ die für $\xi = 0$ verschwindende Lösung der Differentialgleichung

(19) $$\eta' = n^2 P_* \eta^2 + n Q_* \eta + R_*$$

bedeutet, ein Lösungssystem von (5).

Wir behandeln weiterhin den linearen und Riccatischen Fall getrennt.

V. Bei einem linearen System

(20) $$y_\nu' = \sum_{k=1}^{n} q_{\nu k}(x) \, y_k + r_\nu(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ist $P_* = 0$, also

$$\varphi_\nu(\xi) = \frac{R_*}{n Q_*} (e^{n Q_* \xi} - 1) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

In dem mittels dieser Funktionen abgegrenzten Bereich (6) bleiben alle Näherungssysteme. Da die rechten Seiten des Systems (20) für jeden abgeschlossenen Teil von $\mathfrak{S}$ eine Lipschitzbedingung erfüllen, konvergiert das Verfahren der schrittweisen Näherungen im ganzen Bereich $\mathfrak{S}$.

Sind die Funktionen $q_{\nu k}(x)$ und $r_\nu(x)$ nur im Innern des Bereiches $\mathfrak{S}$ stetig, so konvergiert das Verfahren auch im Innern von $\mathfrak{S}$, und zwar in jedem abgeschlossenen Teilbereich gleichmäßig. Insbesondere ergibt sich: Wenn die Funktionen $q_{\nu k}(x)$ und $r_\nu(x)$ im Innern von $\mathfrak{S}$ regulär sind, so gilt dasselbe von dem Integralsystem $y_1(x), \ldots, y_n(x)$[15]).

Die Anwendung des in der Einleitung erwähnten Konvergenzsatzes würde ein schlechteres Ergebnis liefern: Da die rechten Seiten des Systems (20) bei beliebigem b im Bereich (10) stetig und dort ihre absoluten Beträge nicht größer als $n Q_* b + R_*$ sind, sichert dieser Satz die Existenz eines Integralsystems für den Bereich

$$|x| \leqq \operatorname{Min}\left(a, \operatorname*{finsup}_{b>0} \frac{b}{n Q_* b + R_*}\right) = \operatorname{Min}\left(a, \frac{1}{n Q_*}\right),$$

der vielfach kleiner sein wird als der Bereich $|x| \leqq a$. Dagegen liefert der in § 2, II hergeleitete Konvergenzsatz von Lindelöf, wie man leicht bestätigt, ebenfalls die Konvergenz des Verfahrens der schrittweisen Näherungen für $|x| < a$[16]).

---

[15]) L. Fejér, a. in Anm. [12]) a. O., S. 959.

[16]) Vgl. O. Perron, Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängige Variable reell ist. Erste Mitteilung. Journal für die reine und angewandte Mathematik **142** (1913), S. 254—270, bes. S. 255.

VI. Im Riccatischen Fall ist $P_* > 0$. Bei der Integration der Gleichung (19) sind verschiedene Fälle zu unterscheiden; wir stellen gleich die Ergebnisse der einfachen Rechnung zusammen:

1 a) Ist $Q_*^2 - 4 P_* R_* > 0$, $R_* = 0$, so ist $\varphi(\xi) = 0$.

1 b) Ist $Q_*^2 - 4 P_* R_* > 0$, $R_* > 0$, so ist, wenn $Q_*^2 - 4 P_* R_* = D$ gesetzt wird,

$$\varphi(\xi) = \frac{-Q_* - \sqrt{D}}{2 n P_*} + \frac{\sqrt{D}\,(-Q_* - \sqrt{D})}{n P_* [-Q_* - \sqrt{D} - (-Q_* + \sqrt{D})\, e^{n\sqrt{D}\,\xi}]}.$$

2 a) Ist $Q_*^2 - 4 P_* R_* = 0$, $Q_* = 0$, so ist $\varphi(\xi) = 0$.

2 b) Ist $Q_*^2 - 4 P_* R_* = 0$, $Q_* > 0$, so ist

$$\varphi(\xi) = \frac{Q_* \xi}{2 n P_* \left[\frac{2}{n Q_*} - \xi\right]}.$$

3 a) Ist $Q_*^2 - 4 P_* R_* < 0$, $Q_* = 0$, so ist

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{R_*}{P_*}} \operatorname{tang} (n \sqrt{P_* R_*}\, \xi).$$

3 b) Ist $Q_*^2 - 4 P_* R_* < 0$, $Q_* > 0$, so ist, wenn D die in 1 b) angegebene Bedeutung hat,

$$\varphi(\xi) = \frac{2 R_* \sin\left(\frac{n}{2}\sqrt{-D}\,\xi\right)}{n\sqrt{-D}\cos\left(\frac{n}{2}\sqrt{-D}\,\xi\right) - n Q_* \sin\left(\frac{n}{2}\sqrt{-D}\,\xi\right)}.$$

In jedem Bereich, der im Bereich $\mathfrak{S}$ enthalten ist, und in welchem die Funktion $\varphi(|x|)$ beschränkt bleibt, konvergiert das Verfahren der schrittweisen Näherungen gleichmäßig. Der Bereich, für den so die Existenz eines Integralsystems $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ des Riccatischen Systems (16) gesichert wird, das die Ausgangswerte $y_1(0) = y_{10}, \ldots, y_n(0) = y_{n0}$ hat, ist in den sechs aufgeführten Fällen bzw. der Durchschnitt des Bereiches $\mathfrak{S}$ mit folgenden Intervallen, bzw. Kreisscheiben:

(21)
$$\begin{cases} \text{1 a)} & |x| < \infty, \\ \text{1 b)} & |x| < \dfrac{1}{n\sqrt{Q_*^2 - 4 P_* R_*}} \log \dfrac{Q_* + \sqrt{Q_*^2 - 4 P_* R_*}}{Q_* - \sqrt{Q_*^2 - 4 P_* R_*}}, \\ \text{2 a)} & |x| < \infty, \\ \text{2 b)} & |x| < \dfrac{2}{n Q_*}, \\ \text{3 a)} & |x| < \dfrac{\pi}{2 n \sqrt{P_* R_*}}, \\ \text{3 b)} & |x| < \dfrac{2}{n\sqrt{4 P_* R_* - Q_*^2}} \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{4 P_* R_* - Q_*^2}}{Q_*}; \end{cases}$$

dabei sind die Zahlen P_*, Q_*, R_* durch (17) und (18) festgelegt. Für ein System der Form (16), bei welchem

$$P_{\nu ik}(x) = P_*, \quad Q_{\nu k}(x) = Q_*, \quad R_\nu(x) = R_*,$$

sind die hier angegebenen Bereiche auch die genauen Konvergenz- und Existenzbereiche; das Ergebnis läßt sich also nicht allgemein verschärfen.

Sind die Funktionen $p_{\nu ik}(x)$, $q_{\nu k}(x)$, $r_\nu(x)$ in $\mathfrak{S}$ regulär analytisch, so sind die Funktionen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ im Durchschnitt des Bereiches $\mathfrak{S}$ mit den Kreisscheiben (21) regulär analytisch.

Für den Spezialfall der Riccatischen Differentialgleichung

$$y' = y^2 + r(x),$$

in welcher $r(x)$ für $|x| < a$ regulär und seinem absoluten Betrage nach nicht größer als R_* ist, wurde der in (21) unter 3 a) angegebene Konvergenzbereich auf anderem Wege bereits von Herrn Dieudonné [17]) gewonnen.

---

[17]) J. Dieudonné, Sur les points singuliers des intégrales de certaines équations différentielles. Bulletin des sciences mathématiques (2) **55** (1931), S. 99—104.

(Eingegangen am 2. November 1935.)

Das Dualitätstheorem für Homotopieketten-ringe.

Von

Kurt Reidemeister in Marburg.

In der Theorie der Homologieketten-ringe hat sich ein verallgemeinerter Unterteilungsprozeß [1]) als fruchtbar erwiesen, bei welchem eine Zelle durch einen zellähnlichen Komplex — d. h. einen Komplex mit den Homologieeigenschaften einer Zelle — ersetzt wird (§ 2). Dieser Gedanke läßt sich auch für die Theorie Homotopieketten-ringe verwerten. Es ist dazu nur nötig, die Homologieeigenschaften der zellähnlichen Komplexe etwas genauer zu formulieren, als es für die Untersuchung der Homologiegruppen nötig ist (§ 1) und die induzierten Abänderungen der universellen Überlagerung ins Auge zu fassen (§ 3 und § 4). Durch Verwendung geeigneter Unterteilungen (§ 4) ergibt sich insbesondere das Dualitätstheorem für den Homotopieketten-ring [2]) einer Mannigfaltigkeit [3]).

§ 1.

Es sei ein q-dimensionaler Komplex $\mathfrak{Z}^q$ mit einem $(q-1)$-dimensionalen Unterkomplex $\mathfrak{S}^{q-1}$ vorgelegt. $\mathfrak{S}^{q-1}$ sei abgeschlossen, d. h. mit jeder Zelle enthalte $\mathfrak{S}^{q-1}$ alle diejenigen Zellen geringerer Dimension, welche mit ihr inzidieren. Die Restmenge $\mathfrak{Z}^q - \mathfrak{S}^{q-1}$ ist alsdann offen, d. h. mit jeder Zelle kommen in $\mathfrak{Z}^q - \mathfrak{S}^{q-1}$ alle diejenigen Zellen höherer Dimension vor, welche mit ihr inzidieren.

Es gebe eine q-dimensionale Kette $\mathfrak{k}^q$, welche alle q-dimensionalen Zellen von $\mathfrak{Z}^q$ einfach überdeckt und deren Randkette

$$R(\mathfrak{k}^q) = \mathfrak{g}_s^{q-1}$$

die $(q-1)$-dimensionalen Zellen von $\mathfrak{S}^{q-1}$ einfach überdeckt. Die q-dimensionalen Zellen $\mathfrak{z}_i^q$ $(i = 1, 2, \ldots a_{zq})$ und die $(q-1)$-dimensionalen Zellen $\mathfrak{z}_{sj}^{q-1}$ $(j = 1, 2, \ldots, a_{sq-1})$ von $\mathfrak{S}^{q-1}$ seien so orientiert, daß

---

[1]) Vgl. de Rham, Thèses, Paris (1931) und Tucker, An abstract approach to manifolds, Annals of Math. Serie 2, **34** (1933), S. 191.

[2]) Reidemeister, Überdeckungen von Komplexen, Crelles Journal **173** (1935), S. 164.

[3]) Gemeint sind die Komplexe, welche de Rham (a. a. O.) „regulär" nennt. Vgl. ferner Vietoris, Über die Symmetrie der Zusammenhangszahlen kombinatorischer Mannigfaltigkeiten, Wiener Monh. **35** (1928), S. 165, und van Kampen, Die kombinatorische Topologie und die Dualitätssätze, den Haag (1929).

$$\mathfrak{k}^q = \Sigma\, \mathfrak{z}_i^q, \qquad \mathfrak{g}_s^{q-1} = \Sigma\, \mathfrak{z}_{sj}^{q-1}$$

ist. Im übrigen habe $\mathfrak{Z}^q$ die Homologieeigenschaften eines q-dimensionalen Simplex bzw. einer q-dimensionalen Zelle, und $\mathfrak{S}^{q-1}$ die Homologieeigenschaften des Randes eines q-dimensionalen Simplex bzw. einer $(q-1)$-dimensionalen Sphäre.

Ein Komplex $\mathfrak{Z}^q$ mit den geforderten Eigenschaften heiße *zellähnlich*. $\mathfrak{S}^{q-1}$ heiße der Rand von $\mathfrak{Z}^q$.

Wir wollen uns nun eine Basis der Ketten von $\mathfrak{Z}^q$ verschaffen, in welcher eine Basis der Ketten von $\mathfrak{S}^{q-1}$ als Teilmenge enthalten ist.

Zunächst betrachten wir die geschlossenen Ketten $\mathfrak{g}^k$ der Dimension k von $\mathfrak{Z}^q$; sie bilden eine freie Abelsche Gruppe, deren Erzeugendenanzahl z^k sei. Die geschlossenen Ketten $\mathfrak{g}_s^k$ von $\mathfrak{S}^{q-1}$ bilden eine Untergruppe derselben, also eine freie Abelsche Gruppe mit der Erzeugendenanzahl $z_{sk} \leqq z_k$. Es gibt alsdann eine Basis

$$\mathfrak{g}_{si}^k \qquad (i = 1, 2, \ldots, z_{sk})$$

der geschlossenen Ketten von $\mathfrak{S}^{q-1}$, welche sich durch die Ketten

$$\mathfrak{g}_{zj}^k \qquad (j = 1, 2, \ldots, z_k - z_{sk})$$

zu einer Basis der geschlossenen Ketten von $\mathfrak{Z}^q$ ergänzen läßt. Zum Beweis sei

(1) $$\mathfrak{g}_i^k \qquad (i = 1, 2, \ldots, z_k)$$

eine Basis der geschlossenen Ketten von $\mathfrak{Z}^q$, und $\mathfrak{g}_i^k$ für $i = 1, 2, \ldots, r$ gehöre bereits $\mathfrak{S}^{q-1}$ an. Entweder läßt sich alsdann aus den übrigen Ketten $\mathfrak{g}_i^k (i > r)$ keine Kette aus $\mathfrak{S}^{q-1}$ mehr linear kombinieren. Dann bilden die $\mathfrak{g}_i^k (i = 1, 2, \ldots, r)$ eine Basis für die geschlossenen Ketten aus $\mathfrak{S}^{q-1}$; denn wenn

(2) $$\Sigma\, n_i \mathfrak{g}_i^k$$

zu $\mathfrak{S}^{q-1}$ gehört, so gilt dies auch von

$$\sum_{i>r} n_i \mathfrak{g}_i^k,$$

d. h. eine Kette (2) gehört nur dann zu $\mathfrak{S}^{q-1}$, wenn die n_i für $i > r$ gleich Null sind. Also ist $r = z_{sk}$ und die Basis (1) hat die geforderte Eigenschaft.

Oder aber es läßt sich aus den $\mathfrak{g}_i^k$ $(i > r)$ noch eine Kette

$$\sum_{i>r} m_i \mathfrak{g}_i^k$$

aus $\mathfrak{S}^{q-1}$ kombinieren; ist dann m der größte gemeinschaftliche Teiler der m_i und $m_i = m\, \overline{m}_i$, so ist auch

$$\overline{\mathfrak{g}}_s^k = \sum_{i>r} \overline{m}_i \mathfrak{g}_i^k$$

eine Kette aus $\mathfrak{S}^{q-1}$, und wir können die $\mathfrak{g}_i^k$ $(i > r)$ durch unimodulare Transformation zu $\bar{\mathfrak{g}}_i^k$ $(i > r)$ abändern mit

$$\bar{\mathfrak{g}}_{r+1}^k = \bar{\mathfrak{g}}_s^k.$$

Alsdann bilden die

$$\mathfrak{g}_i^k \quad (i = 1, 2, \ldots, r), \qquad \bar{\mathfrak{g}}_s^k, \quad \mathfrak{g}_j^k \qquad (j = 1, 2, \ldots, z_k - r - 1)$$

eine Basis, in welcher die Anzahl der Ketten aus $\mathfrak{S}^{q-1}$ um 1 zugenommen hat. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens folgt die Richtigkeit unserer Behauptung.

Wegen den geforderten Homologieeigenschaften sind alle geschlossenen Ketten aus $\mathfrak{S}^{q-1}$ homolog zu Null in $\mathfrak{S}^{q-1}$, es gibt also zu jedem $\mathfrak{g}_{si}^k (k < q-1)$ eine Kette $\mathfrak{b}_{si}^{k+1}$ aus $\mathfrak{S}^{q-1}$ mit

$$R(\mathfrak{b}_{si}^{k+1}) = \mathfrak{g}_{si}^k \qquad (i = 1, 2, \ldots, z_{sk}).$$

Ebenso gibt es in $\mathfrak{Z}^q$ zu jedem $\mathfrak{g}_{zj}^k$ $(k < q)$ eine Kette $\mathfrak{b}_{zj}^{k+1}$ mit

$$R(\mathfrak{b}_{zj}^{k+1}) = \mathfrak{g}_{zj}^k \qquad (j = 1, 2, \ldots z_k - z_{sk}).$$

z_{sq-s} ist gleich 1, und zwar kann $\mathfrak{g}_s^{q-1}$ als Basiselement $\mathfrak{g}_{s1}^{q-1}$ genommen werden. $\mathfrak{z}_s^0$ bedeute einen Punkt aus $\mathfrak{S}^{q-1}$. Wir behaupten alsdann:

Die Ketten

$$(3)\quad \begin{array}{l} \mathfrak{k}_z^q, \ \mathfrak{b}_{zj}^q \qquad (j = 1, 2, \ldots, z_{q-1} - 1), \\ \mathfrak{g}_{si}^k, \ \mathfrak{g}_{zj}^k, \ \mathfrak{b}_{sl}^k, \ \mathfrak{b}_{zm}^k \qquad (i = 1, 2, \ldots, z_{sk};\ j = 1, 2, \ldots, z_k - z_{sk};\\ l = 1, 2, \ldots, z_{sk-1};\ m = 1, 2, \ldots, z_{k-1} - z_{sk-1};\ k = 1, \ldots, q-1) \\ \mathfrak{g}_{si}^0, \ \mathfrak{g}_{zj}^0, \ \mathfrak{z}_s^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, z_0;\ j = 1, 2, \ldots, z_0 - z_{s0}) \end{array}$$

sind eine Kettenbasis von $\mathfrak{Z}^q$; die Ketten mit dem Index s bilden eine Basis der Ketten von $\mathfrak{S}^{q-1}$.

Wir führen den Beweis für die Ketten

$$(4)\qquad \mathfrak{g}_{si}^k, \ \mathfrak{b}_{sl}^k \qquad (k > 0)$$

durch; in den übrigen Fällen verläuft er analog. Angenommen, es gibt eine Kette $\mathfrak{x}_s^k$ aus $\mathfrak{S}^{q-1}$, die sich nicht aus (4) linear kombinieren ließe. Dann ist $\mathfrak{x}_s^k$ gewiß nicht geschlossen, weil die $\mathfrak{g}_{si}^k$ ja eine Basis der geschlossenen Ketten bilden. Dann ist aber $R(\mathfrak{x}_s^k)$ eine $(k-1)$-dimensionale geschlossene Kette und daher eine Linearkombination der $\mathfrak{g}_{si}^{k-1}$,

$$R(\mathfrak{x}_s^k) = \Sigma\, n_i\, \mathfrak{g}_{si}^{k-1}.$$

Dann ist aber

$$\mathfrak{x}_s^k - \Sigma\, n_i\, \mathfrak{b}_{si}^k$$

eine geschlossene Kette, die also durch $\mathfrak{g}_{sj}^k$ darstellbar ist. Damit ist aber auch $\mathfrak{x}_s^k$ durch (3) ausgedrückt.

Angenommen andererseits, die Ketten (3) wären nicht linear unabhängig und es wäre

$$\Sigma m_{si}\, \mathfrak{g}^k_{si} + \Sigma n_{sj}\, \mathfrak{b}^k_{sj} = 0.$$

Dann müßte

$$\Sigma n_{sj}\, \mathfrak{b}^k_{sj}$$

eine geschlossene Kette und also

$$R(\Sigma n_{sj}\, \mathfrak{b}^k_{sj}) = \Sigma n_{sj}\, \mathfrak{g}^{k-1}_{sj} = 0$$

sein, was nach der Basiseigenschaft der $\mathfrak{g}^{k-1}_{sj}$ aber $n_{sj} = 0$ zur Folge hat.

§ 2.

Die zellähnlichen Komplexe benutzt man in der Theorie der Homologiekettenringe zur Erklärung von *Unterteilungen* in der folgenden Weise: Der n-dimensionale Komplex $\mathfrak{K}$ enthalte eine q-dimensionale Zelle $\mathfrak{z}^q$, deren Rand der sphärenähnliche Komplex $\mathfrak{S}^{q-1}$ sei; insbesondere sei

$$R(\mathfrak{z}^q) = \mathfrak{g}^{q-1}_s.$$

$\mathfrak{Z}^q$ sei ein zellenähnlicher Komplex mit dem Rande $\mathfrak{S}^{q-1}$. Wir unterteilen $\mathfrak{K}$ zu dem Komplex $\mathfrak{K}'$, indem wir $\mathfrak{z}^q$ eliminieren, dafür die Zellen von $\mathfrak{Z}^q - \mathfrak{S}^{q-1}$ hinzufügen und festsetzen: jede Zelle $\mathfrak{z}^{q+1}$, die mit $\mathfrak{z}^q$ positiv oder negativ inzidiert, soll in $\mathfrak{K}'$ mit allen q-dimensionalen Zellen von $\mathfrak{Z}^q$ in gleichem Sinne inzidieren. Der Übergang von $\mathfrak{K}'$ zu $\mathfrak{K}$ heiße eine Reduktion.

Die Ketten (3) mit dem Index z und die Zellen von $\mathfrak{K}$ außer $\mathfrak{z}^q$ bilden eine Kettenbasis von $\mathfrak{K}'$. In der Tat: aus den Zellen von $\mathfrak{S}^{q-1}$ lassen sich die Ketten (3) mit dem Index s kombinieren und aus der Gesamtheit der Ketten (3) die Zellen von $\mathfrak{Z}^q$ und aus unseren Ketten damit die Gesamtheit der Ketten von $\mathfrak{K}'$.

Andererseits würde eine lineare Abhängigkeit zwischen unsern k-dimensionalen Ketten ($k \neq q$) besagen, daß eine Kette

$$\Sigma m_{zi}\, \mathfrak{g}^k_{zi} + \Sigma n_{zj}\, \mathfrak{b}^k_{zj}$$

aus Zellen von $\mathfrak{K}$ kombinierbar wäre, also zu $\mathfrak{S}^{q-1}$ gehörte, und das hat wegen der Basiseigenschaft von (3) $m_{zi} = n_{zj} = 0$ zur Folge. Ebenso schließt man für $k = q$.

Der Homologiekettenring von $\mathfrak{K}'$ entsteht also aus den von $\mathfrak{K}$, indem man die Kette $\mathfrak{z}^q$ durch $\mathfrak{k}^q$ ersetzt und sukzessive ein Kettenpaar $\mathfrak{b}^{k+1}_{zi}$, $\mathfrak{g}^k_{zi}$ mit den Berandungsrelationen

$$R(\mathfrak{b}^{k+1}_{zi}) = \mathfrak{g}^k_{zi},\quad R(\mathfrak{g}^k_{zi}) = 0$$

hinzufügt.

§ 3.

Ganz analog können wir bei Homotopiekettenringen verfahren. Zunächst sei $\mathfrak{U}$ ein n-dimensionaler Komplex aus endlich oder abzählbar vielen Zellen, der eine Gruppe Γ von automorphen Abbildungen γ gestattet. Die Ketten von $\mathfrak{U}$ bilden alsdann eine Abelsche Gruppe mit den Operatoren γ. Den γ sei noch die Bedingung auferlegt, daß sie keine Zelle in sich überführen sollen, wenn γ nicht die Identität ist. Daraus folgert man leicht, daß es einen Fundamentalbereich von Zellen

$$\mathfrak{u}_i^k \qquad (i = 1, 2, \ldots, a_k;\ k = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

gibt, aus dem alle Zellen von $\mathfrak{U}$ durch Transformation mit einem γ entstehen. Der Fundamentalbereich enthalte nur endlich viele Zellen. Die k-dimensionalen Ketten von $\mathfrak{U}$ erhält man eindeutig dargestellt in

$$\Sigma x_i \mathfrak{u}_i^k,$$

wenn die x_i beliebige Elemente des Gruppenringes der Gruppe Γ über den ganzen rationalen Zahlen sind.

Ein System von Ketten

$$\mathfrak{b}_i^k \qquad (i = 1, 2, \ldots, a_k)$$

heißt eine Basis der k-dimensionalen Ketten, wenn es aus $\mathfrak{u}_i^k$, der Grundbasis, durch eine unimodulare ganzzahlige Transformation, oder durch eine Transformation

$$\mathfrak{b}_i^k = \gamma_i \mathfrak{u}_i^k \qquad (i = 1, 2, \ldots, a_k),$$

oder durch eine Folge solcher Transformation hervorgeht.

Unter einer *Unterteilung eines Komplexes* $\mathfrak{U}$ *mit der Automorphismengruppe* Γ möge nun eine Folge von Unterteilungen des Komplexes $\mathfrak{U}$ verstanden werden, bei welcher sukzessive alle Zellen $\gamma \mathfrak{u}^q$, die aus einer $\mathfrak{u}^q$, durch Transformation hervorgehen, durch isomorphe zellähnliche Komplexe $\gamma \mathfrak{Z}^q$ ersetzt werden. Der so unterteilte Komplex $\mathfrak{U}'$ besitzt alsdann wiederum die Automorphismengruppe Γ.

Sei jetzt $\mathfrak{u}^q = \mathfrak{u}_1^q$. Wir erhalten alsdann einen Fundamentalbereich von $\mathfrak{U}'$, wenn wir in (5) $\mathfrak{u}_1^q$ eliminieren und dafür die Zellen von $\mathfrak{Z}^q - \mathfrak{Z}^{q-1}$ hinzufügen. Wir behaupten, daß die Ketten

$$\mathfrak{g}_{zi}^k,\ \mathfrak{b}_{zj}^k,\ \mathfrak{u}_l^k \qquad (k < q) \tag{6}$$

eine Basis der k-dimensionalen Ketten von $\mathfrak{U}'$ und

$$\mathfrak{f}^q,\ \mathfrak{b}_{zj}^q,\ \mathfrak{u}_l^q \qquad (l \neq 1)$$

eine Basis der q-dimensionalen Ketten von $\mathfrak{U}'$ bilden.

Zum Beweis entnehmen wir für $k < q$ aus § 2, daß wir durch eine unimodulare ganzzahlige Transformation aus $\mathfrak{g}_{zi}^k$, $\mathfrak{b}_{zj}^k$ ein System von

Ketten $\mathfrak{z}^k_{zl} + \mathfrak{k}^k_{sl}$ erhalten können, im welchen $\mathfrak{z}^k_{zl}$ die sämtlichen k-dimensionalen Zellen von $\mathfrak{Z}^q - \mathfrak{S}^{q-1}$ durchläuft und wo $\mathfrak{k}^k_{sl}$ eine Kette aus $\mathfrak{S}^{q-1}$ ist. Da sich die $\mathfrak{k}^k_{sl}$ aus den $\mathfrak{u}^k_i$ linear mit Koeffizienten aus dem Gruppenring kombinieren lassen, erkennt man

$$\mathfrak{z}^k_{sl} + \mathfrak{k}^k_{sl},\ \mathfrak{u}^k_i$$

als eine Basis, und hieraus folgt dasselbe auch für das System (6). Ebenso schließt man für $k = q$.

Der Homologiekettenring mit Operatoren von $\mathfrak{U}'$ entsteht also aus dem von $\mathfrak{U}$, indem man $\mathfrak{u}^q = \mathfrak{u}^q_1$ durch $\mathfrak{k}^q$ ersetzt und sukzessive Kettenpaare

$$\mathfrak{b}^{k+1}_{zi},\ \mathfrak{g}^k_{zi} \quad \textit{mit} \quad R(\mathfrak{b}^{k+1}_{zi}) = \mathfrak{g}^k_{zi},\ R(\mathfrak{g}^k_{zi}) = 0 \tag{7}$$

hinzufügt.

§ 4.

Schließlich fassen wir den Fall ins Auge, daß $\mathfrak{U}$ die universelle Überlagerung eines Komplexes $\mathfrak{K}$ und Γ die Fundamentalgruppe von $\mathfrak{K}$ ist. In diesem Fall heißt der Homologiekettenring mit Operatoren von $\mathfrak{U}$ der Homotopieketten-ring von $\mathfrak{K}$.

Jeder Unterteilung von $\mathfrak{U}$ entspricht nun eine wohlbestimmte Unterteilung von $\mathfrak{K}$. Liegt $\mathfrak{u}^q$ über der Zelle $\mathfrak{z}^q$ von $\mathfrak{K}$ und wird $\mathfrak{u}^q$ durch $\mathfrak{Z}^q$ ersetzt, so wird $\mathfrak{z}^q$ durch einen zu $\mathfrak{Z}^q$ isomorphen Komplex $\mathfrak{Z}'^q$ ersetzt und so $\mathfrak{K}$ zu $\mathfrak{K}'$ unterteilt. Der unterteilte Komplex $\mathfrak{U}'$ ist alsdann wieder eine Überlagerung von $\mathfrak{K}'$, und zwar eine reguläre. Ebenso entspricht auch jeder Unterteilung von $\mathfrak{K}$ zu einem Komplex $\mathfrak{K}'$ eine Unterteilung von $\mathfrak{U}$ zu $\mathfrak{U}'$.

Dagegen ist nicht gesagt, daß $\mathfrak{U}'$ wieder die universelle Überlagerung von $\mathfrak{K}'$ ist, weil die Fundamentalgruppe Γ' von $\mathfrak{K}'$ nicht mit Γ identisch zu sein braucht. Im allgemeinen ist Γ vielmehr eine Faktorgruppe von Γ', weil Γ die Automorphismengruppe einer regulären Überlagerung von $\mathfrak{K}'$ ist. Die invariante Untergruppe von Γ', durch welche $\mathfrak{U}'$ bestimmt ist, heiße Δ; es ist also $\Gamma = \Gamma'/\Delta$.

Ist andererseits $\mathfrak{U}^{*\prime}$ eine reguläre Überlagerung von $\mathfrak{K}'$, die zu der invarianten Untergruppe Δ^* von Γ' gehört, so ist nicht gesagt, daß in $\mathfrak{U}^{*\prime}$ durch Reduktion von $\mathfrak{K}'$ zu $\mathfrak{K}$ eine entsprechende Reduktion induziert wird. Ist $\mathfrak{U}^{*\prime q}$ der Unterkomplex von $\mathfrak{U}^{*\prime}$ über $\mathfrak{Z}'^q$, so ist notwendig und hinreichend für die Existenz einer entsprechenden Reduktion von $\mathfrak{U}^{*\prime}$, daß $\mathfrak{U}^{*\prime q}$ in eine Summe von Komponenten fällt, die zu $\mathfrak{Z}'^q$ einstufig isomorph sind. Dieselben gehen alsdann aus einer von ihnen mittels den Automorphismen γ^* von $\mathfrak{U}^{*\prime}$ hervor. Ist diese Bedingung erfüllt, so kann

jede Komponente von $\mathfrak{U}^{*\prime q}$ durch eine Zelle γ^* $\mathfrak{u}^{*q}$ ersetzt und so $\mathfrak{U}^{*\prime}$ zu $\mathfrak{U}^*$ reduziert werden. Notwendig und hinreichend für diese Reduzierbarkeit ist also, daß jeder Weg in $\mathfrak{U}^{*\prime}$ über einem geschlossenen Weg aus Zellen von $\mathfrak{Z}'^q$ ebenfalls geschlossen ist. Δ^* enthält also die invariante Untergruppe Z von Γ', welche von geschlossenen Wegen aus $\mathfrak{Z}'^q$ erzeugt wird[4]). Dasselbe gilt von Δ. Nehmen wir nun $\Delta^* = \mathsf{Z}$, so erhalten wir eine Überlagerung $\mathfrak{U}^{*\prime}$, die nach Reduktion in eine Überlagerung $\mathfrak{U}^*$ von $\mathfrak{K}$ übergeht, die zugleich eine Überlagerung von $\mathfrak{U}$ ist. Folglich ist $\mathfrak{U}^*$ mit der universellen Überlagerung $\mathfrak{U}$ identisch und daher $\Delta = \mathsf{Z}$. Falls alle Wege von $\mathfrak{Z}'^q$ in $\mathfrak{Z}'^q$ zusammenziehbar sind, bleibt also bei der Unterteilung die Fundamentalgruppe unverändert.

Nennen wir noch die Hinzunahme zweier Basisketten (7) eine Erweiterung, so können wir unser Ergebnis so zusammenfassen: *Geht der Komplex $\mathfrak{K}'$ aus $\mathfrak{K}$ durch eine Unterteilung hervor, bei welcher die Zelle $\mathfrak{z}^q$ durch den zellähnlichen Komplex $\mathfrak{Z}^q$ ersetzt wird und ist die Fundamentalgruppe von $\mathfrak{Z}^q$ die Identität, so geht der Homotopiekettenring von $\mathfrak{K}'$ aus dem von $\mathfrak{K}$ durch Erweiterung hervor.*

Die Voraussetzungen dieses Satzes sind erfüllt, wenn der Rand $\mathfrak{S}^{q-1}$ von $\mathfrak{z}^q$ ein sphärenähnlicher Simplizialkomplex und unter $\mathfrak{Z}'^q$ der Stern mit dem Zentrum $\mathfrak{z}_z^0$ und mit dem Rand $\mathfrak{S}^{q-1}$ verstanden wird. Die zugehörige Unterteilung heiße „Sternunterteilung". $\mathfrak{Z}'^q$ ist ebenfalls ein Simplizialkomplex; daher lassen sich alle geschlossenen Wege von $\mathfrak{Z}'^q$ in eindimensionale deformieren, jeder eindimensionale Weg aus $\mathfrak{Z}'^q$ ist über Dreiecke mit der Ecke $\mathfrak{z}_z^0$ zusammenziehbar. $\mathfrak{Z}'^q$ hat also die Identität als Fundamentalgruppe. Andererseits ist $\mathfrak{Z}'^q$ zellähnlich. Wir wollen sogleich eine Kettenbasis (3) von $\mathfrak{Z}'^q$ konstruieren. Ist $\mathfrak{x}_s^k$ eine Kette aus $\mathfrak{S}^{q-1}$, so wollen wir unter $p\,\mathfrak{x}_s^k = \mathfrak{x}_z^{k+1}$, die Kette verstehen, die durch Projektion von $\mathfrak{z}_z^0$ aus $\mathfrak{x}_s^k$ entsteht. Es ist dann

$$R\,(p\,\mathfrak{x}_s^k) = \mathfrak{x}_s^k - p\,R\,(\mathfrak{x}_s^k).$$

Nun mögen die Ketten (3) mit dem Index s eine Basis von $\mathfrak{S}^{q-1}$ bilden. Wir definieren alsdann

$$\mathfrak{g}_{zi}^k = p\,\mathfrak{g}_{si}^{k-1} - \mathfrak{b}_{si}^k \qquad (k = 1, 2, \ldots, q-1)$$

$$\mathfrak{b}_{zi}^k = -\,p\,\mathfrak{b}_{si}^{k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, q)$$

und

$$\mathfrak{f}^q = p\,\mathfrak{g}_{s1}^{q-1},\ \mathfrak{g}_{z1}^0 = \mathfrak{z}_z^0 - \mathfrak{z}_s^0.$$

---

[4]) Zum Begriff des Weges und der Fundamentalgruppe vgl. Reidemeister, Die Fundamentalgruppe von Komplexen. Math. Zeitschr. 40 (1935), S. 406.

Alsdann ist

$$R(\mathfrak{g}^k_{zi}) = \mathfrak{g}^{k-1}_{si} - pR(\mathfrak{g}^{k-1}_{si}) - R(\mathfrak{b}^k_{si}) = 0,$$
$$R(\mathfrak{b}^k_{zi}) = -\mathfrak{b}^{k-1}_{si} + pR(\mathfrak{b}^{k-1}_{si}) = \mathfrak{g}^{k-1}_{zi},$$
$$R(\mathfrak{k}^q) = \mathfrak{g}^{q-1}_{s1} - pR(\mathfrak{g}^{q-1}_{s1}) = \mathfrak{g}^{q-1}_{s1}.$$

Ferner bilden die so definierten Ketten eine Basis, weil man aus den $\mathfrak{g}^k_{si}$, $\mathfrak{b}^k_{sj}$ alle k-dimensionalen Zellen von $\mathfrak{S}^{q-1}$ und daher aus $p\,\mathfrak{g}^k_{si}$, $p\,\mathfrak{b}^k_{si}$ alle $(k+1)$-dimensionalen Zellen von $\mathfrak{Z}^q - \mathfrak{S}^{q-1}$ linear kombinieren kann.

Nun folgt das Dualitätstheorem für die Homotopiekettenringe[2]) von Mannigfaltigkeiten[3]) unmittelbar. Denn wenn $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ zwei duale Mannigfaltigkeiten sind, so kann man sie durch eine Folge von Sternunterteilungen in denselben Komplex überführen[3]).

(Eingegangen am 8. November 1935.)

Denjoysche und Perronsche Integration.

Von

J. Ridder (Groningen)

$F(x)$ ist ein unbestimmtes allgemeines D-Integral einer Funktion $f(x)$ im abgeschlossenen Intervall (a, b), wenn in fast allen Punkten von (a, b), in denen $F'_{appr}(x)$ existiert, diese approximative Ableitung mit $f(x)$ zusammenfällt, wenn sich daneben (a, b) überdecken läßt durch abzählbar viele perfekte Mengen (P_k) und eine (eventuell leere) abzählbare Menge E, derartig, daß $F(x)$ totalstetig ist auf jeder Menge P_k[1]), während $F(x)$ *stetig ist in jedem Punkte des abgeschlossenen Intervalls*[2]). Diese letzte Bedingung bewirkt es, daß $F(x)$ auf (a, b) durch $f(x)$ bis auf eine additive Konstante bestimmt ist. Gibt es zu $f(x)$ eine Funktion $F(x)$, welche den Bedingungen allein mit Ausnahme der letzten genügt[3]), ist $F_k(x)$ die totalstetige Funktion, welche auf der zugehörigen Menge P_k mit $F(x)$ zusammenfällt und welche sich linear ändert in den zu P_k komplementären Teilintervallen von (a, b), so ist zwar die zu jeder Funktion $F_k(x)$ gehörige, additive und totalstetige Mengenfunktion $\Phi_k(e)$ durch die Kenntnis von $f(x)$ vollständig bestimmt für die meßbaren Teilmengen von P_k, aber es ist noch auf mannigfache Art möglich, aus diesen auf den Mengen (P_k) definierten Mengenfunktionen $\{\Phi_k(e)\}$ weitere Punktfunktionen abzuleiten, welche ebenso wie $F(x)$ den obengenannten Bedingungen, ohne die der Stetigkeit, genügen, und deren jedes Paar keine konstante Differenz hat.

Speziell in den letzten Jahren sind einige Arbeiten erschienen, welche Integraldefinitionen enthalten, in denen die Bedingung der Stetigkeit von $F(x)$ durch eine andere ersetzt ist, welche jedoch mit den übrigen, nicht abgeänderten Denjoyschen Bedingungen[4]) die Festlegung von $F(x)$ bis

---

[1]) Hieraus folgt, daß die approximative Ableitung von $F(x)$ in fast allen Punkten von (a, b) existiert.

[2]) Fordert man außerdem noch, daß für jede Menge P_k die Oszillationen von $F(x)$ in den zu P_k komplementären, abgeschlossenen Teilintervallen des zwischen den Endpunkten von P_k liegenden Intervalls eine konvergente Reihe bilden, so ist $F(x)$ ein unbestimmtes spezielles D-Integral; $F(x)$ hat dann fast überall in (a, b) eine Ableitung.

[3]) Das folgende gilt auch, wenn man außerdem die in [2]) gegebene Bedingung fordert.

[4]) Hier kann man wieder, sowohl die Bedingungen für das allgemeine, wie die für das spezielle Denjoysche Integral nehmen.

auf eine additive Konstante mit sich bringt. Es ist das Ziel des ersten Kapitels durch Einführung einer etwas abstrakteren Denjoy-Integration die eben angedeuteten Integraldefinitionen unter einem gemeinsamen Gesichtspunkte zusammenzufassen.

Auch für verschiedene neuere, mit Hilfe von Majoranten und Minoranten (somit im Sinne von Perron) gebildete Integraldefinitionen, gibt es eine abstraktere Perron-Integration, unter welcher sie alle fallen; diese wird in Kapitel 2 behandelt.

Erstes Kapitel.

Denjoy-Integration.

§ 1. $K[K^*]$ sei die Klasse derjenigen für $a \leqq x \leqq b$ eindeutigen und endlichen Funktionen $\{F(x)\}$, welche die Eigenschaft haben, daß (a, b) sich für eine jede von ihnen überdecken läßt durch abzählbar viele perfekte Mengen (P_k) und eine abzählbare Menge E, derartig, daß die betrachtete Funktion $F(x)$ totalstetig [totalstetig*[5])] ist auf jeder Menge P_k.

Eine Eigenschaft A, welche Funktionen der Klasse $K[K^*]$ im abgeschlossenen Intervall (a, b) zukommen kann, nennen wir *eine ergänzende Eigenschaft*, wenn sie den beiden Bedingungen genügt:

α) jede in (a, b) totalstetige Funktion besitzt die Eigenschaft;

β) wenn zwei Funktionen $F^{(1)}(x)$, $F^{(2)}(x)$ zur Klasse $K[K^*]$ gehören, so gibt es immer abzählbar viele perfekte Mengen (P_k), welche sämtlich (a, b) bis auf eine abzählbare Teilmenge überdecken und auf deren jeder sowohl $F^{(1)}(x)$ wie $F^{(2)}$ totalstetig [totalstetig*] sind; kann man nun diese Mengen derartig wählen, daß die zu den Funktionen $\{F_k^{(1)}(x)\}$ und $\{F_k^{(2)}(x)\}$ [6]) gehörenden, additiven und totalstetigen Mengenfunktionen $\{\Phi_k^{(1)}(e)\}$ bzw. $\{\Phi_k^{(2)}(e)\}$ für die meßbaren Teilmengen der zugehörigen Menge P_k identisch sind, so sollen $F^{(1)}(x)$ und $F^{(2)}(x)$ nur eine konstante Differenz haben können, wenn beide die Eigenschaft A haben.

$K(A)[K^*(A)]$ sei die Teilklasse der Funktionen von $K[K^*]$, welche die Eigenschaft A haben; der Umfang von $K(A)[K^*(A)]$ hängt natürlich von der Wahl der ergänzenden Eigenschaft ab.

Integraldefinition: *Die in (a, b) eindeutige Funktion $f(x)$ ist A-integrierbar [A*-integrierbar] über (a, b), wenn es eine zur Klasse $K(A)[K^*(A)]$*

[5]) Das soll heißen: $F(x)$ ist totalstetig auf der betrachteten, perfekten Menge P_k und die Oszillationen von $F(x)$ in den zu der Menge komplementären, abgeschlossenen Teilintervallen des zwischen den Endpunkten von P_k liegenden Intervalls, vielleicht unter Ausschluß endlich vieler, bilden eine konvergente Reihe. Siehe Ridder, Math. Zeitschr. **34** (1931), S. 251 (Def. 17*).

[6]) Diese gehen in gleicher Weise aus $F^{(1)}(x)$ bzw. $F^{(2)}(x)$ hervor wie in der Einleitung die Funktionen $\{F_k(x)\}$ aus $F(x)$.

gehörende Funktion $F(x)$ gibt, deren approximative Ableitung in fast allen Punkten ihrer Existenzmenge mit $f(x)$ zusammenfällt. Dann soll für das A-Integral [das A-Integral] über (x_1, x_2), mit $a \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq b$, gelten.*

$$(A)\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = F(x_2) - F(x_1)\ [(A^*)\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = F(x_2) - F(x_1)]^7).$$

Es läßt sich leicht beweisen:

I. $F(x)$ ist bis auf eine additive Konstante bestimmt; das A-Integral [das A^*-Integral] über (x_1, x_2) hat einen eindeutig bestimmten, endlichen Wert.

II. Jede A-Integration [jede A^*-Integration] umfaßt die Lebesgue-Integration.

III. Wenn $f(x)$ A-integrierbar [A^*-integrierbar] ist über (a, b), so ist für $a \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq b$:

$$(A)\int_{x_1}^{x_3} f(x)\,dx = (A)\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + (A)\int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx$$

$$[(A^*)\int_{x_1}^{x_3} f(x)\,dx = (A^*)\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + (A^*)\int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx].$$

---

[7]) Noch weit allgemeiner als diese ist die hier folgende Integraldefinition.

In einem abstrakten Raume läßt sich, ausgehend von einem „in bezug auf sich beschränkten" σ-Körper und einer für die Mengen dieses Körpers definierten, total-additiven Mengenfunktion $U(M)$ ein Lebesgue-Stieltjessches Integral in bezug auf U einführen [siehe Ridder, Fund. Math. 24 (1935), S. 110)]. Wir betrachten endlich oder abzählbar unendlich viele von derartigen σ-Körpern und zugehörigen Mengenfunktionen (U_j); zu jedem Glied der Folge sei eine Teilklasse T_j gewählt aus dem σ-Körper der Mengen, über die es eine L.-S.-Integration in bezug auf U_j für Punktfunktionen gibt, die auf diesen Mengen definiert sind. Die Teilklassen seien derartig gewählt, *daß* $\sum_{(j)} T_j$ *auch immer den Durchschnitt von je zwei ihrer Mengen enthält.*

$\mathfrak{R}$ sei ein Ring oder ein Körper von (in jedem besonderen Fall näher charakterisierten) Teilmengen des abstrakten Raumes. Gehört $\mathfrak{M}$ zur Klasse $\mathfrak{R}$, so sei $K_{\Gamma;\,\mathfrak{M}}$ die Klasse derjenigen auf $\mathfrak{M}$ und ihren zu $\mathfrak{R}$ gehörenden Teilmengen definierten, eindeutigen, beschränkt-additiven und endlichen Mengenfunktionen $\{\mathfrak{U}(M)\}$, welche die Eigenschaft haben, daß $\mathfrak{M}$ (und ebenso jene Teilmengen) sich für eine jede von diesen Funktionen überdecken läßt durch abzählbar viele, zu den obengenannten Klassen (T_j) gehörenden Mengen (M_j^p), derartig, daß *die Operation* Γ es ermöglicht, aus $\mathfrak{U}(M)$ für eine jede der Mengen (M_j^p) eine auf M_j^p total-additive Mengenfunktion $\mathfrak{U}_j^p(M)$ abzuleiten, welche ein unbestimmtes Lebesgue-Stieltjessches Integral in bezug auf die zugehörige Funktion $U_j(M)$ ist; außerdem soll die Operation Γ es erlauben, auch für jede zu $\sum_{(j)} T_j$ gehörende Teilmenge eines M_j^p eine derartige Mengenfunktion abzuleiten; *wie auch die Operation* Γ *angewandt wird, für dieselbe Menge soll sie immer dasselbe Resultat liefern.*

Eine ergänzende Eigenschaft A soll der Bedingung genügen: „wenn zwei Funktionen $\mathfrak{U}_1(M)$ und $\mathfrak{U}_2(M)$ zur Klasse $K_{\Gamma;\,\mathfrak{M}}$ gehören, so gibt es abzählbar viele

IV. In fast allen Punkten von (a, b) ist für die über (a, b) A-integrierbare [A^*-integrierbare] Funktion $f(x)$ die approximative Ableitung von $(A)\int_a^x f(x)\,dx$ [die Ableitung von $(A^*)\int_a^x f(x)\,dx$] gleich $f(x)$.

V. Ist für $a < c < b$ die Funktion $f(x)$ A_1-integrierbar [A_1^*-integrierbar] über (a, c) und A_2-integrierbar [A_2^*-integrierbar] über (c, b)[8]) und definiert man die Eigenschaft A_3 in (a, b) dadurch, daß eine in (a, b) eindeutige, zur Klasse $K[K^*]$ gehörende Funktion in (a, c) die Eigenschaft A_1 und in (c, b) die Eigenschaft A_2 hat[9]), so wird $f(x)$ über (a, b) A_3-integrierbar [A_3^*-integrierbar] sein, und es ist:

1. $$(A_3)\int_a^b f\,dx = (A_1)\int_a^c f\,dx + (A_2)\int_c^b f\,dx$$

$$[(A_3^*)\int_a^b f\,dx = (A_1^*)\int_a^c f\,dx + (A_2^*)\int_c^b f\,dx];$$

---

zu $\sum_{(j)} T_j$ gehörende und sämtlich $\mathfrak{M}$ überdeckende Mengen (M_j^p), auf deren jeder sowohl $\mathfrak{U}_1$ wie $\mathfrak{U}_2$, mittels der Operation Γ, zu einem unbestimmten L.-S.-Integral führt; kann man nun diese Mengen (M_j^p) derartig wählen, daß diese zu $\mathfrak{U}_1$ bzw. $\mathfrak{U}_2$ gehörenden Integrale auf der zugehörigen Menge M_j^p identisch sind, so sollen auch $\mathfrak{U}_1(M)$ und $\mathfrak{U}_2(M)$ identisch sein auf $\mathfrak{M}$."

$K_{\Gamma;\,\mathfrak{M}}(A)$ sei die Teilklasse der Funktionen von $K_{\Gamma;\,\mathfrak{M}}$, welche die Eigenschaft A haben.

Integraldefinition: *Die für die Punkte von $\mathfrak{M}$ eindeutige Funktion $f(x)$ ist A_Γ-integrierbar über $\mathfrak{M}$, wenn es eine zur Klasse $K_{\Gamma;\,\mathfrak{M}}(A)$ gehörende Mengenfunktion $\mathfrak{U}(M)$ gibt derart, daß es eine Überdeckung von $\mathfrak{M}$ durch abzählbar viele Teilmengen (M_j^p) gibt, wie oben angedeutet, und wobei jedesmal die zugehörige total-additive Mengenfunktion $\mathfrak{U}_j^p(M)$ das unbestimmte* L.-S.-*Integral von $f(x)$ auf M_j^p in bezug auf U_j sein soll. Es sei dann:*

$$(A_\Gamma)\int_{\mathfrak{M}} f\cdot d(U_1, U_2, \ldots, U_j, \ldots) = \mathfrak{U}(\mathfrak{M}).$$

Das (beschränkt additive) Integral ist durch die Kenntnis von f vollständig bestimmt.

Diese Integration umfaßt nicht nur alle diejenigen des ersten (und dadurch auch des zweiten Kapitels), sondern außerdem die Denjoy-Stieljesschen Integrationen unserer Arbeit: Math. Zeitschr. 40, (1935), S. 127—160 (siehe insbes. Def. 11, 20, die Definitionen der Fußnote 52; vgl. Lebesgue, Leçons sur l'intégration, 2e Éd. (1928), S. 310) und die Denjoy-Integrationen für Funktionen zweier Veränderlichen von M. Krzyzański, Compt. rend. 198 (1934), S. 2058—2060 und von S. Kempisty, Compt. rend. 198 (1934), S. 2060—2062.

[8]) A_1 und A_2 sind ergänzende Eigenschaften für die zu (a, c) bzw. (c, b) gehörenden Klassen $K[K^*]$.

[9]) Wenn eine in (a, b) definierte Funktion in (a, b) zur Klasse $K[K^*]$ gehört, so gehört sie auch für (a, c) und (c, b) zur Klasse $K[K^*]$; und umgekehrt.

2. für $a \leqq x \leqq c$:

$$(A_3)\int_a^x f\,dx = (A_1)\int_a^x f\,dx\,[(A_3^*)\int_a^x f\,dx = (A_1^*)\int_a^x f\,dx];$$

3. für $c \leqq x \leqq b$:

$$(A_3)\int_c^x f\,dx = (A_2)\int_c^x f\,dx\,[(A_3^*)\int_c^x f\,dx = (A_2^*)\int_c^x f\,dx].$$

§ 2. Beispiele von ergänzenden Eigenschaften und zugehörigen Integrationen:

1. Zur A-Integration [A^*-Integration] einer für $a \leqq x \leqq b$ eindeutigen Funktion $f(x)$ ist es, wie auch die Eigenschaft A gewählt sei, an erster Stelle notwendig, daß es in (a, b) zur Klasse $K[K^*]$ gehörende Funktionen gibt, deren (fast überall existierende) approximative Ableitung fast überall mit $f(x)$ zusammenfällt. Dadurch wird es auch eine notwendige Bedingung für jede A-Integration [jede A^*-Integration] einer Funktion $f(x)$ sein, daß die Menge derjenigen Punkte von (a, b), über deren jede Umgebung $f(x)$ nicht L-integrierbar ist, eine nirgends dichte, abgeschlossene Menge H_f bilden. Nun sei für eine dieser Bedingung genügende Funktion $f(x)$ die Klasse $K(A)$ [$K^*(A)$] die Teilklasse derjenigen Funktionen von $K[K^*]$, welche stetig sind in jedem zu H_f komplementären, abgeschlossenen Teilintervall u_n von (a, b) in bezug auf alle Punkte von u_n und stetig in jedem Punkte von H_f in bezug auf die Punkte von H_f. Nennen wir derartige, von Funktion zu Funktion wechselnde Stetigkeitsbedingungen *Stetigkeiten im Youngschen Sinne* ($S\,Y$), so bilden *die $S\,Y^*$-Integrale* eine Erweiterung der speziellen Denjoyschen Integrale, während *die $S\,Y$-Integrale* die (in abweichender Weise), als Erweiterungen der allgemeinen Denjoyschen Integrale, von W. H. Young definierten Integrale[10]) sind.

2. Die Funktion $F(x)$ heiße in jedem Punkte ξ des abgeschlossenen Intervalls (a, b) *τ-stetig*, wobei $1 \geqq \tau > \frac{1}{2}$ (τ entweder fest oder von Punkt zu Punkt veränderlich), wenn es zu ξ eine meßbare Teilmenge von (a, b) gibt, deren linke untere Dichte (ausgenommen für $\xi = a$) und rechte untere Dichte (ausgenommen für $\xi = b$) in diesem Punkte $\geqq \tau$ sind und auf welcher $F(x)$ stetig ist in ξ.

$K(\tau\text{-}S)[K^*(\tau\text{-}S)]$ sei die Teilklasse der zu $K[K^*]$ gehörenden τ-stetigen Funktionen. *Das τ-S-Integral*[11]) ist eine Erweiterung des allgemeinen

[10]) Siehe W. H. Young, Proc. London Math. Soc. (2) **16** (1916), S. 175–218; auch Hobson, Theory of functions I (Third Ed., 1927), S. 719, 720.

[11]) Siehe auch Ridder, Fund. Math. **22** (1934), S. 162, Fußnote 41 (die dort gemachten Bemerkungen für festes τ gelten auch bei τ veränderlich, dennoch immer $> 1/2$), S. 147 u. 148.

D-Integrals, *das* τ-S^*-*Integral* eine Erweiterung des speziellen D-Integrals[12]).

§ 3. Die im vorigen Paragraphen genannten Beispiele von A-Integrationen [von A^*-Integrationen] besitzen die in § 1 formulierten Eigenschaften I bis V. Wie Beispiele zeigen, haben sowohl die SY-Integrale wie die τ-S-Integrale [sowohl die SY^*-Integrale wie die τ-S^*-Integrale] nicht die Eigenschaft, daß aus SY- bzw. τ-S-Integrierbarkeit [aus SY^*- bzw. τ-S^*-Integrierbarkeit] von zwei Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ notwendig hervorgeht die Integrierbarkeit ihrer Summe nach demselben Verfahren und die Gleichheit des bestimmten Integrals der Summe und der Summe der bestimmten Integrale von $f_1(x)$ und $f_2(x)$[13]).

Es wird somit notwendig sein, die allgemeine A-Integration [die A^*-Integration] einzuschränken, wenn man diese elementare Integraleigenschaft zurückerhalten will.

γ) Erfüllt die ergänzende Eigenschaft A, außer den in § 1 formulierten, beiden Bedingungen, noch die Bedingung, daß für jedes Paar von Konstanten C_1, C_2 die Summe $C_1 \cdot F_1(x) + C_2 \cdot F_2(x)$ zur Teilklasse $K(A)[K^*(A)]$ gehört, sobald $F_1(x)$ und $F_2(x)$ zu $K(A)[K^*(A)]$ gehören, so gilt:

VI. Sind $f_1(x)$ und $f_2(x)$ über (a, b) A-integrierbar [A^*-integrierbar], so ist auch $C_1 \cdot f_1(x) + C_2 \cdot f_2(x)$ über (a, b) A-integrierbar [A^*-integrierbar], und man hat:

$$(A)\int_a^b (C_1 \cdot f_1 + C_2 \cdot f_2)\,dx = C_1 \times (A)\int_a^b f_1\,dx + C_2 \times (A)\int_a^b f_2\,dx$$

$$[(A^*)\int_a^b (C_1 \cdot f_1 + C_2 \cdot f_2)\,dx = C_1 \times (A^*)\int_a^b f_1\,dx + C_2 \times (A^*)\int_a^b f_2\,dx].$$

δ) Fügt man der Eigenschaft A noch die Bedingung hinzu, daß eine Funktion $F(x)$, welche in (a, b) zur Klasse $K(A)[K^*(A)]$ gehört und für welche die auf den P_k zugehörigen Mengenfunktionen $\{\Phi_k(e)\}$ (siehe § 1) immer entweder nicht-negativ oder immer nicht-positiv sind, dadurch monoton ist in (a, b)[14]), so hat man:

VII. Wenn eine nicht-negative oder nicht-positive Funktion $f(x)$ über (a, b) ein A-Integral [ein A^*-Integral] hat, so hat sie daselbst auch ein Lebesguesches Integral und umgekehrt, und es ist dann:

$$(1) \qquad (A)\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (L) f(x)\,dx\ [(A^*)\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (L) f(x)\,dx].$$

[12]) Siehe dabei l. c. [11]), S. 162, Fußnote 41, S. 137 u. 138.

[13]) Siehe z. B. Hobson, l. c. [9]), S. 723, 724 und Kennedy and Pollard, Math. Zeitschr. **39** (1935), S. 449 u. 450.

[14]) Man konstruiert leicht ein Beispiel, das zeigt, daß dies nicht immer der Fall zu sein braucht in einer die Bedingungen α, β, γ erfüllenden Funktionenklasse $K(A)[K^*(A)]$.

Beweis. $F(x) \equiv (A)\int_a^x f(x)\,dx$ ist entweder nicht-abnehmend oder nicht-zunehmend; es existiert somit fast überall in (a,b) $F'(x)$, und, nach Satz IV, ist fast überall

$$F'(x) = f(x).$$

Dadurch existiert auch $\int_a^x (L) f\,dx$ und nach Satz II gilt nun (1).

Daß, umgekehrt, aus der Existenz von $\int_a^b (L) f\,dx$ die Existenz des A-Integrals und (1) folgt, ist, nach Satz II, sofort klar.

VIII. Jede Funktion der in (a,b) nach $f(x)$ konvergierenden Folge: $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ sei A-integrierbar [A^*-integrierbar]. Wenn für jedes n und jedes x in (a,b):

$$g(x) \leqq f_n(x) \leqq h(x)$$

ist und $g(x)$ und $h(x)$ über (a,b) A-integrierbar [A^*-integrierbar] sind, so wird auch $f(x)$ über (a,b) A-integrierbar [A^*-integrierbar] sein, und es ist dann:

$$(A)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} (A)\int_a^b f_n(x)\,dx \;[(A^*)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} (A^*)\int_a^b f_n(x)\,dx]^{15}).$$

§ 4. Beispiele von ergänzenden Eigenschaften, welche allen Bedingungen $\alpha - \delta$ genügen:

1. Hat jede Funktion der Klasse $K(A\,S)$ [$K^*(A\,S)$] die Eigenschaft, in jedem Punkte des abgeschlossenen Intervalls (a,b) *approximativ stetig* $(A\,S)$ zu sein, so ist *das* zugehörige *A S-Integral* das β-Integral unserer Arbeit: Fund. Math. **22** (1934), S. 136—162, insbesondere S. 147—160[16]) [und *das* zugehörige *A S*-Integral* ist das α-Integral jener Arbeit (siehe insbesondere l. c. S. 137—146][17]).

2. Gehört eine Funktion der Klasse K [K^*] zur Teilklasse $K(S)$ [$K^*(S)$], wenn sie in jedem Punkte von (a,b) *stetig* (S) ist, so ist *das* zugehörige *S-Integral* das allgemeine *D*-Integral [*das* zugehörige *S*-Integral* das spezielle *D*-Integral].

3. Die Klasse $K(P\,F)$ [$K^*(P\,F)$] soll diejenigen Funktionen $\{F(x)\}$ von K [K^*] enthalten, *zu deren jeder es eine (primitive) Funktion gibt, welche in jedem Punkte des abgeschlossenen Intervalls* (a,b) *eine endliche Ableitung gleich der betrachteten Funktion* $F(x)$ *hat.* Es läßt sich zeigen,

---

[15]) Zum Beweise vergleiche man Ridder, Fund. Math. **21** (1933), S. 9, 10.

[16]) Siehe auch schon die in Fußnote 15 zitierte Arbeit, S. 1—10.

[17]) Siehe auch l. c. [15]), S. 6, Fußnote 13.

daß auch die Funktionen dieser Klassen die Eigenschaften $\alpha - \delta$ haben[18]). *Das* zugehörige (PF)-*Integral* wurde, in abweichender Weise, von Verblunsky, l. c.[18]), S. 193—236 eingeführt und in der Theorie der trigonometrischen Reihen angewandt; *das* $(PF)^*$-*Integral* ist ein Spezialfall des (PF)-Integrals.

4. Zur Klasse $K(PF2)$ $[K^*(PF2)]$ sollen diejenigen Funktionen $\{F(x)\}$ von $K[K^*]$ gehören, *zu deren jeder es eine Funktion (primitive Funktion zweiter Art) gibt, welche in jedem Punkte des abgeschlossenen Intervalls* (a, b) *eine endliche approximative Ableitung gleich der betrachteten Funktion* $F(x)$ *hat*[19]). Die Bedingungen $\alpha - \delta$ sind wieder erfüllt[20]). Die zugehörigen Integrale nennen wir $(PF2)$-*Integrale* $[(PF2)^*$-*Integrale*$]$; sie umfassen die in 3. betrachteten Integrale.

Zweites Kapitel.

Perron-Integration.

§ 5. U $[U^*]$ sei die Klasse der für $a \leqq x \leqq b$ eindeutigen und endlichen Funktionen $\{\psi(x)\}$, deren jede die Eigenschaft hat, daß für die betrachtete Funktion $\psi(x)$ das Intervall (a, b) mit Ausnahme von höchstens abzählbar vielen Punkten sich überdecken läßt durch abzählbar viele perfekte Mengen $\{P_k\}$, derartig, daß $\psi(x)$ unterhalb totalstetig[21]) [unterhalb totalstetig*][22]) ist auf jeder Menge P_k.

---

[18]) Zum Beweise von β und δ folge man den Gedankengang, welcher zur konstruktiven Definition des (allgemeinen oder speziellen) Denjoyschen Integrals führt (siehe z. B. Hobson, l. c. [9]), S. 692—697; dabei auch S. Verblunsky, Fund. Math. **23** (1934), S. 196]; man hat dabei die Eigenschaft zu benutzen, daß jede endliche Ableitung $g'(x)$ ein spezielles D-Integral $\int_{x_1}^{x_2} (D^*)\, g'(x)\, dx$ gleich $g(x_2) - g(x_1)$ hat, wobei $a \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq b$.

[19]) Jede primitive Funktion zweiter Art ist notwendig approximativ stetig in (a, b); dagegen wird sie im allgemeinen nicht stetig sein in (a, b).

[20]) Die in Fußnote 18 gemachten Bemerkungen gelten auch hier; nur soll hier angewandt werden der Satz: „Jede endliche approximative Ableitung $F'_{\text{appr}}(x)$ ist β-integrierbar und das β-Integral von $F'_{\text{appr}}(x)$ über (x_1, x_2), wobei $a \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq b$, liefert $F(x_2) - F(x_1)$“ (siehe Ridder, l. c. [11]), S. 157).

[21]) D. h. die Summe der Funktionsdifferenzen: $\sum_{(j)} \{\psi(b_j) - \psi(a_j)\}$ in den zu P_k gehörenden Endpunkten $a_j < b_j$ von endlich vielen, nicht übereinander greifenden Intervallen hat immer einen unteren Limes $\geqq 0$, sobald die Längensumme dieser Intervalle gegen Null konvergiert. Siehe Ridder, l. c. [5]), S. 244 (Def. 9).

[22]) D. h. die Summen von Funktionsdifferenzen: $\sum_{(j)} \{\psi(b_j) - \psi(c_j)\}$ und $\sum_{(j)} \{\psi(c_j) - \psi(a_j)\}$, wobei $a_j \leqq c_j \leqq b_j$ ist und die Paare $\{a_j, b_j\}$ zu P_k gehörende Endpunkte von endlich vielen, nicht übereinander greifenden Intervallen sind, haben immer einen unteren Limes $\geqq 0$, sobald die Längensumme dieser Intervalle gegen Null konvergiert. Siehe Ridder, l. c. [5]), S. 251 (Def. 16).

$O[O^*]$ sei die Klasse der für $a \leqq x \leqq b$ eindeutigen und endlichen Funktionen $\{\varphi(x)\}$, deren jede die Eigenschaft hat, daß für die betrachtete Funktion $\varphi(x)$ das Intervall (a, b) mit Ausnahme von höchstens abzählbar vielen Punkten sich überdecken läßt durch abzählbar viele perfekte Mengen $\{P_k\}$, derartig, daß $\varphi(x)$ oberhalb totalstetig[23]) [oberhalb totalstetig*][24]) ist auf jeder Menge P_k.

Jede Differenz $\psi(x) - \varphi(x)$, wobei $\psi \varepsilon U[U^*]$ und $\varphi \varepsilon O[O^*]$, gehört zur Klasse $U[U^*]$.

Eine Eigenschaft B, welche Funktionen der Klasse $U[U^*]$, und eine Eigenschaft C, welche Funktionen der Klasse $O[O^*]$ im abgeschlossenen Intervall (a, b) zukommen kann, nennen wir *ein Paar* (B, C) *von ergänzenden Eigenschaften*, wenn sie den Bedingungen genügen:

α_1) Jede in (a, b) unterhalb totalstetige und stetige Funktion hat die Eigenschaft B; jede in (a, b) oberhalb totalstetige und stetige Funktion hat die Eigenschaft C;

β_1) wenn zwei Funktionen ψ und φ zur Klasse $U[U^*]$ bzw. $O[O^*]$ gehören, so gibt es immer abzählbar viele perfekte Mengen (P_k), welche sämtlich (a, b) bis auf eine abzählbare Menge überdecken und auf deren jeder $\psi(x)$ unterhalb totalstetig [unterhalb totalstetig*] und $\varphi(x)$ oberhalb totalstetig [oberhalb totalstetig*] ist; kann man nun diese Teilmengen derartig wählen, daß für die aus den Funktionen $\{\psi_k(x)\}$ und $\{\varphi_k(x)\}$[25]) hervorgehenden, totaladditiven Mengenfunktionen $\{\Psi_k(e)\}$ und $\{\Phi_k(e)\}$[26]) die Differenz $\Psi_k(e) - \Phi_k(e)$ auf den Teilmengen von P_k, für die diese Differenz einen Sinn hat, immer nicht-negativ ist, so soll $\psi(x) - \varphi(x)$ *(monoton) nicht-abnehmend* und *stetig* sein in (a, b), wenn nur in (a, b) ψ die Eigenschaft B und φ die Eigenschaft C hat[27]).

$U(B)[U^*(B)]$ sei die Teilklasse der Funktionen von $U[U^*]$, welche die Eigenschaft B haben; $O(C)[O^*(C)]$ sei die Teilklasse der Funktionen von $O[O^*]$, welche die Eigenschaft C haben.

Satz. *Ist* (B, C) *ein Paar von ergänzenden Eigenschaften, und gibt es zu der in* (a, b) *eindeutigen Funktion* $f(x)$: 1. *zur Klasse* $U(B)[U^*(B)]$

---

[23]) Definition wie in Fußnote 21, jedoch mit „einen oberen Limes $\leqq 0$“ statt „einen unteren Limes $\geqq 0$“.

[24]) Definition wie in Fußnote 22, mit „einen oberen Limes < 0“ statt „einen unteren Limes $\geqq 0$“.

[25]) Diese gehen selber in gleicher Weise aus $\psi(x)$ bzw. $\varphi(x)$ hervor wie die Funktionen $\{F_k(x)\}$ für die in der Einleitung betrachteten perfekten Mengen $\{P_k\}$ aus $F(x)$.

[26]) Man siehe zu ihrer Konstruktion z. B. de la Vallée Poussin, Intégrales de Lebesgue, etc. (2e Éd., 1934), Chap. 6.

[27]) Wir bemerken, daß die Bedingungen α_1 und β_1 (ebenso wie die Bedingungen α und β in § 1) einander nicht widersprechen.

gehörende Funktionen $\{\psi(x)\}$ *mit*

$$\psi'_{\text{appr}}(x) \geqq f(x) \tag{2}$$

in fast allen Punkten der Existenzmenge von $\psi'_{\text{appr}}(x)$; *2. zur Klasse* $O(C)[O^*(C)]$ *gehörende Funktionen* $\{\varphi(x)\}$ *mit*

$$\varphi'_{\text{appr}}(x) \leqq f(x) \tag{3}$$

in fast allen Punkten der Existenzmenge von $\varphi'_{\text{appr}}(x)$, *so wird für diese Funktionen* $\{\psi\}$, $\{\varphi\}$:

$$\liminf [\psi(b) - \psi(a)] \geqq \limsup [\varphi(b) - \varphi(a)]$$

sein.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß für jedes Paar von Funktionen ψ, φ, welche den Bedingungen des Satzes genügen, $\psi(x) - \varphi(x)$ (monoton) nicht-abnehmend ist. Es gibt eine Überdeckung von (a, b) durch eine abzählbare Menge und abzählbar viele perfekte Teilmengen (P_k) derart, daß ψ unterhalb- und φ oberhalb totalstetig [ψ unterhalb- und φ oberhalb totalstetig*] ist auf einer jeden Menge P_k. Die Funktionen $\psi_k(x)$, $\varphi_k(x)$, welche auf P_k mit ψ bzw. mit φ zusammenfallen und welche sich linear ändern in den zu P_k komplementären, abgeschlossenen Teilintervallen von (a, b), lassen sich erweitern zu für die Ψ_k- und Φ_k-meßbaren Teilmengen von P_k definierten, totaladditiven Mengenfunktionen $\Psi_k(e)$ bzw. $\Phi_k(e)$, deren singulärer Bestandteil immer nicht-negativ bzw. immer nicht-positiv ist. Daraus und aus (2) und (3) folgt, daß $\Psi_k - \Phi_k$ immer nicht-negativ ist für die Teilmengen, welche sowohl Ψ_k- wie Φ_k-meßbar sind. Aber dadurch liefern die ergänzenden Eigenschaften B, C, daß $\psi - \varphi$ (monoton) nicht-abnehmend (und stetig) ist in (a, b).

Integraldefinition. $f(x)$ *soll nun* (B, C)*-integrierbar* [(B, C)*-integrierbar*] *über* (a, b) *sein, wenn für die oben betrachteten Funktionen* $\{\psi\}$, $\{\varphi\}$

$$\liminf [\psi(b) - \psi(a)] = \limsup [\varphi(b) - \varphi(a)]$$

ist. Dann wird auch für $a \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq b$

$$\liminf [\psi(x_2) - \psi(x_1)] = \limsup [\varphi(x_2) - \varphi(x_1)]$$

sein; und es sei dann:

$$(B, C) \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = \liminf [\psi(x_2) - \psi(x_1)]$$

$$\left[(B, C)^* \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = \liminf [\psi(x_2) - \psi(x_1)] \right]^{28}).$$

---

[28]) Man betrachtet zuweilen als Vorteil der ursprünglichen Perronschen Integraldefinition, daß sie keinerlei mit der Lebesgueschen Maß- und Integrationstheorie zusammenhängende Begriffe benutzt. Dies gilt nicht mehr von der abstrakteren, im Texte enthaltenen Definition; wohl aber (abgesehen, wo dies notwendig ist, von der speziellen Art der Eigenschaften B und C) von der Definition, die man erhält, wenn man in § 5 die Klassen $U[U^*]$ und $O[O^*]$ durch die (unten definierte) Klasse $U_1[U_1^*]$ bzw. durch die Klasse $O_1[O_1^*]$ (deren analoge Definition auf der Hand liegt)

Satz α_2. *Existiert für* $a \leqq x \leqq b$ *das unbestimmte Integral* $(BC) \int_a^x f(x)\,dx$ [*das unbestimmte Integral* $(BC)^* \int_a^x f(x)\,dx$], *so gehört es in* (a, b) *zur Klasse* K [*zur Klasse* K^*] (siehe § 1).

Beweis. Es gibt eine Folge von Funktionen $\{\psi_k(x)\}$ der Klasse $U(B)$ [$U^*(B)$] und eine Folge von Funktionen $\{\varphi_k(x)\}$ der Klasse $O(C)$ [$O^*(C)$], welche in bezug auf $f(x)$ den Bedingungen des vorigen Satzes genügen und für die

$$\lim_{k\to\infty} [\psi_k(b) - \psi_k(a)] = \lim_{k\to\infty} [\varphi_k(b) - \varphi_k(a)]$$

ist.

---

ersetzt und auch die Definition eines Paares (B, C) von ergänzenden Eigenschaften in näher angegebener Weise abändert. $U_1[U_1^*]$ sei die Klasse der für $a \leqq x \leqq b$ eindeutigen und endlichen Funktionen $\{\psi_1(x)\}$, deren jede die Eigenschaft hat: 1. sie ist *in* (a, b) *stetig im verallgemeinerten Sinne*, d. h. es läßt sich (a, b), ausgenommen in abzählbar vielen Punkten, überdecken durch abzählbar viele perfekte Mengen, auf deren jeder die betrachtete Funktion $\psi_1(x)$ stetig ist (vgl. Ridder, l. c. [11]), S. 146); 2. es gibt eine zweite Überdeckung von (a, b) durch eine abzählbare Menge E und abzählbar viele perfekte Teilmengen (P_k) derart, daß jede Funktion $\psi_1^{(k)}(x)$, welche auf der zugehörigen Menge P_k mit $\psi_1(x)$ zusammenfällt und sich linear ändert in den zu P_k komplementären, abgeschlossenen Teilintervallen von (a, b), in den Punkten von P_k, diejenigen einer abzählbaren Menge E_k ausgenommen, eine untere Derivierte $\underline{D}\,\psi_1^{(k)}(x) > -\infty$ hat [2. ausgenommen in abzählbar vielen Punkten ist überall in (a, b) $\underline{D}\,\psi_1(x) > -\infty$]. Ein Paar (B, C) von ergänzenden Eigenschaften soll der Bedingung genügen, daß $\psi_1(x) - \varphi_1(x)$ in (a, b) ***nicht-abnehmend*** ist, wenn nur $\psi_1 \varepsilon U_1[U_1^*]$ die Eigenschaft B und $\varphi_1 \varepsilon O_1[O_1^*]$ die Eigenschaft C hat und außerdem fast überall in (a, b) $\underline{D}\,\psi_1^{(k)}(x) > \overline{D}\,\varphi_1^{(j)}(x)$ [$\underline{D}\,\psi_1(x) \geq \overline{D}\,\varphi_1(x)$] ist. Den in § 5 enthaltenen Satz denke man sich ersetzt durch den Satz: „Ist (B, C) ein Paar von ergänzenden Eigenschaften und gibt es zu der in (a, b) eindeutigen Funktion $f(x)$ eine zur Klasse $U_1(B)$ [$U_1^*(B)$] gehörende Funktion ψ_1 mit $\underline{D}\,\psi_1^{(k)}(x) \geq f(x)$ [mit $\underline{D}\,\psi_1(x) \geqq f(x)$] in fast allen Punkten von (a, b) und eine zur Klasse $O_1(C)$ [$O_1^*(C)$] gehörende Funktion φ_1 mit $\overline{D}\,\varphi_1^{(j)}(x) \leq f(x)$ [mit $\overline{D}\,\varphi_1(x) \leqq f(x)$] fast überall in (a, b), so ist $\psi_1(x) - \varphi_1(x)$ nicht-abnehmend in (a, b)." Und in der Integraldefinition von § 5 lese man ψ_1, φ_1 statt ψ, φ.

Es läßt sich zeigen, *daß* $U_1[U_1^*]$ *und* $O_1[O_1^*]$ *Teilklassen von* $U[U^*]$ *bzw. von* $O[O^*]$ *sind.* (Zum Beweise vergleiche man: Ridder. loc. cit. [11]), S. 140, 141).

Es ist möglich *bei willkürlich positivem* ε *aus jedem unbestimmten Integral im Sinne von* § 5 *durch Addition einer nicht-negativen, nicht-abnehmenden, stetigen Funktion* $\sigma_1(x)$, *deren Werte* $< \varepsilon$ *sind, eine Funktion der Klasse* $U_1[U_1^*]$ *abzuleiten und durch Subtraktion einer Funktion* $\sigma_2(x)$, *welche die gleichen Eigenschaften hat, eine Funktion der Klasse* $O_1[O_1^*]$. (Zum Beweise vergleiche man: Ridder, loc. cit. [5]), S. 266, 267, Fußnote 52a und loc. cit. [11]), S. 141—144; der hier in § 5 bewiesene Satz α soll dabei benutzt werden). Daraus folgt leicht für jede der in Kapitel 2 behandelten (B, C)-Integrationen [$(B, C)^*$-Integrationen], daß es eine ihr äquivalente Definition gibt, wobei die Klasse U, O [U^*, O^*] durch die Klassen U_1, O_1 [U_1^*, O_1^*] ersetzt sind.

Aus den Definitionen der Klassen folgt, daß (a, b) sich überdecken läßt durch eine abzählbare Menge H und abzählbar viele perfekte Teilmengen (P_j), derartig, daß $\psi_1(x)$ unterhalb- und $\varphi_1(x)$ oberhalb totalstetig [$\psi_1(x)$ unterhalb- und $\varphi_1(x)$ oberhalb totalstetig*] ist auf einer jeden der Mengen (P_j). Daraus und aus der Stetigkeit von $\psi_1(x) - \varphi_1(x)$ läßt sich leicht ableiten, daß auch $\psi_1(x)$ und $\varphi_1(x)$ auf jeder Menge P_j stetig sind.

Zu jedem $k = 1, 2, 3, \ldots$ ist die Differenz $\psi_k(x) - \varphi_1(x)$ in (a, b) nicht-abnehmend; somit auch $\psi_k^{(j)}(x) - \varphi_1^{(j)}(x)$, wobei $\psi_k^{(j)}(x)$ und $\varphi_1^{(j)}(x)$ in den Punkten der perfekten Menge P_j mit $\psi_k(x)$ bzw. mit $\varphi_1(x)$ zusammenfallen und sich linear ändern in den zu P_j komplementären, abgeschlossenen Teilintervallen von (a, b). Da $\varphi_1(x)$ auf der Menge P_j oberhalb totalstetig [oberhalb totalstetig*] ist, wird $\varphi_1^{(j)}(x)$ in (a, b) von beschränkter Variation sein; somit auch $\psi_k^{(j)}(x)$ als Summe von $\psi_k^{(j)}(x) - \varphi_1^{(j)}(x)$ und $\varphi_1^{(j)}(x)$. Außerdem ist $\psi_k^{(j)}(x)$ stetig in (a, b), denn $\psi_k(x) - \varphi_1(x)$ und $\varphi_1(x)$ sind beide stetig auf P_j.

Aus der Definition der Klasse U [U^*] folgt, daß $\psi_k^{(j)}(x)$ in (a, b) auf einer jeden von abzählbar vielen perfekten Mengen $M_p^{(k;j)}$, welche (a, b) bis auf eine abzählbare Menge überdecken, unterhalb totalstetig ist. Daraus und aus der Stetigkeit von $\psi_k^{(j)}(x)$ folgt sofort[29]), daß die in (a, b) zu $\psi_k^{(j)}(x)$ gehörende, total-additive Mengenfunktion $\Psi_k^{(j)}(e)$ einen nicht-negativen (total-additiven) singulären Bestandteil hat. Dadurch wird $\psi_k^{(j)}(x)$ in (a, b) unterhalb totalstetig, somit $\psi_k(x)$ auf P_j unterhalb totalstetig sein [sogar unterhalb totalstetig* sein, wie sich ergibt aus der Monotonie von $\psi_k - \varphi_1$ in (a, b) und der Betrachtung der Oszillationen von ψ_k und von der auf P_j oberhalb totalstetigen* Funktion φ_1 in den zu P_j komplementären, abgeschlossenen Teilintervallen von (a, b)].

$J(x) \equiv (BC) \int_a^x f\,dx$ [$J(x) \equiv (BC)^* \int_a^x f\,dx$] muß totalstetig [totalstetig*] sein auf jedem P_j. Sonst existierte für eine dieser Mengen, $P_{j'}$, eine z. B. positive Zahl Δ und eine Folge von Mengen (M_n), welche jede für sich von endlich vielen, nicht übereinander greifenden, abgeschlossenen Intervallen $(a_p^{(n)}, a_{p+1}^{(n)})$ gebildet würden, deren Endpunkte zu P_j gehörten und so daß gleichzeitig

$$(4) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{(p)} [J(a_{p+1}^{(n)}) - J(a_p^{(n)})] = \Delta \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} m(M_n) = 0$$

wäre [und so daß es Punkte $(x_p^{(n)})$ in den zugehörigen Intervallen $(a_p^{(n)}, a_{p+1}^{(n)})$ gäbe, für die gleichzeitig

[29]) Siehe de la Vallée Poussin, l. c. [26]), S. 91; vgl. auch Schlesinger u. Pleßner, Lebesguesche Integrale (1926), S. 162.

(4*) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{(p)} [J(x_p^{(n)}) - J(a_p^{(n)})] = \Delta$ und $\lim\limits_{n\to\infty} m(M_n) = 0$ wäre].

$\varphi_{k'}(x)$ sei eine Funktion der Folge $\{\varphi_k(x)\}$ mit

$$J(b) - [\varphi_{k'}(b) - \varphi_{k'}(a)] < \tfrac{1}{2}\Delta.$$

Da $J(x) - [\varphi_{k'}(x) - \varphi_{k'}(a)]$ eine nicht-abnehmende Funktion ist, wird bei willkürlich, aber fest gewähltem n:

(5) $$\sum_{(p)} [J(a_{p+1}^{(n)}) - J(a_p^{(n)})] - \sum_{(p)} [\varphi_{k'}(a_{p+1}^{(n)}) - \varphi_{k'}(a_p^{(n)})]$$
$$\leqq J(b) - [\varphi_{k'}(b) - \varphi_{k'}(a)] < \tfrac{1}{2}\Delta \text{ sein}$$

[wird bei willkürlich, aber fest gewähltem n:

(5*) $$\sum_{(p)} [J(x_p^{(n)}) - J(a_p^{(n)})] - \sum_{(p)} [\varphi_{k'}(x_p^{(n)}) - \varphi_{k'}(a_p^{(n)})]$$
$$\leqq J(b) - [\varphi_{k'}(b) - \varphi_{k'}(a)] < \tfrac{1}{2}\Delta \text{ sein}]$$

Aus (4) und 5 [aus (4*) und (5*)] folgte

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{(p)} [\varphi_{k'}(a_{p+1}^{(n)}) - \varphi_{k'}(a_p^{(n)})] > \tfrac{1}{2}\Delta$$
$$\left[\limsup_{n\to\infty} \sum_{(p)} [\varphi_{k'}(x_p^{(n)}) - \varphi_{k'}(a_p^{(n)})] > \tfrac{1}{2}\Delta\right]$$

Da $\varphi_{k'}(x)$ oberhalb totalstetig [oberhalb totalstetig*] ist auf $P_{j'}$, gelangen wir zu einem Widerspruch.

Auch ein negativer Wert von Δ ist unmöglich. $J(x)$ wird somit auf jedem P_j totalstetig [totalstetig*] sein; sie gehört in (a, b) zur Klasse K [K*].

Satz β_2. *Das unbestimmte Integral* $(B, C) \int_a^x f(x)\,dx$ [*Das unbestimmte Integral* $(B, C)^* \int_a^x f(x)\,dx$] *hat in fast allen Punkten von* (a, b) *eine approximative Ableitung* [*eine Ableitung*] *gleich* $f(x)$[30]).

Aus der Bedingung α_1, welcher die B- und C-Eigenschaften genügen, und den Sätzen α_2 und β_2 geht unmittelbar hervor:

Das (B, C)*-Integral* [*Das* (B, C)*-Integral] einer Funktion* $f(x)$ *ist immer zu betrachten als ein A-Integral* [*als ein A*-Integral*] *von* $f(x)$, *wobei dann die Eigenschaft A darin besteht, daß es zu jeder Funktion* $F(x)$ *der Klasse* $K(B, C)$ [*der Klasse* $K^*(B, C)$] *eine in* (a, b) *eindeutige Funktion gibt, deren unbestimmtes* (B, C)*-Integral* [(B, C)*-Integral] die eben betrachtete Funktion* $F(x)$ *ist.*

Daraus folgt, daß die in § 1 enthaltenen Sätze I, II, III, V des A-Integrals [des A*-Integrals] sich, in leicht ersichtlicher Weise, auf das (B, C)-Integral [das (B, C)*-Integral] übertragen lassen.

---

[30]) Zum Beweise vergleiche man Ridder, l. c. [15]), S. 5 u. 6; siehe dabei l. c. [5]), S. 245 (Satz XI) [l. c. [5]), S. 252 (Satz XVIII)].

§ 6. Beispiele von B- und C-Eigenschaften und zugehörigen Integrationen.

1. Wie aus dem Beweise des Satzes α_2 hervorgeht, läßt sich bei jeder (B, C)-Integration [bei jeder (B, C)*-Integration] einer für $a \leqq x \leqq b$ eindeutigen Funktion $f(x)$ das Intervall (a, b) überdecken durch eine abzählbare Menge H und abzählbar viele perfekte Teilmengen (P_j), derartig, daß *jede* Funktion ψ der Klasse $U(B)\,[U^*(B)]$, mit $\psi'_{\text{appr}}(x) \geqq f(x)$ in fast allen Punkten von (a, b), auf *jeder* Menge P_j stetig und unterhalb totalstetig [unterhalb totalstetig*] und *jede* Funktion φ der Klasse $O(C)$ $[O^*(C)]$, mit $\varphi'_{\text{appr}}(x) \leqq f(x)$ in fast allen Punkten von (a, b), auf *jeder* Menge P_j stetig und oberhalb totalstetig [oberhalb totalstetig*] ist. Es wird somit bei jeder (B, C)-Integration [bei jeder (B, C)*-Integration] von $f(x)$ notwendig sein, daß die Menge derjenigen Punkte von (a, b), zu deren jeder Umgebung es immer *entweder* eine bei der Integration benutzte Funktion der Klasse $U(B)\,[U^*(B)]$ gibt, welche nicht sowohl stetig wie unterhalb totalstetig [nicht sowohl stetig wie unterhalb totalstetig*] in dieser Umgebung ist, *oder* eine bei der Integration benutzte Funktion der Klasse $O(B)\,[O^*(B)]$, welche nicht sowohl stetig wie oberhalb totalstetig [nicht sowohl stetig wie oberhalb totalstetig*] in dieser Umgebung ist *oder* beides, eine nirgends dichte, abgeschlossene Menge H_f bilden. Es sei darum die Existenz einer derartigen Menge H_f angenommen, welche die (B, C)-Integration [die (B, C)*-Integration] von $f(x)$ möglich machen soll, wenn die Eigenschaften B und C weiter darin existieren, daß jede Funktion der Klasse $U(B)\,[U^*(B)]$ bzw. jede Funktion der Klasse $O(C)\,[O^*(C)]$ *stetig* sei *auf der Menge* H_f und *stetig* sei *in jedem zu* H_f *komplementären, abgeschlossenen Teilintervall von* (a, b).

Die so erhaltene (B, C)*-Integration* [(B, C)*-*Integration*] *ist, für dieselbe Funktion* $f(x)$*, äquivalent mit der in* § 2, 1. *definierten S Y-Integration* [*S Y*-Integration*][31]).

2. Fordern wir als B-Eigenschaft und als C-Eigenschaft τ-*Stetigkeit* der Funktionen der Klasse $U(B)$ $[U^*(B)]$ bzw. der Funktionen der Klasse $O(C)$ $[O^*(C)]$ in jedem Punkte des abgeschlossenen Intervalls (a, b), wobei $1 \geqq \tau > \frac{1}{2}$ (τ entweder fest oder von Punkt zu Punkt veränderlich), *so wird die zugehörige* (B, C)*-Integration* [(B, C)*-*Integration*] *genau ebenso weit führen, wie die* τ*-S-Integration* [*die* τ*-S*-Integration*] in § 2, 2.[32]).

§ 7. Wir fügen, zur Einschränkung der (B, C)-Integration [der (B, C)*-Integration], die beiden Bedingungen hinzu:

---

[31]) Beim Beweise benutze man: Ridder, l. c. [5]), S. 243 (Satz C).

[32]) Siehe Ridder, l. c. [11]), S. 162 (Fußnote 41), 148—154 [S. 162 (Fußnote 41), 138 — 144]; S. Izumi, Proc. Imp. Ac. Japan 9 (1934), S. 57, 58; Kennedy and Pollard, l. c. [13]), S. 443 — 450.

γ_1) Gehören in (a, b) $F_1(x)$ und $F_2(x)$ zu $U(B)[U^*(B)]$, $G_1(x)$ und $G_2(x)$ zu $O(C)[O^*(C)]$, so werden, für jedes Paar von Konstanten C_1, C_2, auch $C_1 \cdot F_1(x) + C_2 \cdot F_2(x)$ zu $U(B)[U^*(B)]$ und $C_1 \cdot G_1(x) + C_2 \cdot G_2(x)$ zu $O(C)[O^*(C)]$ gehören.

δ_1) Die Funktion $F(x) \equiv 0$ hat in (a, b) sowohl die Eigenschaft B wie auch die Eigenschaft C.

Die Funktionen der (am Ende von § 5) eingeführten Klassen $K(B, C)$ $[K^*(B, C)]$ genügen den Bedingungen γ und δ (von § 3), sobald nur die Funktionen der Klassen $U(B)[U^*(B)]$ und $O(C)[O^*(C)]$ den Bedingungen γ_1 und δ_1 genügen.

Daraus folgt sofort, daß das (B, C)-Integral [das $(B, C)^*$-Integral] in diesem Fall auch die Eigenschaften VI, VII und VIII (§ 3) hat.

§ 8. Beispiele von B- und C-Eigenschaften, welche allen Bedingungen $\alpha_1 - \delta_1$ genügen:

1. Betrachtet man nur Funktionen der Klassen $U[U^*]$ und $O[O^*]$, welche in jedem Punkte von (a, b) *approximativ stetig* sind, so ist die zugehörige (B, C)-Integration [$(B, C)^*$-Integration] äquivalent mit der AS-Integration [AS^*-Integration] von § 4, 1.

2. Betrachtet man nur Funktionen jener Klassen, welche in jedem Punkte von (a, b) *stetig* sind, so ist die zugehörige (B, C)-Integration [$(B, C)^*$-Integration] äquivalent mit der S-Integration [S^*-Integration] von § 4, 2.[33]).

3. *$U(B)[U^*(B)]$ enthalte die Funktionen der Klasse $U[U^*]$, deren jede sich im abgeschlossenen Intervall (a, b) betrachten läßt als Ableitung einer (primitiven) Funktion; ebenso enthalte $O(C)[O^*(C)]$ diejenigen Funktionen der Klasse $O[O^*]$, welche in (a, b) Ableitungen sind.* Die Bedingungen $\alpha_1 - \delta_1$ sind erfüllt[34]). Die zugehörige (B, C)-Integration [$(B, C)^*$-Integration] ist äquivalent mit der (PF)-Integration [$(PF)^*$-Integration] von § 4, 3.[35]).

---

[33]) Siehe Ridder, l. c. [5]), S. 251—269.

[34]) Zum Beweise der Bedingung β_1 vergleiche man die in Fußnote 18 gemachten Bemerkungen. Daneben benutze man den Satz: „Jede in (a, b) existierende Ableitung einer stetigen Funktion hat in (a, b) die Eigenschaft von Darboux."

[35]) Der Beweis fordert die Anwendung der Sätze α_2 und β_2 (§ 5) und des Satzes: „Sind die Funktionen der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ im abgeschlossenen Intervall (a, b) differenzierbar und ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ in (a, b) gleichmäßig konvergent, so gilt dasselbe von der gegebenen Reihe, falls diese wenigstens in einem Punkte von (a, b) konvergiert. Sind dann $F(x)$ und $\varphi(x)$ die durch die beiden Reihen dargestellten Funktionen, so ist $F(x)$ in (a, b) differenzierbar und es ist $F'(x) = \varphi(x)$" [siehe z. B. Knopp, Unendliche Reihen (2. Aufl., 1924), S. 343].

4. *$U(B)$ [$U^*(B)$] enthalte die Funktionen der Klasse U [U^*], deren jede sich im abgeschlossenen Intervall (a, b) betrachten läßt als approximative Ableitung (einer primitiven Funktion zweiter Art); ebenso enthalte $O(C)$ [$O^*(C)$] diejenigen Funktionen der Klasse O [O^*], welche in (a, b) approximative Ableitungen sind.* Die Bedingungen $\alpha_1 - \delta_1$ sind erfüllt [36]). Die zugehörige (B, C)-Integration [$(B, C)^*$-Integration] ist äquivalent mit der (PF_2)-Integration [$(PF_2)^*$-Integration] von § 4, 4. [37]).

---

[36]) Zum Beweise von β_1 vergleiche man das in Fußnote 20 gesagte. Daneben benutze man den Satz: „Jede in (a, b) existierende approximative Ableitung einer *stetigen* Funktion hat in (a, b) die Eigenschaft von Darboux [siehe A. Denjoy, Bull. Soc. Math. de Fr. 43, (1915), S. 180].

[37]) Der Beweis fordert die Anwendung der Sätze α_2 und β_2 (§ 5) und des folgenden Satzes: „*Sind die Funktionen der Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x)$ *im abgeschlossenen Intervall* (a, b) *approximativ differenzierbar und ist die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} f'^{(n)}_{\text{appr}}(x)$ *in* (a, b) *gleichmäßig konvergent, so gilt dasselbe von der gegebenen Reihe, falls diese wenigstens in einem Punkte von* (a, b) *konvergiert. Sind dann* $F(x)$ *und* $\varphi(x)$ *die durch die beiden Reihen dargestellten Funktionen, so ist* $F(x)$ *in* (a, b) *approximativ differenzierbar und es ist* $F'_{\text{appr}}(x) = \varphi(x)$.“

Dieser Satz folgt, unter Anwendung gliedweiser β-Integration (§ 4, 1.), aus dem Satze VIII (§ 3) und dem in Fußnote 20 zitierten Satz.

Eine ausführlichere Behandlung von Verblunsky-Integrationen wird man finden in einer Arbeit von S. Izumi, Scì. Rep. Tôhoku Univ. (1) 24 (1935), S. 344—351.

(Eingegangen am 11. November 1935.)

Einige Bedingungen für die Anzahl und die Gradzahlen der Faktoren gewisser ganzzahliger Polynome.

Von

Erik L. Petterson in Stockholm.

In einer früheren Arbeit[1]) habe ich gezeigt, wie man aus den Teilern der konstanten Glieder eines ganzzahligen Polynoms $f(x)$ in gewissen Fällen zu Irreduzibilitätsaussagen über $f(x)$ kommen kann. In der vorliegenden Arbeit stelle ich ähnliche Untersuchungen an, wobei ich die Resultante von $f(x)$ und einem geeigneten ganzzahligen Hilfspolynom $g(x)$ heranziehe. Es ergeben sich dabei einerseits Erweiterungen der Resultate der früheren Arbeit, andererseits Bedingungen für die Gradzahlen der möglichen Faktoren von $f(x)$.

Die Resultante eines normierten ganzzahligen Polynoms $f(x)$ und eines ganzzahligen Polynoms $g(x)$ sei R. Wenn $f(x)$ in zwei Faktoren $A(x)$ und $B(x)$ zerlegbar ist und R_1 und R_2 die Resultanten von $A(x)$ und $g(x)$, bzw. $B(x)$ und $g(x)$ sind, so gilt

$$R = R_1 R_2.$$

Schon die Anzahl echter Faktoren der ganzen Zahl R kann also bisweilen eine Irreduzibilitätsbedingung liefern. Dabei darf diese Anzahl jedoch nicht zu groß sein.

Wie in der zitierten Arbeit ist es nun durch Einführen gewisser gemeinsamer Exponenten modulo einer ganzen Zahl mitunter möglich, wesentlich schärfere Irreduzibilitätsbedingungen abzuleiten, und zwar auch dann, wenn aus der Faktorzerlegung der Resultante R allein nur triviale Bedingungen abgeleitet werden können.

In gewissen Fällen lassen sich gleichzeitig ganze Zahlen angeben, von denen die Gradzahlen der eventuellen Faktoren Vielfache sein müssen. Von besonderer Bedeutung ist es, daß dies auch für solche Faktoren des Polynoms $f(x)$ der Fall ist, deren Resultanten die Werte ± 1 annehmen und also nicht echte Faktoren von R sind.

Im folgenden werde ich diese Zusammenhänge darstellen und als Folgerung einige Irreduzibilitätskriterien anführen.

---

[1]) Irreduzibilitätskriterien als Folgerung einiger Beziehungen zwischen den Faktorzerlegungen eines algebraischen Polynoms und seines konstanten Gliedes. Math. Zeitschr. 40 (1935), S. 194—200.

Es seien $f(x)$ und $g(x)$ normierte ganzzahlige Polynome und R die Resultante von $f(x)$ und $g(x)$. Die Gradzahl von $f(x)$ sei k und die von $g(x)$ sei n. Wenn ξ_ν für $\nu = 1, 2, \ldots, k$ die Wurzeln von $f(x)$ bezeichnen, so hat man also

$$R = \prod_{\nu=1}^{k} g(\xi_\nu).$$

Es sei nun E eine ganze positive Zahl > 1 und $(E, R) = 1$. Dann gibt es einen kleinsten für sämtliche $g(\xi_\nu)$ gemeinsamen Exponenten P' modulo E derart, daß

$$g(\xi_\nu)^{P'} \equiv 1 \pmod{E} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k)$$

ist, d. h.

$$g(\xi_\nu)^{P'} = 1 + E M_\nu(\xi_\nu),$$

wo $M_\nu(\xi_\nu)$ eine ganze algebraische Zahl ist. Alle gemeinsamen Exponenten P sind dann Vielfache von P' und also von der Form

$$P = i P'$$

mit ganzem i. P wird im folgenden einen beliebigen, aber festen gemeinsamen Exponenten bezeichnen.

Wenn $f(x)$ einen Faktor $A_r(x)$ vom Grade r enthält, d. h. wenn

$$f(x) = A_r(x) B(x)$$

ist mit normierten ganzzahligen Polynomen $A_r(x)$ und $B(x)$, und wenn ξ_ν für $\nu = 1, 2, \ldots, r$ die Wurzeln von $A_r(x)$ sind, so ist

$$R_1 = \prod_{\nu=1}^{r} g(\xi_\nu)$$

eine ganze rationale Zahl. Für diese Zahl muß dann gelten

$$R_1 \mid R \quad \text{und} \quad R_1^P \equiv 1 \pmod{E}.$$

Es sei $|R| > 1$ und d_ν bezeichne für $\nu = 1, 2, \ldots, l$ positive oder negative Faktoren von R, die folgende Bedingungen erfüllen:

$$R = \prod_{\nu=1}^{l} d_\nu, \quad |d_\nu| > 1, \quad d_\nu^P \equiv 1 \pmod{E}.$$

Im allgemeinen gibt es mehrere solche Systeme d_ν und l. Der größte Wert von l kann als eine Funktion von E, R und P betrachtet werden. Dieser Maximalwert von l wird darum im folgenden mit $N(E, R, P)$ bezeichnet. Aus folgendem Satz, der eine Zusammenfassung ist, geht die Bedeutung von $N(E, R, P)$ hervor.

Satz 1. *Es seien $f(x)$ und $g(x)$ normierte ganzzahlige Polynome, $f(x)$ vom Grade k und ξ_ν für $\nu = 1, 2, \ldots, k$ seine Wurzeln, R die Resultante der Polynome $f(x)$ und $g(x)$, $|R| > 1$, E eine ganze Zahl > 1, $(E, R) = 1$ und P ein gemeinsamer Exponent modulo E für die Zahlen $g(\xi_\nu)$. Wenn $f(x)$ in N Faktoren mit ganzzahligen Koeffizienten zerlegbar ist und wenn*

die Resultanten von diesen Faktoren und $g(x)$ mit R_λ für $\lambda = 1, 2, \ldots, N$ bezeichnet werden, so gilt

$$R = \prod_{\lambda=1}^{N} R_\lambda, \quad R_\lambda^P \equiv 1 \pmod{E}.$$

Die Anzahl der irreduziblen Faktoren, für deren Wurzeln ξ die Zahlen $g(\xi)$ keine algebraische Einheiten sind, muß kleiner oder gleich $N(E, R, P)$ sein. Wenn $N(E, R, P)$ für irgend eine Zahl E und irgend ein Polynom $g(x)$ den Wert 1 annimmt, so ist das Vorkommen wenigstens einer algebraischen Einheit unter den Zahlen $g(\xi_\nu)$ für $\nu = 1, 2, \ldots, k$ eine notwendige Bedingung dafür, daß $f(x)$ reduzibel ist.

Es ist leicht, Polynome zu konstruieren, für welche die Anzahl der Faktoren mit keinem $g(\xi)$ als algebraische Einheit sogar den Wert $N(E, R, P)$ annimmt. Wenn $N(E, R, P) = 1$ ist und wenn kein $g(\xi_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ algebraische Einheit ist, so ist $f(x)$ im obigen Satz irreduzibel. Diese Bedingung, daß kein $g(\xi_\nu)$ algebraisch Einheit ist, ist z. B. unmittelbar erfüllt, wenn sämtliche $g(\xi_\nu)$ außerhalb des Einheitskreises liegen, oder wenn $f(x)$ von $g(x)$ so abhängt, daß

$$f(x) \equiv g(x)^m \pmod{e}$$

ist, wo e und m ganze Zahlen sind und $e > 1$ ist.

Im folgenden soll ein Polynom $f(x)$ untersucht werden, das von einem Polynom $g(x)$ folgendermaßen abhängt:

$$f(x) = F(g(x)) + E\,M(x).$$

Dabei soll $F(x)$ ein normiertes ganzzahliges Polynom des Grades m sein und $M(x)$ ein ganzzahliges Polynom, dessen Gradzahl kleiner ist als die Gradzahl des Polynoms $F(g(x))$ in x. Im übrigen sollen die Voraussetzungen des vorigen Satzes gelten.

Wenn die Wurzeln von $g(x)$ mit η_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ bezeichnet werden, so findet man

$$R = \prod_{\nu=1}^{m\,n} g(\xi_\nu) = (-1)^{m\,n\,n} \prod_{\nu=1}^{n} f(\eta_\nu) = (-1)^{m\,n} \prod_{\nu=1}^{n} (F(0) + E\,M(\eta_\nu)),$$

also

$$R = (-1)^{m\,n} \prod_{\nu=1}^{n} (F(0) + E\,M(\eta_\nu)).$$

Die Voraussetzung $(E, R) = 1$ des vorigen Satzes kann also durch

$$(E, F(0)) = 1$$

ersetzt werden.

Aus $f(\xi_\nu) = 0$ folgt

$$F(g(\xi_\nu)) + E\,M(\xi_\nu) = 0$$

und folglich

$$F(g(\xi_\nu)) \equiv 0 \pmod{E}.$$

Der gemeinsame Exponent P der Kongruenzen

$$g(\xi_\nu)^P \equiv 1 \pmod{E} \qquad \nu = 1, 2, \ldots, mn$$

hängt also nur von E und $F(x)$ ab. Einen solchen Exponenten P werde ich einen E-Exponenten von $F(x)$ nennen. Aus Satz 1 erhält man nun

Satz 2. *Es sei $f(x)$ ein normiertes ganzzahliges Polynom von der Form*

$$f(x) = F(g(x)) + EM(x),$$

wo $g(x)$, $F(x)$ und $M(x)$ ganzzahlige Polynome und $g(x)$ und $F(x)$ außerdem normiert und von den Graden n und m sind. Es sei ferner $f(\xi_\nu) = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, mn)$, $g(\eta_\nu) = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, E eine ganze Zahl > 1, $(E, F(0)) = 1$ und P ein E-Exponent von $F(x)$. Wenn es dann keinen echten positiven oder negativen Faktor d der Resultante

$$R = (-1)^{mn} \prod_{\nu=1}^{n} (F(0) + EM(\eta_\nu))$$

der Polynome $g(x)$ und $F(0) + EM(x)$ mit der Eigenschaft

$$d^P \equiv 1 \pmod{E}$$

gibt, so kann $f(x)$ nur dann reduzibel sein, wenn unter den Zahlen $g(\xi_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, mn)$ wenigstens eine algebraische Einheit vorkommt. Wenn also zum Beispiel

$$f(x) \equiv g(x)^m \pmod{e}$$

gilt, wo e eine ganze Zahl > 1 ist, so muß $f(x)$ irreduzibel sein.

Ich werde einige Beispiele geben. Wenn

$$F(x) = x^m + a$$

ist, so ist es leicht, für den E-Exponenten P einen möglichst kleinen Wert zu bestimmen. Es sei nämlich

$$(-a)^v \equiv 1 \pmod{E}$$

mit v als Minimalexponent. Aus

$$f(x) = F(g(x)) + EM(x)$$

folgt dann

$$g(\xi_\nu)^m \equiv -a \pmod{E}$$

und also

$$g(\xi_\nu)^{mv} \equiv (-a)^v \equiv 1 \pmod{E} \qquad \nu = 1, 2, \ldots, mn.$$

Man kann folglich setzen

$$P = mv.$$

Wenn $M(x) = bx$, aber $F(x)$ beliebig ist, so findet man (b soll selbstverständlich eine ganze Zahl sein):

$$R = (-1)^{mn} \prod_{\nu=1}^{n} (F(0) + Eb\eta_\nu) = (-1)^{mn} (-1)^n (Eb)^n \prod_{\nu=1}^{n} \left(\frac{-F(0)}{Eb} - \eta_\nu\right)$$

und demnach

$$R = (-1)^{n(m+1)} (Eb)^n g\left(\frac{-F(0)}{Eb}\right).$$

Es werde nun gleichzeitig angesetzt:

$$F(x) = x^m + a, \quad M(x) = bx,$$

d. h.

$$f(x) = g(x)^m + a + Ebx.$$

Man hat dann

$$(-a)^v \equiv 1 \pmod{E}, \quad P = mv, \quad R = (-1)^{n(m+1)} (Eb)^n g\left(\frac{-a}{Eb}\right).$$

Wenn dieses R keinen echten Faktor d mit der Eigenschaft $d^{mv} \equiv 1 \pmod{E}$ enthält und wenn gleichzeitig $(a, b) = e > 1$ ist, so muß also nach Satz 2 das Polynom

$$f(x) = g(x)^m + a + Ebx$$

irreduzibel sein.

Für $F(x) = x^m - 36$, $g(x) = x^2 - x - 5$, $M(x) = 2x$ und $E = 7$ findet man $P = m$, $R = -188 = -2 \cdot 2 \cdot 47$, und es folgt demnach, daß das Polynom

$$f(x) = (x^2 - x - 5)^m + 14x - 36$$

für alle nicht durch 3 teilbaren m sicher irreduzibel ist.

Ein nach Satz 1 oder 2 irreduzibles Polynom ist nicht notwendig irreduzibel modulo E. Zum Beispiel ist das obige Polynom

$$f(x) = (x^2 - x - 5)^m + 14x - 36$$

($E = 7$) sicher irreduzibel für $3 \nmid m$. Wenn aber m gleichzeitig gerade ist, so gilt

$$f(x) \equiv (x^2 - x - 5)^m - 36 = \left((x^2 - x - 5)^{\frac{m}{2}} - 6\right)\left((x^2 - x - 5)^{\frac{m}{2}} + 6\right) \pmod{7}.$$

Es ist also reduzibel modulo 7. Die Irreduzibilitätsbedingungen der Sätze 1 und 2 sind also von diesem Gesichtspunkte aus nicht überbestimmt.

Es soll ein allgemeines Beispiel gegeben werden. Um direkt schließen zu können, daß keine $g(\xi_\nu)$ algebraische Einheiten sind, gebe ich dem Polynom $f(x)$ die Form

$$f(x) = g(x)^m + q^v (Eb'x - a'),$$

wo q eine Primzahl und $v > 0$ ist. Für die Resultante R von $f(x)$ und $g(x)$ erhält man dann:

$$R = (-1)^{n(m+1)} q^{nv} (Eb')^n g\left(\frac{a'}{Eb'}\right).$$

Es sei $(q^v a')^s \equiv 1 \pmod{E}$, $(a', b') = 1$ und

$$g(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n.$$

Die ganzen Koeffizienten c können derart bestimmt werden, daß der Faktor $(E\,b')^n\,g\left(\frac{a'}{E\,b'}\right)$ von R einen beliebigen ganzzahligen Wert annimmt. Ich wähle hier

$$(E\,b')^n\,g\left(\frac{a'}{E\,b'}\right) = q_1,$$

wo q_1 eine Primzahl ist. Man bekommt dann

$$R = (-1)^{n(m+1)}\,q^{nv}\,q_1.$$

Folglich muß dieses $f(x)$ irreduzibel sein, wenn $(\pm q^\nu)^{ms} \not\equiv 1 \pmod{E}$ ist für alle $\nu = 1, 2, \ldots, nv - 1$.

Es sei $E = 11$ [3]), $q = 2$, $v = 2$, $a' = -8$, $b' = 1$ und $n = 2$. Es folgt also $s = 1$ und $R = 16\,(64 - 88\,c_1 + 121\,c_2)$. Das Polynom

$$f(x) = (x^2 + c_1\,x + c_2)^m + 4\,(11\,x + 8)$$

ist demnach sicher irreduzibel, wenn $5 \nmid m$ und $64 - 88\,c_1 + 121\,c_2$ eine Primzahl ist.

In den bisherigen Sätzen wurde nur eine Beschränkung der Anzahl eventueller Faktoren eines Polynoms behandelt, und daraus wurden Irreduzibilitätsbedingungen abgeleitet. Es ist aber zuweilen möglich, den Satz 1 und damit den Satz 2 so zu verschärfen, daß auch die Gradzahlen der eventuellen Faktoren abgeschätzt werden können.

Die Kongruenz

$$g(\xi_\nu)^P \equiv 1 \pmod{E}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, k$$

soll dabei durch die allgemeinere Kongruenz

$$g(\xi_\nu)^Q \equiv a \pmod{E}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, k$$

mit ganzen Q und a ersetzt werden. (Doch kann es dann sein, daß es kein a mit $a \not\equiv 1 \pmod{E}$ gibt. Für $a \equiv 1 \pmod{E}$ hat man $Q = P$.)

Wenn $f(x)$ einen Faktor vom Grade r enthält, und wenn ξ_ν für $\nu = 1, 2, \ldots, r$ die Wurzeln dieses Faktors sind, so folgt

$$\left(\prod_{\nu=1}^{r} g(\xi_\nu)\right)^Q \equiv a^r \pmod{E}.$$

Ist dann $f(x)$ in N Faktoren zerlegbar, so muß also unter den Voraussetzungen des Satzes 1 gelten:

$$R = \prod_{\nu=1}^{N} R_\nu; \quad R_\nu^Q \equiv a^{r_\nu} \pmod{E}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, N.$$

Wie in Satz 1 läßt sich hier für N eine Beschränkung, die zuweilen besser ist, ableiten. Außerdem ergeben sich aber hier Bedingungen für die Gradzahlen r_ν der eventuellen Faktoren von $f(x)$.

---

[3]) E braucht aber nicht notwendig eine Primzahl zu sein.

Hierfür sollen nur einige speziellere Beispiele angegeben werden.

Für ein Polynom

$$f(x) = F(g(x)) + E\,h(x)\,g(x)$$

mit ganzzahligem Polynom $h(x)$ findet man $R = (-1)^{mn} F(0)^n$.

Als $F(x)$ soll folgendes Polynom eingeführt werden:

$$F(x) = x^m \pm q^v,$$

wo v eine ganze Zahl $\geqq 1$ und q eine Primzahl mit $q \nmid E$ ist. Es folgt dann

$$F(0) = \pm q^v,$$

$$f(x) = g(x)^m - \varepsilon q^v + E\,h(x)\,g(x)$$

und

$$R = \prod_{\nu=1}^{mn} g(\xi_\nu) = \pm q^{vn}.$$

Dabei soll $\varepsilon = \pm 1$ sein. Es sei $A_r(x)$ ein Faktor des Grades r von $f(x)$ und ξ_ν für $\nu = 1, 2, \ldots, r$ die Wurzeln von $A_r(x)$. Die Resultante von $A_r(x)$ und $g(x)$ ist also

$$R_1 = \prod_{\nu=1}^{r} g(\xi_\nu).$$

Aus $R_1 \mid R$ folgt

$$R_1 = \pm q^u, \quad 0 \leqq u \leqq vn.$$

Nach der Voraussetzung

$$f(x) = g(x)^m - \varepsilon q^v + E\,h(x)\,g(x)$$

muß gelten

$$g(\xi_\nu)^m \equiv \varepsilon q^v \pmod{E}$$

und folglich

$$R_1^m = \prod_{\nu=1}^{r} g(\xi_\nu)^m \equiv \varepsilon^r q^{rv} \pmod{E}.$$

Man hat also

$$(\pm q^u)^m \equiv \varepsilon^r q^{rv} \pmod{E}.$$

Immer gilt demnach

$$q^{2um} \equiv q^{2rv} \pmod{E}.$$

Wenn nun

$$q^s \equiv 1 \pmod{E}$$

mit s als Minimalexponent vorausgesetzt wird, so erhält man mit Rücksicht auf $R = \pm q^{vn}$ folgende Beziehung:

$$u\,2m \equiv r\,2v \pmod{s}\ ^{3})$$

und daraus

$$u = \alpha' \frac{(2v, s)}{(2m, 2v, s)}, \quad 0 \leqq \alpha' \leqq \frac{(2m, 2v, s)\,vn}{(2v, s)}$$

---

[3]) Da u und r beschränkt sind, so muß für hinreichend großes s also sogar $um = rv$ gelten.

und

$$r = \beta' \frac{(2m, s)}{(2m, 2v, s)}, \quad 1 \leqq \beta' \leqq \frac{(2m, 2v, s)\, mn}{(2m, s)},$$

wo α' und β' ganze Zahlen sind.

Für $2 \mid m$ und $\varepsilon = 1$ muß aus der Relation

$$(\pm q^u)^m \equiv \varepsilon^r q^{rv} \pmod{E}$$

folgen

$$q^{um} \equiv q^{rv} \pmod{E}.$$

Hieraus ergibt sich

$$um \equiv rv \pmod{s}$$

und also

$$u = \alpha'' \frac{(v, s)}{(m, v, s)}, \quad \alpha'' \geqq 0$$

und

$$r = \beta'' \frac{(m, s)}{(m, v, s)}, \quad \beta'' \geqq 1$$

mit ganzen α'' und β''.

Nach der Relation, in der α' vorkommt, findet man:

$$u = \alpha v, \quad 0 \leqq \alpha \leqq n$$

für

$$v \mid s, \quad (2m, v) = 1$$

oder für

$$2v \mid s, \quad (m, v) = 1.$$

Aus

$$u = \alpha'' \frac{(v, s)}{(m, v, s)} \quad \text{mit} \quad 2 \mid m$$

können hier keine schärferen Bedingungen abgeleitet werden.

Nach den Relationen, in denen β' und β'' vorkommen, findet man in ähnlicher Weise:

$$r = \beta m, \quad 1 \leqq \beta \leqq n$$

für

$$m \mid s, \quad (m, 2v) = 1$$

oder

$$2m \mid s, \quad (m, v) = 1$$

oder

$$m \mid s; \quad \varepsilon = 1, \quad 2 \mid m, \quad (m, v) = 1.$$

Wenn unter den Zahlen $g(\xi_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, mn)$ wenigstens eine algebraische Einheit vorkommt, so muß die Resultante R_1 des zugehörigen Faktors den Wert

$$R_1 = \pm 1$$

annehmen und folglich $u = 0$ sein. Aus der Kongruenz

$$(\pm q^u)^m \equiv \varepsilon^r q^{rv} \pmod{E}$$

folgt dann, und auch wenn allgemeiner $q^u \equiv \pm 1 \pmod{E}$ ist, die Kongruenz

$$q^{rv} \equiv \varepsilon^r (\pm 1)^m \pmod{E}.$$

Es muß dann immer gelten:

$$q^{2rv} \equiv 1 \pmod{E}$$

und also

$$s \mid 2rv,$$

d. h.

$$r = \gamma' \frac{s}{(2v, s)}, \quad \gamma' \geqq 1,$$

wo γ' ganz ist.

Für $\varepsilon = 1$ und $2 \mid m$ erhält man sogar

$$q^{rv} \equiv 1 \pmod{E}$$

und demnach

$$s \mid rv,$$

d. h.

$$r = \gamma'' \frac{s}{(v, s)}, \quad \gamma'' \geqq 1.$$

Es ist also unter anderem möglich, die Zahl $\frac{s}{(2v, s)}$ bzw. $\frac{s}{(v, s)}$ so groß zu bestimmen, daß unter den Zahlen $g(\xi_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, mn)$ keine algebraischen Einheiten vorkommen können.

Aus der Relation $(\pm q^v)^m \equiv \varepsilon^r q^{rv} \pmod{E}$ ist es zuweilen möglich, eine noch schärfere Beschränkung für u abzuleiten.

Es sei

$$2 \mid m, \varepsilon = -1, 2 \Big| \frac{s}{(v, s)}, 4 \nmid \frac{s}{(v, s)} \text{ und } q^{\frac{s}{2}} \equiv -1 \pmod{E}.$$

Man findet dann zunächst

$$q^{um} \equiv (-1)^r q^{rv} \pmod{E}$$

und also

$$q^{\frac{ums}{2(v, s)}} \equiv (-1)^{\frac{rs}{2(v, s)}} q^{\frac{rvs}{2(v, s)}} = (-1)^r \left(q^{\frac{s}{2}}\right)^{\frac{rv}{(v, s)}} \equiv (-1)^r (-1)^{\frac{rv}{(v, s)}} =$$

$$= (-1)^{r\left(1 + \frac{v}{(v, s)}\right)} \pmod{E}.$$

Wegen der Voraussetzung $2 \Big| \frac{s}{(v, s)}$ gilt, wenn $2^\nu \mid s$ aber $2^{\nu+1} \nmid s$ $(\nu \geqq 1)$ ist, die Beziehung

$$2^\nu \nmid v.$$

Es folgt daraus

$$2 \nmid \frac{v}{(v, s)}$$

und also

$$(-1)^{r\left(1 + \frac{v}{(v, s)}\right)} = 1$$

und

$$q^{\frac{u\,m\,s}{2\,(v,\,s)}} \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, E).$$

Da $q \bmod E$ zu s gehört, muß dann der Reihe nach folgen:

$$s \,\Big|\, \frac{u\,m\,s}{2\,(v,\,s)}, \quad (v,\,s) \,\Big|\, \frac{u\,m}{2}, \frac{(v,\,s)}{\left(\frac{m}{2}, v, s\right)} \,\Big|\, u,$$

d. h.

$$u = \alpha''' \frac{(v,\,s)}{\left(\frac{m}{2}, v, s\right)},$$

$\alpha''' \geqq 0$ mit ganzem α'''. Es ist demnach abgeleitet:

$$u = \alpha v, \quad 0 \leqq \alpha \leqq n$$

für

$$\varepsilon = -1, \quad q^{\frac{s}{2}} \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, E), \quad 2 \,|\, m, \quad 2v \,|\, s, \quad \left(\frac{m}{2}, v\right) = 1, \quad 4 \nmid \frac{s}{v}.$$

Es soll nun zuerst folgende Zusammenfassung gegeben werden, wobei sämtliche Zahlen α, β und γ wie früher selbstverständlich ganze Zahlen sind.

Satz 3. *Es sei $f(x)$ ein Polynom von der Form*

$$f(x) = g(x)^m + E\,h(x)\,g(x) \pm q^v,$$

wo $g(x)$ vom Grade n ist. Für die Primzahl q wird $q^s \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, E)$ mit s als Minimalexponent vorausgesetzt. Es sei $f(x)$ in N Faktoren der Graden $r_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, N)$ zerlegbar. Die Resultanten R_ν, die diese Faktoren mit $g(x)$ bilden, müssen von der Form

$$R_\nu = \pm q^{u_\nu} (u_\nu \geqq 0), \quad \nu = 1, 2, \ldots, N$$

sein. Für diese u_ν gilt immer

$$\sum_{\nu=1}^{N} u_\nu = v\,n, \quad u_\nu = \alpha'_\nu \frac{(2\,v,\,s)}{(2\,m,\,2\,v,\,s)}, \quad \alpha'_\nu \geqq 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, N.$$

Wenn $2 \,|\, m$, $\pm q^v = -q^v$ ist, so besteht sogar die Beziehung

$$u_\nu = \alpha''_\nu \frac{(v,\,s)}{(m,\,v,\,s)}, \quad \alpha''_\nu \geqq 0, \; \nu = 1, 2, \ldots, N,$$

und wenn

$$2 \,|\, m, \quad \pm q^v = +q^v, \quad 2 \,\Big|\, \frac{s}{(v,\,s)}, \quad 4 \nmid \frac{s}{(v,\,s)} \text{ und } q^{\frac{s}{2}} \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, E),$$

so gilt sogar

$$u_\nu = \alpha'''_\nu \frac{(v,\,s)}{\left(\frac{m}{2}, v, s\right)}, \quad \alpha'''_\nu \geqq 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, N.$$

Für die Gradzahlen r_ν der Faktoren von $f(x)$ gilt immer

$$r_\nu = \beta'_\nu \frac{(2\,m,\,s)}{(2\,m,\,2\,v,\,s)}, \quad \beta'_\nu \geqq 1, \quad \nu = 1, 2, \ldots, N,$$

und wenn $2 \mid m$ *und* $\pm q^v = -q^v$ *ist, sogar*

$$r_\nu = \beta''_\nu \frac{(m, s)}{(m, v, s)}, \quad \beta''_\nu > 1, \quad \nu = 1, 2, \ldots, N.$$

Wenn eine Zahl $u_\lambda = 0$ *ist* $(1 \leqq \lambda \leqq N)$, *oder allgemeiner, wenn* $q^{u_\lambda} \equiv \pm 1 \pmod{E}$ *ist, so muß für die Gradzahl* r_λ *des zugehörigen Faktors immer gelten:*

$$r_\lambda = \gamma'_\lambda \frac{s}{(2v, s)}, \quad \gamma'_\lambda \geqq 1$$

und wenn außerdem $2 \mid m$ *und* $\pm q^v = -q^v$ *ist, sogar*

$$r_\lambda = \gamma''_\lambda \frac{s}{(v, s)}, \quad \gamma''_\lambda \geqq 1.$$

Es wird $g(x) = x$ vorausgesetzt. Das Polynom $f(x)$ erhält dann folgende Form:

$$f(x) = x^m + E h(x) x \pm q^v,$$

für welche es als Folgerung der bewiesenen Relationen $u = \alpha v$ und $r = \beta m$ (S. 207 und 209) nun möglich ist, Irreduzibilitätskriterien abzuleiten. Sie können folgendermaßen zusammengefaßt werden. Wenn dabei $h(x) = q h_1(x)$ vorausgesetzt wird, soll natürlich auch $h_1(x)$ ein ganzzahliges Polynom sein. Die Beziehung $v \mid s$ ist in Satz 4 und 5 durch $s = tv$ mit ganzem t ersetzt.

Satz 4. a) *Es sei* $q^{tv} \equiv 1 \pmod{E}$ *mit* tv *als Minimalexponent und* 1. $(2m, v) = 1$ *oder* 2. $(m, v) = 1$, $2 \mid t$.

Dann gilt:
Das Polynom

$$f(x) = x^m + E h(x) x \pm q^v$$

ist für jeden Fall mit beiden Vorzeichen von q^v *dann und nur dann reduzibel, wenn es unter den Wurzeln von* $f(x)$ *wenigstens eine algebraische Einheit gibt. Das Polynom*

$$f(x) = x^m + E q h_1(x) x \pm q^v$$

ist für jeden Fall mit beiden Vorzeichen von q^v *irreduzibel.*

b) *Es sei* $q^{tv} \equiv 1 \pmod{E}$ *mit* tv *als Minimalexponent,* $q^{\frac{tv}{2}} \equiv -1 \pmod{E}$ [4]), $2 \mid m$, $2 \mid t$, $\left(\frac{m}{2}, v\right) = 1$, $4 \nmid t$.

Dann gilt:
Das Polynom

$$f(x) = x^m + E h(x) x + q^v$$

---

[4]) Wenn E eine Primzahl ist, so ist $q^{\frac{tv}{2}} \equiv -1 \pmod{E}$ eine Folgerung von $q^{tv} \equiv 1 \pmod{E}$ und also als Voraussetzung unnötig.

ist dann und nur dann reduzibel, wenn es unter den Wurzeln von $f(x)$ *wenigstens eine algebraische Einheit gibt. Das Polynom*

$$f(x) = x^m + E q h_1(x) x + q^v$$

ist irreduzibel.

Satz 3a in meinem früheren Aufsatz ist mit dem obigen Satz 4a identisch bis darauf, daß die Primzahl p hier durch die allgemeine Zahl E ersetzt ist. Der Satz 3b des früheren Aufsatzes aber ist in dem obigen Satz 4b auch derart verbessert, daß man hier Irreduzibilität auch für $2 \nmid v$ erhält.

Aus Satz 3 folgt noch:

Satz 5. *Sämtliche solche irreduziblen Faktoren von* $f(x)$ *in Satz* 4, *deren Wurzeln algebraische Einheiten sind, können nur solche Gradzahlen haben, die Vielfache von* $\frac{t}{(2, t)}$ *sind. Wenn* $2 \mid m$ *und* $f(0) = -q^v$ *ist, so müssen diese Gradzahlen immer Vielfache sogar von* t *sein. Wenn*

$$\frac{t}{(2, t)} \geqq m, \quad \text{bzw.} \quad t \geqq m$$

ist, so gibt es also keine Faktoren mit algebraischen Einheiten als Wurzeln.

Satz 6. *Es sei* $q^s \equiv 1 \pmod{E}$ *mit* s *als Minimalexponent und* $1.\, m \mid s$, $(m, 2v) = 1$ *oder* $2.\, 2m \mid s$, $(m, v) = 1$ *oder* $3.\, f(0) = -q^v$, $2 \mid m$, $m \mid s$, $(m, v) = 1$.

Dann gilt:

Das Polynom

$$f(x) = x^m + E h(x) x \pm q^v$$

ist für jeden Fall 1., 2. *und* 3. *irreduzibel.*

Bemerkung. In mehreren Sätzen dieser Arbeit kommen Voraussetzungen über algebraische Einheiten als Wurzeln vor. Es ist dann zu bemerken, daß das Vorkommen algebraischer Einheiten unter den Wurzeln von $f(x)$ mit dem Vorkommen wenigstens eines Faktors in $f(x)$ mit dem konstanten Glied ± 1 gleichbedeutend ist.

Zuletzt soll folgendes betreffs eines Satzes von Perron[5]) angeführt werden. Dieser Satz folgt auch aus den späteren Untersuchungen über Irreduzibilität, die Ore in „Skr. norske Vid.-Akad., Oslo 1923" veröffentlicht hat, nämlich für den Fall, daß das Newtonsche Polygon eine Gerade ohne Gitterpunkte ist.

Es sei

$$f(x) = x^m + E q h(x) x - q^v q_1^t,$$

wo q_1 eine Primzahl $q_1 \nmid q$ und das dem q_1 entsprechende Newtonsche Polygon eine Gerade ohne Gitterpunkte ist. Wenn k die Anzahl der

[5]) Math. Annalen 60 (1905) S. 448—458.

aufeinanderfolgenden und durch q_1 teilbaren Koeffizienten von $f(x)$ von dem konstanten Glied an gerechnet ist, so muß $f(x)$ nach dem Satz von Perron oder Ore wenigstens einen irreduziblen Faktor vom Grade $\geqq k$ enthalten. Irreduzibilität folgt also nur für $k = m$. Der Fall $k = 1$ gibt überhaupt keine Irreduzibilitätsbedingungen. Aus dem Beweis dieses Satzes wird leicht abgeleitet, daß das konstante Glied des genannten Faktors durch q_1^t teilbar sein muß. Die gleichzeitige Anwendung meiner Resultantenmethode z. B. auf das obengenannte Polynom gibt dann Irreduzibilität auch für $1 \leqq k < m$. Man erhält folgenden Satz:

Satz 7. *Es sei* $f(x) = x^m + E\,q\,h(x)\,x - q^v q_1^t$, *wo* q_1 *und* q *Primzahlen sind,* $v > 0$, $t > 0$ *und das Newtonsche Polygon für* q_1 *eine Gerade ohne Gitterpunkte ist. Wenn dann*

$$(q^v q_1^t)^s \equiv 1 \pmod{E}, \quad \textit{aber} \quad q^{v\,2\,m\,s} \not\equiv 1 \pmod{E}$$

ist, für alle $v = 1, 2, \ldots, v - 1$, *so ist* $f(x)$ *irreduzibel.*

(Eingegangen am 1. August 1935.)

Hauptidealzerlegung in Polynomringen.

Von

Wolfgang Krull in Erlangen.

Bekanntlich läßt sich jedes Polynom in endlich vielen Variabeln $x_1, \ldots, x_n$ mit ganzen rationalen Koeffizienten (bis auf die Vorzeichen) eindeutig als Produkt einer ganzen Zahl und endlich vieler irreduzibler „primitiver" Polynome darstellen, $a(x) = c \cdot \prod_1^r p_i(x)$; dabei sind die $p_i(x)$ auch im Ring der Polynome mit beliebigen rationalen Koeffizienten irreduzibel, der Unterschied zwischen der „ganzen" und der „rationalen" Zerlegung von $a(x)$ besteht allein darin, daß der Zahlfaktor c das eine Mal wesentlich ist, das andere Mal nicht. — Dieser elementare Satz bleibt in geeigneter idealtheoretischer Einkleidung auch dann noch gültig, wenn man den Koeffizientenring der ganzen rationalen Zahlen durch einen beliebigen „Multiplikationsring" ersetzt. Dabei kann der Begriff des Multiplikationsrings so allgemein gefaßt werden, daß er bei gewöhnlichen Dedekindschen Idealen alle ganz abgeschlossenen Ringe aus algebraischen Zahlen, bei „v-Idealen" im Sinne von van der Waerden und Artin sogar alle ganz abgeschlossenen Ringe aus ganzen algebraischen Funktionen beliebig vieler Veränderlicher mit einschließt[1]).

1. Gewöhnliche Ideale. Es sei $\mathfrak{M}$ ein Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$, $\widetilde{\mathfrak{K}}$ sei eine rein transzendente Körpererweiterung von $\mathfrak{K}$ durch eine Variabelnmenge $x_1, x_2, \ldots$ von beliebiger Mächtigkeit, $\widetilde{\mathfrak{M}}$ bzw. $\widetilde{\mathfrak{P}}$ bedeute den Polynomring in $x_1, x_2, \ldots$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{K}$. Mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ bzw. $\tilde{\mathfrak{a}}, \tilde{\mathfrak{b}}, \ldots$ bezeichnen wir die $\mathfrak{M}$-Ideale aus $\mathfrak{K}$ bzw. die $\widetilde{\mathfrak{M}}$-Ideale aus $\widetilde{\mathfrak{K}}$. Dabei lassen wir auch „nichtganze" (also nicht in $\mathfrak{M}$ bzw. $\widetilde{\mathfrak{M}}$ liegende) Ideale zu. Doch beschränken wir uns in $\widetilde{\mathfrak{K}}$ auf solche Ideale $\tilde{\mathfrak{a}}$, die nur aus Polynomen bestehen, also Untermengen von $\widetilde{\mathfrak{P}}$ sind. — Ein Ideal $\mathfrak{a}$ heißt wie üblich „*umkehrbar*", wenn das reziproke Ideal $\mathfrak{a}^{-1}$ der Gleichung $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{M}$ genügt. Nach einem bekannten Satz[2]) ist jedes umkehrbare Ideal „*endlich*", d. h. es

[1]) Der Begriff des „Multiplikationsringes", wie wir ihn im Text benutzen werden, ist aus der Arbeit: *Untersuchungen über Teilbarkeitseigenschaften in Körpern* [J. f. Math. 168 (1932), S. 1—36] von H. Prüfer herauspräpariert; Prüfers „Ringe mit der Eigenschaft B" sind unsere „Multiplikationsringe". Auch sonst ist die Prüfersche Arbeit, die kurz mit „Prüfer" zitiert werden soll, für die vorliegende Note vorbildlich gewesen.

[2]) W. Krull: Ein Hauptsatz über umkehrbare Ideale, Math. Zeitschr. 31 (1930), S. 558.

hat eine endliche Basis. Es erscheint daher angebracht, abweichend von der früher üblichen Ausdrucksweise $\mathfrak{M}$ schon dann als *„Multiplikationsring"* zu bezeichnen, wenn jedes endliche $\mathfrak{M}$-Ideal umkehrbar ist, auch wenn daneben nichtendliche (und infolgedessen selbstverständlich nichtumkehrbare) $\mathfrak{M}$-Ideale existieren sollten. — In diesem Sinne soll von jetzt ab $\mathfrak{M}$ als Multiplikationsring angenommen werden.

Unter dem *„Inhalt"* des Ideals $\tilde{\mathfrak{a}}$ verstehen wir das aus den Koeffizienten aller zu $\tilde{\mathfrak{a}}$ gehörigen Polynome gebildete Ideal $\mathfrak{a}$. Ist

$$\tilde{\mathfrak{a}} = (a_1(x), \ldots a_r(x)),$$

so bildet die Menge aller Koeffizienten von $a_1(x), \ldots, a_r(x)$ eine Basis von $\mathfrak{a}$, ein endliches $\tilde{\mathfrak{a}}$ hat also stets einen endlichen Inhalt $\mathfrak{a}$.

Satz 1. (Inhaltssatz). *Sind* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ *die Inhalte von* $\tilde{\mathfrak{a}}, \tilde{\mathfrak{b}}, \tilde{\mathfrak{c}} = \tilde{\mathfrak{a}} \cdot \tilde{\mathfrak{b}}$, *so ist stets* $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$.

Aus der Definition der Idealmultiplikation folgt mühelos, daß die Behauptung nur für den Fall dreier Hauptideale $\tilde{\mathfrak{a}} = (a(x))$, $\tilde{\mathfrak{b}} = (b(x))$, $\tilde{\mathfrak{c}} = (a(x) \cdot b(x))$ bewiesen zu werden braucht. Dann aber wird nach einem Dedekind-Mertensschen Hilfssatz für großes ϱ sicher $\mathfrak{a}^{\varrho+1} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a}^{\varrho} \cdot \mathfrak{c}$, und durch Multiplikation mit $(\mathfrak{a}^{-1})^{\varrho}$ ergibt sich

$$(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1})^{\varrho} \cdot \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1})^{\varrho} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{M}^{\varrho} \cdot \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{M}^{\varrho} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{c}^{3}).$$

Nennt man ein Ideal $\tilde{\mathfrak{a}}$ mit dem Inhalt $\mathfrak{M}$ *„primitiv"*, so ergibt sich insbesondere: *Das Produkt zweier primitiver Ideale ist stets selbst primitiv.* Wir definieren weiter: $\tilde{\mathfrak{a}}$ heißt *„Quasihauptideal"*, wenn $\tilde{\mathfrak{a}}$ Produkt eines Ideales $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{M}$ mit einem Hauptideal $\tilde{\mathfrak{h}} = (a(x))$ aus $\mathfrak{M}$ ist: $\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \cdot \tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{a} \cdot (a(x))$. Die Quasihauptideale $\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \cdot (a(x))$ und $\tilde{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b} \cdot (b(x))$ werden *„proportional"* genannt, wenn sie in $\mathfrak{P}$ dasselbe Hauptideal

$$\mathfrak{a} \cdot (a(x)) \cdot \mathfrak{P} = \mathfrak{b} \cdot (b(x)) \cdot \mathfrak{P} = (a(x)) \cdot \mathfrak{P} = (b(x)) \cdot \mathfrak{P}$$

erzeugen, d. h. wenn sich $a(x)$ und $b(x)$ nur um einen Faktor aus $\mathfrak{R}$ unterscheiden.

Satz 2. *In jeder Klasse von proportionalen Hauptidealen* $\tilde{\mathfrak{a}}$ *gibt es ein einziges primitives* $\tilde{\mathfrak{a}}^*$. $\tilde{\mathfrak{a}}^*$ *ist die Summe (der größte gemeinschaftliche Teiler) aller ganzen Ideale der Klasse.*

Es sei $(a(x))$ irgend ein Hauptideal der Klasse, $\mathfrak{a}$ sein endlicher Inhalt; dann ist $\tilde{\mathfrak{a}}^* = \mathfrak{a}^{-1} \cdot (a(x))$ nach Satz 1 primitiv. Ist ferner $\tilde{\mathfrak{b}} = \mathfrak{c} \cdot (b(x))$ irgend ein Ideal der Klasse mit dem Inhalt $\mathfrak{b}$, so ist

---

[3]) Vgl. hierzu die Darstellung bei Prüfer § 9, wo (auf S. 24) auch ein knapper Beweis des Dedekind-Mertensschen Hilfssatzes gegeben wird. (Daß Prüfer Polynome *einer* Variabeln voraussetzt, bedeutet keine Einschränkung, da man nach Kronecker zu zwei Polynomen $a(x_1, \ldots, x_n)$ und $b(x_1, \ldots, x_n)$ stets eine solche Substitution $x_i = t^{m_i}$ bestimmen kann, daß in $a(t^{m_1}, \ldots, t^{m_n}) \cdot b(t^{m_1}, \ldots, t^{m_n})$ genau dieselben Koeffizienten auftreten wie in $a(x_1, \ldots, x_n) \cdot b(x_1, \ldots, x_n)$.)

$b(x) = b \cdot a(x)$, $\tilde{\mathfrak{b}} = ((b) \cdot \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a}) \cdot \tilde{\mathfrak{a}}^*$ und nach Satz 1 muß dabei $(b) \cdot \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ sein. Sind also $\tilde{\mathfrak{b}}$ und $\mathfrak{b}$ ganz, so wird $\tilde{\mathfrak{b}}$ Unterideal (Vielfaches) von $\tilde{\mathfrak{a}}^*$.

Der Beweis von Satz 2 zeigt insbesondere, daß jedes primitive Quasihauptideal endlich und Faktor jedes Ideals seiner Proportionalitätsklasse ist. — Beachten wir ferner, daß der Durchschnitt eines Hauptideals $(a(x)) \cdot \tilde{\mathfrak{P}}$ aus $\tilde{\mathfrak{P}}$ mit $\tilde{\mathfrak{M}}$ offenbar gleich der Summe aller ganzen Ideale aus der durch $\tilde{\mathfrak{h}} = (a(x))$ bestimmten Proportionalitätsklasse ist, so ergibt sich ohne jede nennenswerte Schwierigkeit:

Satz 3. *Die primitiven Quasihauptideale von $\tilde{\mathfrak{M}}$ entsprechen eindeutig umkehrbar den ganzen Hauptidealen von $\tilde{\mathfrak{P}}$. Die Zuordnung ist hinsichtlich der Multiplikation ein Isomorphismus, und es ist insbesondere ein primitives Quasihauptideal in $\tilde{\mathfrak{M}}$ dann und nur dann Primideal, wenn das zugeordnete Hauptideal in $\tilde{\mathfrak{P}}$ Primideal ist, also eine irreduzible Basis besitzt.*

Satz 4. *Zerlegungssatz der Quasihauptideale. In $\tilde{\mathfrak{M}}$ läßt sich jedes Quasihauptideal eindeutig darstellen als Produkt eines Ideals aus $\mathfrak{M}$ mit endlich vielen Primidealen, die selbst primitive Quasihauptideale sind.*

Die Sätze 3 und 4 zusammen stellen offenbar die gesuchte Verallgemeinerung des in der Einleitung angegebenen Satzes dar. Wesentlich für ihre Gewinnung war in $\tilde{\mathfrak{M}}$ der Übergang vom Begriff des Hauptideals zum umfassenderen Begriff des Quasihauptideals[4]). Die Sonderstellung der Quasihauptideale wird noch deutlicher durch

Satz 5. *Ein Ideal $\tilde{\mathfrak{a}}$ ist dann und nur dann umkehrbar, wenn es ein endliches Quasihauptideal ist.*

Ist $\mathfrak{a} \cdot (a(x))$ endlich, so ist $\mathfrak{a}$ endlich, und es wird

$$[\mathfrak{a} \cdot (a(x))]^{-1} = \mathfrak{a}^{-1} \cdot (a(x)^{-1}),$$

$$\mathfrak{a} \cdot (a(x)) \cdot [\mathfrak{a} \cdot (a(x))]^{-1} = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1}) \cdot \tilde{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M} \cdot \tilde{\mathfrak{M}} = \tilde{\mathfrak{M}}.$$

Es sei andererseits $\tilde{\mathfrak{a}}$ ein beliebiges Ideal mit dem endlichen Inhalt $\mathfrak{a}$, $t(x)$ sei in $\tilde{\mathfrak{P}}$ ein größter gemeinsamer Faktor aller Polynome von $\tilde{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{b}$ bedeute den Inhalt von $(t(x))$, $\mathfrak{c}$ das Ideal $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}^{-1}$. Dann wird

$$\tilde{\mathfrak{a}} = (\mathfrak{c} \cdot (t(x))) \cdot (\mathfrak{c}^{-1} \cdot (t(x)^{-1}) \cdot \tilde{\mathfrak{a}}),$$

und hier ist $\mathfrak{c} \cdot (t(x))$ ein Quasihauptideal, während $\tilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{c}^{-1} \cdot (t(x)^{-1}) \cdot \tilde{\mathfrak{a}}$ dadurch ausgezeichnet ist, daß $\alpha)$ $\tilde{\mathfrak{m}}$ den Inhalt $\mathfrak{M}$ hat, und daß $\beta)$ die Polynome von $\tilde{\mathfrak{m}}$ in $\tilde{\mathfrak{P}}$ keinen nichttrivialen gemeinsamen Faktor besitzen. Unter diesen Umständen wird aber $\tilde{\mathfrak{m}}^{-1} = \tilde{\mathfrak{R}}$, denn jedes Element aus $\tilde{\mathfrak{m}}^{-1}$ muß wegen $\beta)$ ein Polynom sein und wegen $\alpha)$ und Satz 1 Koeffizienten aus $\mathfrak{M}$ haben. — Für $\tilde{\mathfrak{a}}$ gilt daher: $\tilde{\mathfrak{a}}^{-1} = \mathfrak{c}^{-1} \cdot (t(x)^{-1})$;

---

[4]) Ebenso brauchbar erweist sich der Begriff des Quaishauptideals bei den Potenzreihen einer Variabeln über einem Multiplikationsring ohne nichtendliche Ideale. Vgl. W. Krull: Zur Arithmetik der ganzzahligen Potenzreihen, Journ. f. Math. 164 (1931), S. 12–22.

$\tilde{\mathfrak{a}} \cdot \tilde{\mathfrak{a}}^{-1} = \tilde{\mathfrak{b}}$; soll also $\tilde{\mathfrak{a}}$ umkehrbar, so muß $\tilde{\mathfrak{b}} = \widetilde{\mathfrak{M}}$, d. h. $\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c} \cdot (t(x))$ Quasihauptideal sein. — Damit ist Satz 5 bewiesen und darüber hinaus gezeigt:

Satz 6. *Zu jedem endlichen* $\tilde{\mathfrak{a}}$ *existiert ein Quasihauptideal* $\tilde{\mathfrak{q}}$, *für das* $\tilde{\mathfrak{a}}^{-1} = \tilde{\mathfrak{q}}^{-1}$ *wird.*

2. *V*-Ideale[5]). Wir sehen von jetzt ab nach Artin zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ($\tilde{\mathfrak{a}}$ und $\tilde{\mathfrak{b}}$) als *äquivalent* und nicht wesentlich verschieden an, wenn sie dieselben Reziproken besitzen, $\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{b}^{-1}$ ($\tilde{\mathfrak{a}}^{-1} = \tilde{\mathfrak{b}}^{-1}$). In jeder Klasse äquivalenter Ideale gibt es ein einziges maximales Ideal $\tilde{\mathfrak{a}}_v$, und zwar wird $\mathfrak{a}_v = (\mathfrak{a}^{-1})^{-1}$, falls $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal der Klasse bedeutet. Die Ideale $\mathfrak{a}_v$ sollen nach Prüfer „*v-Ideale*" genannt werden; ein v-Ideal, das zu einem endlichen Ideal äquivalent ist, $\mathfrak{a}_v = ((a_1, \ldots, a_v)^{-1})^{-1}$, möge „*v-endlich*" heißen. Zu den v-Idealen gehören offenbar alle umkehrbaren, und damit insbesondere alle Hauptideale. — Ist $\mathfrak{a}$ Unterideal von $\mathfrak{b}$, so ist auch $\mathfrak{a}_v = (\mathfrak{a}^{-1})^{-1}$ Unterideal von $\mathfrak{b}_v = (\mathfrak{b}^{-1})^{-1}$; sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$ äquivalent, so sind es auch $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b}'$. Diese Bemerkungen gestatten es uns, im folgenden in $\mathfrak{R}$ und $\widetilde{\mathfrak{R}}$ ausschließlich v-Ideale $\mathfrak{a}_v$ und $\tilde{\mathfrak{a}}_v$ zu betrachten, und dabei die „*v-Multiplikation*" durch die Festsetzung $\mathfrak{a}_v \times \mathfrak{b}_v = (\mathfrak{a}_v \cdot \mathfrak{b}_v)_v = ((\mathfrak{a}_v \cdot \mathfrak{b}_v)^{-1})^{-1}$ zu erklären.

Ist $\mathfrak{a}_v \times \mathfrak{a}_v^{-1} = \mathfrak{M}$, so wird man $\mathfrak{a}_v$ „*v-umkehrbar*" nennen. Ein v-umkehrbares Ideal braucht in keiner Weise endlich zu sein. Es ist daher (anders als bei den gewöhnlichen Idealen in 1.) keine allzu einschneidende Forderung, wenn man von einem „*v-Multiplikationsring*" verlangt, daß in ihm *alle* (endlichen oder nichtendlichen) v-Ideale v-umkehrbar sein sollen. Man kann aber auch nach dem Vorbild von 1. nur für die v-endlichen Ideale v-Umkehrbarkeit vorschreiben, allerdings dann in der scharfen Form, daß für die Menge aller v-endlichen v-Ideale Gruppeneigenschaft hinsichtlich der v-Multiplikation gefordert wird. Die erste Auffassung liegt der in van der Waerdens Lehrbuch dargestellten Artinschen Äquivalenztheorie zugrunde, die zweite findet sich implizit bei Prüfer. Wir wollen daher zwischen einem „Artinschen" und einem „Prüferschen" *v-Multiplikationsring* unterscheiden[6]).

Ist $\tilde{\mathfrak{a}}$ ein beliebiges Ideal mit dem Inhalt $\mathfrak{a}$, so ist offenbar $\mathfrak{a}^{-1}$ Untermenge von $\tilde{\mathfrak{a}}^{-1}$; es muß daher $(\tilde{\mathfrak{a}}^{-1})^{-1} = \tilde{\mathfrak{a}}_v$ in $\widetilde{\mathfrak{P}}$ liegen, — die

[5]) Zur systematischen Theorie der v-Ideale vgl. Prüfer § 7, sowie van der Waerden: Moderne Algebra II, § 103.

[6]) Es gibt arithmetisch wichtige, ganz abgeschlossene Integritätsbereiche, die gewöhnliche Multiplikationsringe (und damit auch Prüfersche v-Multiplikationsringe), aber keine Artinschen v-Multiplikationsringe sind; vgl. W. Krull: Allgemeine Bewertungstheorie, Journ. f. Math. 167 (1931), S. 160—196, § 4. — Ein Beispiel eines ganz abgeschlossenen Integritätsbereichs, der in keinem Sinne Multiplikationsring ist, findet sich bei Prüfer, S. 19.

v-Idealbildung führt also nicht aus dem in 1. abgesteckten Rahmen heraus, — und es muß der Inhalt $\mathfrak{b}$ von $\tilde{\mathfrak{a}}_v$ ein Zwischenideal zwischen $\mathfrak{a}$ und $(\mathfrak{a}^{-1})^{-1} = \mathfrak{a}_v$ darstellen. Wir dürfen somit unbedenklich festsetzen: Hat $\tilde{\mathfrak{a}}_v$ oder irgendein zu $\tilde{\mathfrak{a}}_v$ äquivalentes Ideal $\tilde{\mathfrak{a}}$ den Inhalt $\mathfrak{a}$, so soll $\mathfrak{a}_v$ als „*v-Inhalt*" von $\tilde{\mathfrak{a}}_v$ angesehen werden. Ist $\mathfrak{a}_v = \mathfrak{M}$, so soll $\tilde{\mathfrak{a}}_v$ „*v-primitiv*" heißen. Aus der Tatsache, daß im gewöhnlichen Fall immer der Inhalt des Produktes Unterideal des Produktes der Inhalte der Faktoren ist, ergibt sich dann sofort dasselbe für v-Ideale und v-Produkte, und daraus folgt weiter nach denselben Schlüssen, wie sie in 1. für gewöhnliche Ideale skizziert wurden:

Inhaltssatz für v-Ideale. *Ist $\mathfrak{M}$ (Artinscher oder Prüferscher) v-Multiplikationsring, so ist der v-Inhalt des v-Produktes stets gleich dem v-Produkt der v-Inhalte der Faktoren. Insbesondere ist das v-Produkt zweier v-primitiver v-Ideale stets selbst v-primitiv.*

Die Übertragung der Sätze 2 bis 4 auf den „v-Fall" gestaltet sich nun so einfach, daß sie nicht im Einzelnen ausgeführt zu werden braucht. Selbstverständlich kann man bei einem Artinschen v-Multiplikationsring nicht mit Sicherheit behaupten, daß alle v-primitiven Quasihauptideale v-endlich sind, doch ist das der Natur der Sache nach belanglos. — Im übrigen sei zum Quasihauptidealbegriff im v-Falle noch bemerkt: Ist $\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{a} \cdot (a(x))$ ein beliebiges Quasihauptideal, so ist $\tilde{\mathfrak{q}}^{-1} = \mathfrak{a}^{-1} \cdot (a(x)^{-1})$, $(\tilde{\mathfrak{q}}^{-1})^{-1} = \tilde{\mathfrak{q}}_v = (\mathfrak{a}^{-1})^{-1} \cdot (a(x)) = \mathfrak{a}_v \cdot (a(x))$. (Insbesondere hat man stets $(\mathfrak{a} \cdot \tilde{\mathfrak{M}})_v = (\mathfrak{a} \cdot (1))_v = \mathfrak{a}_v \cdot (1) = \mathfrak{a}_v \cdot \tilde{\mathfrak{M}}$).

Die v-Quasihauptideale sind also einfach die gewöhnlichen Produkte der v-Ideale von $\mathfrak{M}$ mit den Hauptidealen von $\tilde{\mathfrak{M}}$.

Natürlich sind, falls $\mathfrak{M}$ Artinscher bzw. Prüferscher Multiplikationsring ist, alle bzw. alle v-endlichen Quasihauptideale v-umkehrbar. Die (mühelos mögliche) Übertragung von Satz 6 zeigt weiter, daß in den beiden Fällen alle bzw. alle v-endlichen v-Ideale Quasihauptideale sind. — Das Gesamtergebnis lautet also:

Satz 7. *Ist $\mathfrak{M}$ Artinscher bzw. Prüferscher v-Multiplikationsring, so gelten für die v-Zerlegung der v-Quasihauptideale die Sätze 3 und 4 von 1. — Außerdem ist im Artinschen bzw. Prüferschen Fall jedes bzw. jedes v-endliche v-Ideal Quasihauptideal, und es ist dementsprechend $\tilde{\mathfrak{M}}$ stets gleichzeitig mit $\mathfrak{M}$ Artinscher bzw. Prüferscher v-Multiplikationsring*[7]).

[7]) Zum letzten Teil des Satzes vgl. Prüfer § 10. Vgl. ferner Prüfer § 11, S. 32, wo mit Hilfe eines weiteren Theorems über algebraisch ganz abhängige Erweiterungen die bereits in der Einleitung unserer Note erwähnte Tatsache bewiesen ist, daß alle ganz abgeschlossenen Ringe aus ganzen algebraischen Funktionen beliebig vieler Veränderlicher zu den Prüferschen v-Multiplikationsringen gehören.

(Eingegangen am 22. November 1935.)

Über Normalkörper mit Quaternionengruppe.

Von

Hans Reichardt in Jena.

Die arithmetische Theorie der absolut galoisschen Zahlkörper, deren Galois-Gruppe isomorph zur Quaternionengruppe ist (sie mögen kurz als Q-Körper bezeichnet werden), wurde von Herrn Rosenblüth[1]) auf klassenkörpertheoretischer Grundlage entwickelt. Dabei ergaben sich notwendige Bedingungen dafür, daß ein absolut abelscher Körper vom Typ (2, 2) in einen Q-Körper eingebettet werden kann. Jedoch blieb die Frage, ob diese Bedingungen auch stets hinreichend sind, offen; sie soll nun beantwortet werden, und zwar wird dies in bejahendem Sinne geschehen.

1. Zunächst mögen die erwähnten notwendigen Bedingungen noch einmal hergeleitet werden, aber auf elementarem Wege. Es sei also Λ ein Q-Körper, K der darin enthaltene bizyklische Körper mit den drei quadratischen Teilkörpern $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$. Ω_i werde erzeugt durch $\sqrt{a_i}$, a_i ganz rational, quadratfrei. Dann ist $a_1 a_2 a_3 = a^2$, a rational, quadratfrei. Die Automorphismen $+1$ von K mögen durch „$'$“, „$-$“, „$\overline{\ \ }'$“ angedeutet werden, und zwar sei $\sqrt{a_1}' = \sqrt{a_1}$, $\overline{\sqrt{a_3}} = \sqrt{a_2}$, $\overline{\sqrt{a_3}}' = \sqrt{a_3}$. Ist $\Lambda = \mathsf{K}(\sqrt{\alpha})$ mit α aus K, so ist $\alpha\,\alpha' = \xi^2$ mit ξ aus K, weil Λ normal ist. $\alpha\,\alpha'$ liegt nun in Ω_1, daher hat ξ die Form α_1 oder $\alpha_1\sqrt{a_2}$ mit α_1 aus Ω_1. Im ersteren Fall wäre aber Λ vom Typ (2, 2) über Ω_1, also ist $\alpha\,\alpha' = \alpha_1^2 a_2$, da ja Λ über Ω_1 zyklisch ist. Ist umgekehrt α eine Zahl aus K, für die $\alpha\,\alpha' = \alpha_1^2 a_2$ ist, so ist $\mathsf{K}(\sqrt{\alpha})$ auch wirklich zyklisch über Ω_1, wie man sofort nachrechnet. Entsprechendes gilt für Λ/Ω_2 und Λ/Ω_3. Berücksichtigt man also, daß die Quaternionengruppe die einzige Gruppe der Ordnung 8 ist, die drei zyklische Untergruppen der Ordnung 4 enthält, so folgt: Dann und nur dann ist $\mathsf{K}(\sqrt{\alpha})$ ein Q-Körper, wenn

$$(1)\qquad \begin{aligned} \alpha\,\alpha' &= \alpha_1^2 a_2,\\ \alpha\,\bar{\alpha} &= \alpha_2^2 a_3,\\ \alpha\,\bar{\alpha}' &= \alpha_3^2 a_1 \end{aligned}$$

mit α_i aus Ω_i.

Daraus folgt

$$\alpha^2 = \frac{\alpha\,\alpha' \cdot \alpha\,\bar{\alpha}}{\alpha'\,\bar{\alpha}} = \frac{\alpha_1^2 a_2 \cdot \alpha_2^2 a_3}{\alpha_3'^2 a_1} = \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2 a^2}{\alpha_3'^2 a_1^2},$$

[1]) Emanuel Rosenblüth, Die arithmetische Theorie und die Konstruktion der Quaternionenkörper auf klassenkörpertheoretischer Grundlage. Monatshefte für Math. u. Phys. **41** (1934), S. 85—125.

also

$$\alpha = \pm \frac{\alpha_1 \alpha_2 a}{\alpha_3' a_1},$$

und daraus wieder

$$\alpha \alpha' = \frac{\alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_2' a^2}{\alpha_3' \alpha_3 a_1^2}.$$

Vergleich mit (1) ergibt, wenn man dasselbe auch noch für die anderen Indices durchführt:

$$\alpha_2 \alpha_2' a_3 = \alpha_3 \alpha_3' a_1 = \alpha_1 \bar{\alpha}_1 a_2. \tag{2}$$

Sind umgekehrt α_i Zahlen aus Ω_i, für die (2) gilt, so ist (1) mit $\alpha = \frac{\alpha_1 \alpha_2 a}{\alpha_3' a_1}$ erfüllt. Die Existenz eines K enthaltenden Q-Körpers ist daher gleichbedeutend mit der Lösbarkeit von (2) mit α_i aus Ω_i.

$\alpha_1 \bar{\alpha}_1 a_2$ ist eine rationale Zahl b; (2) läßt sich dann auch schreiben als

$$\begin{aligned} b &= a_2 x^2 - a_3 y^2, \\ b &= a_3 u^2 - a_1 v^2, \\ b &= a_1 r^2 - a_2 s^2, \end{aligned} \tag{3}$$

x, y, u, v, r, s rational.

Daraus folgt sofort, daß K reell sein muß; denn sonst wären genau zwei der a_i, etwa a_1 und a_2, negativ, also wäre $a_2 x^2 - a_3 y^2 < 0$, aber $a_3 u^2 - a_1 v^2 > 0$.

p sei nun eine in a aufgehende ungerade Primzahl. p geht dann in genau einer der drei Zahlen a_i, etwa in a_1, nicht auf. Enthält nun b eine ungerade Potenz von p, so folgt aus $b = a_3 u^2 - a_1 v^2$ $\left(\frac{a_3 b}{p}\right) = 1$ (das Legendre-Symbol im multiplikativen Sinn!), und aus $b = a_1 r^2 - a_2 s^2$ folgt $\left(\frac{-a_2 b}{p}\right) = 1$. Das gibt zusammen $\left(\frac{-a_2 b \cdot a_3 b}{p}\right) = \left(\frac{-a_1}{p}\right) = 1$. Enthält b aber eine gerade Potenz von p, so folgt aus (3) in entsprechender Weise $\left(\frac{a_2 a_3}{p}\right) = 1$, $\left(\frac{-a_1 b}{p}\right) = 1$ und $\left(\frac{a_1 b}{p}\right) = 1$, und daraus folgt weiter $\left(\frac{a_3 a_3 \cdot (-a_1 b) \cdot a_1 b}{p}\right) = \left(\frac{-a_1}{p}\right) = 1$. Entsprechendes gilt auch für die übrigen Indices, und wir erhalten:

Q. *Läßt sich* K *in einen Q-Körper einbetten, so ist* $a_i > 0$, *und für jede in* a, *aber nicht in* a_i *aufgehende ungerade Primzahl* p_i *ist* $\left(\frac{-a_i}{p_i}\right) = 1$[2]).

2. Vor dem Beweis der Umkehrbarkeit von ***Q*** möge gezeigt werden, wie sich aus ***Q*** allein Einschränkungen über das Verhalten der a_i bezüglich 2 ergeben. Zu dem Zweck betrachten wir die Form $\varphi = x_1^2 + a_1 x_2^2 + a_2 x_3^2$. Für jede ungerade, nicht in a aufgehende Primzahl p ist φ

[2]) Die Sätze 8 und 9 a. a. O.[1]). Der Satz 10, der als weitere notwendige Bedingung vermutet wurde, ist in Wirklichkeit keine neue, von den Sätzen 8 und 9 unabhängige Einschränkung für die a_i, wie gleich gezeigt wird.

p-adische Nullform; denn die Kongruenz $\varphi \equiv 0 \bmod p$ ist lösbar. (Beweis: $1 + a_1 x_2^2$ durchläuft $\frac{p+1}{2}$ verschiedene Restklassen mod p, ebenso $-a_2 x_3^2$, also gibt es ein Paar x_2, x_3 mit $1 + a_1 x_2^2 \equiv -a_2 x_3^2 \bmod p$.) Nach $\boldsymbol{Q}$ ist aber $\varphi = 0$ auch für jede ungerade in a aufgehende Primzahl lösbar (natürlich sollen nicht alle $x_i = 0$ sein). Da aber $\varphi = 0$ nach $\boldsymbol{Q}$ nur $x_i = 0$ als Lösung in reellen Zahlen hat, kann φ nach der Produktformel für das Normenrestsymbol nicht Nullform sein für 2. Das bedeutet aber, wie man leicht sieht, für den Fall eines ungeraden a, daß $a_1 \equiv a_2 \equiv 1 \bmod 4$ und damit auch $a_3 \equiv 1 \bmod 4$ ist, und für den Fall eines geraden a, wo also genau zwei der a_i, etwa a_1 und a_2, gerade sind, daß $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} \equiv 2$ oder $4 \bmod 8$. Es gibt also bei geradem a höchstens folgende Möglichkeiten mod 8:

$\frac{a_1}{2}$	$\frac{a_2}{2}$	a_3
1	1	1
3	7	5
5	5	1
1	3	3
5	7	3

3. Es sei nun umgekehrt $\boldsymbol{Q}$ erfüllt. Ich will zeigen, daß dann (3) mit $b = a q$ lösbar ist, wobei q eine geeignet zu wählende Primzahl. Damit ist dann gezeigt, daß $\boldsymbol{Q}$ auch hinreichend für die Einbettbarkeit von K in einen Q-Körper ist. q wird folgendermaßen gewählt: Für jede ungerade in a, aber nicht in a_i aufgehende Primzahl p_i soll $\left(\frac{a_i - 1}{p_i}\right) = 1$ sein (die Indices sind mod 3 zu nehmen). Ist a ungerade, so stelle ich keine weiteren Forderungen an q. Ist dagegen a gerade, so soll $\frac{a q}{2} \equiv 1 \bmod 8$ sein, wenn der erste oder der letzte Fall der Tabelle am Schluß von **2.** vorliegt, und in den übrigen Fällen soll $\frac{a q}{2} \equiv 5 \bmod 8$ sein. Diese Forderungen an q sind nach dem Satz von der arithmetischen Progression erfüllbar, da die zu verschiedenen i gehörenden p_i voneinander verschieden sind. Ich behaupte also nun: Die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
a q &= a_2 x^2 - a_3 y^2, \\
a q &= a_3 u^2 - a_1 v^2, \\
a q &= a_1 r^2 - a_2 s^2,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

sind in rationalen Zahlen x, y, u, v, r, s lösbar. Nach dem Hauptsatz über ternäre quadratische Formen ist nur zu zeigen, daß (4) an jeder Primstelle lösbar ist.

In reellen Zahlen ist (4) nach Q lösbar. Für 2 ist (4) bei ungeradem a lösbar, da dann nach **2.** $a_i \equiv 1 \bmod 4$ ist, und bei geradem a ist (4) für 2 lösbar, da dann die Restklasse von $\frac{aq}{2}$ mod 8 jeweils geeignet gewählt ist, wie man leicht nachprüft. Für jede in $a\,q$ nicht aufgehende ungerade Primzahl ist (4) nach demselben Schluß wie in **2.** lösbar. Ist schließlich p eine ungerade in a, aber etwa nicht in a_1 aufgehende Primzahl, so ist $\frac{a}{p}\,q = \frac{a_2}{p}\,x^2 - \frac{a_3}{p}\,y^2$ wieder nach demselben Schluß lösbar, da ja die Koeffizienten $\frac{a}{p}\,q$, $\frac{a_2}{p}$ und $\frac{a_3}{p}$ prim zu p sind, und die beiden anderen Gleichungen in (4) sind nach Q wegen der passenden Wahl von q mod p lösbar für p. Entsprechendes gilt für die anderen Indices. Die Lösbarkeit von (4) für die allein noch übrig gebliebene Primstelle q folgt aber nun aus der Produktformel für das Normenrestsymbol.

4. Zum Schluß noch zwei Bemerkungen.

Ist $\mathsf{K}(\sqrt{\alpha})$ ein Q-Körper, so ist nach (1) auch $\mathsf{K}(\sqrt{c\,\alpha})$ mit rationalem c ein Q-Körper. Damit sind aber schon alle K enthaltenden Q-Körper erschöpft. Ist nämlich $\mathsf{K}(\sqrt{\beta})$ ein anderer Q-Körper, so folgt sofort aus (1), daß $\mathsf{K}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)$ bizyklisch über jedem Ω_i und absolut galoissch ist. Da es nur eine Gruppe der Ordnung 8 mit drei Untergruppen vom Typ $(2,2)$ gibt, nämlich die abelsche vom Typ $(2,2,2)$, ist $\mathsf{K}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right) = \mathsf{K}(\sqrt{c})$ mit rationalem c, also $\mathsf{K}(\sqrt{\beta}) = \mathsf{K}(\sqrt{\alpha\,c})$.

Nach **2.** unterliegen die a_i gewissen Einschränkungen bezüglich der 2. Man überlegt sich leicht (etwa an Hand von Beispielen), daß die dort angegebenen Möglichkeiten auch wirklich alle vorkommen. Weiter läßt sich nach **2.** ein Ω_i nicht in einen Q-Körper einbetten, wenn sein $a_i \equiv 7 \bmod 8$ ist. Daß das sonst aber stets der Fall ist, zeigt man (doch soll das nicht im einzelnen hier durchgeführt werden), indem man die Existenz einer solchen Primzahl p nachweist, daß $\mathsf{K}(\sqrt{a_i}, \sqrt{p})$ oder $\mathsf{K}(\sqrt{a_i}, \sqrt{2\,p})$ den Bedingungen Q genügt. Dazu hat man wieder den Satz von der arithmetischen Progression und das Reziprozitätsgesetz für das Legendre-Symbol (oder auch die Produktformel für das Normenrestsymbol) heranzuziehen. Man kann das Resultat dann auch so aussprechen: *Dann und nur dann läßt sich ein quadratischer Körper in einen Q-Körper einbetten, wenn er durch die Wurzel aus einer Summe von drei Quadratzahlen erzeugt werden kann.*

Anmerkung bei der Korrektur: In einer inzwischen erschienenen Arbeit (Über die Lösbarkeit einiger nicht-Abelscher Einbettungsprobleme. Math. Annalen **112**, 69–84.) hat H. Richter diese Resultate auf anderem Wege hergeleitet.

(Eingegangen am 25. November 1935.)

Existenzbeweise zur Wahrscheinlichkeitstheorie*).

Von

Eugen Beck in Göppingen.

Inhalt.

Seite

§ 1. Wahrscheinlichkeitsfelder 223
§ 2. Bernoullische Folgen 226
§ 3. Bernoullische Felder 229
§ 4. Indexfolgen 233
§ 5. Geometrische Verteilungen 241

Seit Herrn v. Mises wird, wenn man von dem bei Herrn v. Mises noch auftretenden Regellosigkeitspostulat absieht, die mathematische Wahrscheinlichkeit folgendermaßen definiert[1]):

Man geht aus von einer unendlichen Folge von irgendwelchen Dingen („Elemente" oder „Ereignisse" genannt) $\mathfrak{E}$: $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots$ und zählt ab, auf wieviele von den ersten n Ereignissen ein „Merkmal" $\mathfrak{m}$ zutrifft; die Anzahl dieser Ereignisse sei $H_n(\mathfrak{E}, \mathfrak{m})$. Man sagt, daß in der „Ereignisfolge" oder „$\mathfrak{E}$-Folge" $\mathfrak{E}$ das Merkmal $\mathfrak{m}$ mit der Wahrscheinlichkeit w vorkommt, wenn der Grenzwert der *relativen Häufigkeiten* $h_n(\mathfrak{E}, \mathfrak{m}) = \frac{1}{n} H_n(\mathfrak{E}, \mathfrak{m})$ für $n \to \infty$ existiert und den Wert w besitzt. Die $\mathfrak{E}$-Folge $\mathfrak{E}$ wird dann in bezug auf $\mathfrak{m}$ eine W-Folge genannt.

Bei dieser Definition macht die Herleitung der üblichen Sätze der Wahrscheinlichkeitstheorie unter geeigneten Voraussetzungen keinerlei Schwierigkeiten. Die Einführung solcher zusätzlichen Voraussetzungen macht jedoch Untersuchungen darüber notwendig, ob es überhaupt $\mathfrak{E}$-Folgen gibt, welche diese Voraussetzungen erfüllen. Bei einer Reihe von Sätzen machen diese Untersuchungen keine Mühe, bei anderen wieder, wie z. B. bei dem Bernoullischen Gesetz, sind sie nicht so einfach.

Die vorliegende Arbeit will zeigen, wie diese Untersuchungen nicht nur bei sogenannten diskreten, sondern auch bei geometrischen Wahrscheinlichkeiten in den meisten Fällen in einheitlicher Weise geführt werden

*) Von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen als Dissertation angenommen.

[1]) In den Bezeichnungen folge ich E. Kamke, Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie. Leipzig 1932.

können; ihr voraus gehen Arbeiten der Herren E. Tornier und A. H. Copeland. Einschränkungen, die sich dort noch finden, konnten hier beseitigt und die Beweise zum Teil einfacher gestaltet werden. Für Einzelheiten sei verwiesen auf den Schluß der §§ 3 und 5 (S. 232f. und 250f.).

§ 1.

Wahrscheinlichkeitsfelder.

Es seien endlich viele oder abzählbar unendlich viele $\mathfrak{E}$-Folgen

$$\mathfrak{W}: \begin{cases} \mathfrak{E}': \mathfrak{E}'_1, \mathfrak{E}'_2, \ldots \\ \mathfrak{E}'': \mathfrak{E}''_1, \mathfrak{E}''_2, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

vorgelegt; in jeder einzelnen Folge $\mathfrak{E}^{(\nu)}$ sollen endlich viele oder abzählbar unendlich viele Merkmale[2]) $\mathfrak{m}_\lambda^{(\nu)}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ mit den Wahrscheinlichkeiten $w_\lambda^{(\nu)}$ auftreten. Wir sagen dann, die W-Folge $\mathfrak{E}^{(\nu)}$ habe hinsichtlich der Merkmale $\mathfrak{m}_1^{(\nu)}, \mathfrak{m}_2^{(\nu)}, \ldots$ die Verteilung $w_1^{(\nu)}, w_2^{(\nu)}, \ldots$ und nennen das System dieser W-Folgen ein Wahrscheinlichkeitsfeld, kurz ein W-Feld. In dem Falle, daß das Feld nur aus endlich vielen W-Folgen besteht, nennen wir $\mathfrak{W}$ ein *abbrechendes* W-Feld.

Unter der Folgenverbindung[3]) von k Folgen $\mathfrak{E}', \ldots, \mathfrak{E}^{(k)}$ versteht man die $\mathfrak{E}$-Folge

$$\mathfrak{E}' \ldots \mathfrak{E}^{(k)}: \mathfrak{E}'_1 \ldots \mathfrak{E}_1^{(k)}, \mathfrak{E}'_2 \ldots \mathfrak{E}_2^{(k)}, \mathfrak{E}'_3 \ldots \mathfrak{E}_3^{(k)}, \ldots,$$

deren Elemente geordnete Systeme $\mathfrak{E}'_n \ldots \mathfrak{E}_n^{(k)}$ von k Ereignissen sind; man sagt, auf $\mathfrak{E}'_n \ldots \mathfrak{E}_n^{(k)}$ treffe die Merkmalverbindung $\mathfrak{m}'_{\lambda_1} \ldots \mathfrak{m}_{\lambda_k}^{(k)}$ zu, wenn für $\nu = 1, \ldots, k$ das Merkmal $\mathfrak{m}_{\lambda_\nu}^{(\nu)}$ auf $\mathfrak{E}_n^{(\nu)}$ zutrifft. Die k Folgen $\mathfrak{E}', \ldots, \mathfrak{E}^{(k)}$ eines abbrechenden W-Feldes heißen voneinander unabhängig, wenn in der Folgenverbindung $\mathfrak{E}' \ldots \mathfrak{E}^{(k)}$ *jede* Merkmalverbindung $\mathfrak{m}'_{\lambda_1} \ldots \mathfrak{m}_{\lambda_k}^{(k)}$ mit der Wahrscheinlichkeit $w'_{\lambda_1} \ldots w_{\lambda_k}^{(k)}$ vorkommt.

Das W-Feld $\mathfrak{W}$: $\mathfrak{E}', \mathfrak{E}'', \mathfrak{E}''', \ldots$ soll ein W-Feld im engeren Sinne heißen, wenn für jedes mögliche Indexsystem $1 \leqq r_1 < r_2 < \ldots < r_k$ die k Folgen $\mathfrak{E}^{(r_1)}, \ldots, \mathfrak{E}^{(r_k)}$ des Feldes voneinander unabhängig sind.

Herr Tornier hat in einem Sonderfall gezeigt, daß der Begriff eines W-Feldes im engeren Sinne nicht leer ist[4]). Wir zeigen für den allgemeinen Fall zunächst die Existenz eines *abbrechenden* W-Feldes im engeren Sinne bei ganz beliebigen Verteilungen[5]). Dazu beginnen wir mit

---

[2]) Die Merkmale $\mathfrak{m}_1^{(\nu)}, \mathfrak{m}_2^{(\nu)}, \ldots$ brauchen einander nicht auszuschließen, d. h. auf ein Ereignis $\mathfrak{E}_n^{(\nu)}$ können auch mehrere dieser Merkmale zutreffen.

[3]) Dieser Begriff findet sich zuerst bei Herrn v. Mises, Math. Zeitschr. 5 (1919), S. 52—99, insbesondere S. 78—83.

[4]) Näheres siehe S. 232f.

[5]) Die Sätze 1 und 2 gelten auch für nichtabzählbar viele Merkmale.

Satz 1: *Sind $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{E}''$ zwei W-Folgen, die hinsichtlich der Merkmale $\mathfrak{m}_1', \mathfrak{m}_2', \ldots$ und $\mathfrak{m}_1'', \mathfrak{m}_2'', \ldots$ die Verteilungen $w_1', w_2', \ldots$ und $w_1'', w_2'', \ldots$ besitzen, so gibt es zwei W-Folgen $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ mit denselben Verteilungen ($\mathfrak{F}'$ wie $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{F}''$ wie $\mathfrak{E}''$), aber so, daß $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ voneinander unabhängig sind.*

Beweis: Die Folge $\mathfrak{E}'$ wird in die Zeilen und $\mathfrak{E}''$ in die Spalten einer Matrix eingetragen. Diese Matrizen

(1)
$$\left\{\begin{array}{l} \underline{\mathfrak{E}_1', \mathfrak{E}_2', \mathfrak{E}_3', \ldots} \\ \underline{\mathfrak{E}_1', \mathfrak{E}_2', \mathfrak{E}_3', \ldots} \\ \underline{\mathfrak{E}_1', \mathfrak{E}_2', \mathfrak{E}_3', \ldots} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \quad \text{und} \quad (2) \quad \left\{\begin{array}{l} \underline{\mathfrak{E}_1'', \mathfrak{E}_1'', \mathfrak{E}_1'', \ldots} \\ \underline{\mathfrak{E}_2'', \mathfrak{E}_2'', \mathfrak{E}_2'', \ldots} \\ \underline{\mathfrak{E}_3'', \mathfrak{E}_3'', \mathfrak{E}_3'', \ldots} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

werden, wie in den Figuren angedeutet, in Abschnitte zerlegt, und die in diesen stehenden Elemente in beliebiger, aber bei beiden in gleicher Weise hintereinander aufgeschrieben, so daß man z. B. die Folgen

$$\mathfrak{F}' : \mathfrak{E}_1', \mathfrak{E}_1', \mathfrak{E}_2', \mathfrak{E}_2', \mathfrak{E}_1', \mathfrak{E}_2', \mathfrak{E}_3', \mathfrak{E}_3', \mathfrak{E}_3', \mathfrak{E}_1', \ldots$$
$$\mathfrak{F}'' : \mathfrak{E}_1'', \mathfrak{E}_2'', \mathfrak{E}_2'', \mathfrak{E}_1'', \mathfrak{E}_3'', \mathfrak{E}_3'', \mathfrak{E}_3'', \mathfrak{E}_2'', \mathfrak{E}_1'', \mathfrak{E}_4'', \ldots$$

erhält. Diese beiden Folgen besitzen bereits die verlangten Eigenschaften.

α) Offenbar ist für irgendein Merkmal $\mathfrak{m}'$ von $\mathfrak{E}'$

$$H_{n^2}(\mathfrak{F}', \mathfrak{m}') = n H_n(\mathfrak{E}', \mathfrak{m}'),$$

Für $n^2 \leqq \nu < (n+1)^2$ ist $H_{n^2}(\mathfrak{F}', \mathfrak{m}') \leqq H_\nu(\mathfrak{F}', \mathfrak{m}') \leqq H_{(n+1)^2}(\mathfrak{F}', \mathfrak{m}')$, also

$$\frac{H_{n^2}(\mathfrak{F}', \mathfrak{m}')}{(n+1)^2} \leqq \frac{H_\nu(\mathfrak{F}', \mathfrak{m}')}{\nu} \leqq \frac{H_{(n+1)^2}(\mathfrak{F}', \mathfrak{m}')}{n^2}$$

oder

$$\frac{H_n(\mathfrak{E}', \mathfrak{m}')}{n} \frac{n^2}{(n+1)^2} \leqq \frac{H_\nu(\mathfrak{F}', \mathfrak{m}')}{\nu} \leqq \frac{H_{n+1}(\mathfrak{E}', \mathfrak{m}')}{n+1} \frac{(n+1)^2}{n^2}.$$

Hieraus folgt für $\nu \to \infty$, daß das Merkmal $\mathfrak{m}'$ in $\mathfrak{F}'$ mit der Wahrscheinlichkeit w' vorkommt. Daher besitzt $\mathfrak{F}'$ die Verteilung $w_1', w_2', \ldots$. Genau so ergibt sich, daß $\mathfrak{F}''$ die durch $\mathfrak{E}''$ gegebene Verteilung aufweist.

β) Ist $\mathfrak{m}'$ irgendein Merkmal von $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{m}''$ irgendein Merkmal von $\mathfrak{E}''$, so gilt

$$H_{n^2}(\mathfrak{F}'\mathfrak{F}'', \mathfrak{m}'\mathfrak{m}'') = H_n(\mathfrak{F}', \mathfrak{m}') H_n(\mathfrak{F}'', \mathfrak{m}''),$$

wie man unmittelbar sieht, wenn man die beiden Matrizen aufeinanderlegt. Da für $n^2 \leqq \nu < (n+1)^2$ wie bei α)

$$\frac{H_n(\mathfrak{E}', \mathfrak{m}')}{n} \frac{H_n(\mathfrak{E}'', \mathfrak{m}'')}{n} \frac{n^2}{(n+1)^2} \leqq \frac{H_\nu(\mathfrak{F}'\mathfrak{F}'', \mathfrak{m}'\mathfrak{m}'')}{\nu}$$
$$\leqq \frac{H_{n+1}(\mathfrak{E}', \mathfrak{m}')}{n+1} \frac{H_{n+1}(\mathfrak{E}'', \mathfrak{m}'')}{n+1} \frac{(n+1)^2}{n^2}$$

ist, kommt die Merkmalverbindung $\mathfrak{m}'\mathfrak{m}''$ in $\mathfrak{F}'\mathfrak{F}''$ mit der Wahrscheinlichkeit $w'w''$ vor, was zu beweisen war.

Bezeichnung: Das Verfahren, mit dem aus der Folge $\mathfrak{E}'$ die Folge $\mathfrak{F}'$ gewonnen wurde, wollen wir das V_1-Verfahren, das andere das V_2-Verfahren nennen; wir setzen

$$\mathfrak{F}' = V_1(\mathfrak{E}') \quad \text{und} \quad \mathfrak{F}'' = V_2(\mathfrak{E}'').$$

Man verifiziert leicht folgende Regeln:

I. Besitzt $\mathfrak{E}$ hinsichtlich der Merkmale $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots$ die Verteilung $w_1, w_2, \ldots$, dann haben die Folgen $V_1(\mathfrak{E})$ und $V_2(\mathfrak{E})$ dieselbe Verteilung wie $\mathfrak{E}$;

II. ebenso auch die Folgen $V_{r_1}(V_{r_2} \ldots (V_{r_k}\mathfrak{E}) \ldots)$ mit $r_\nu = 1$ oder 2;

III. es ist $V_r(\mathfrak{E}'\mathfrak{E}'' \ldots) = V_r(\mathfrak{E}')\, V_r(\mathfrak{E}'') \ldots$.

Mit diesen Regeln kann Satz 1 erweitert werden zu

Satz 2: *Es seien endlich viele W-Folgen* $\mathfrak{E}', \mathfrak{E}'', \ldots, \mathfrak{E}^{(k)}$ *gegeben;* $\mathfrak{E}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots, k)$ *möge hinsichtlich der Merkmale* $\mathfrak{m}_1^{(\nu)}, \mathfrak{m}_2^{(\nu)}, \ldots$ *die Verteilung* $w_1^{(\nu)}, w_2^{(\nu)}, \ldots$ *besitzen. Dann gibt es Folgen* $\mathfrak{F}', \ldots, \mathfrak{F}^{(k)}$ *mit den Eigenschaften*

a) $\mathfrak{F}^{(\nu)}$ *hat dieselbe Verteilung wie* $\mathfrak{E}^{(\nu)}$;

b) *die k Folgen* $\mathfrak{F}', \ldots, \mathfrak{F}^{(\nu)}$ *bilden ein abbrechendes W-Feld im engeren Sinne.*

Beweis: Für $k = 2$ ist der Satz bereits bewiesen. Er sei schon bewiesen für alle $k \leqq K$. Die W-Folgen, welchen die Eigenschaften a) und b) mit $k = K$ zukommen, seien die Folgen $\mathfrak{G}', \ldots, \mathfrak{G}^{(K)}$. Bildet man aus diesen die K Folgen $\mathfrak{F}' = V_1(\mathfrak{G}'); \ldots; \mathfrak{F}^{(K)} = V_1(\mathfrak{G}^{(K)})$, so ist für jedes Indexsystem $1 \leqq r_1 < \ldots < r_s \leqq K$ nach Regel III

$$\mathfrak{F}^{(r_1)} \ldots \mathfrak{F}^{(r_s)} = V_1(\mathfrak{G}^{(r_1)} \ldots \mathfrak{G}^{(r_s)}).$$

Die W-Folgen $\mathfrak{F}', \ldots, \mathfrak{F}^{(K)}$ besitzen nach Regel I ebenfalls die Eigenschaften des Satzes mit $k = K$. Aus der weiterhin noch vorgelegten Folge $\mathfrak{E}^{(K+1)}$ bilde man jetzt $\mathfrak{F}^{(K+1)} = V_2(\mathfrak{E}^{(K+1)})$, dann ist für jede der allein noch zu betrachtenden Folgenverbindungen $\mathfrak{F}^{(r_1)} \ldots \mathfrak{F}^{(r_s)} \cdot \mathfrak{F}^{(K+1)}$

$$\mathfrak{F}^{(r_1)} \ldots \mathfrak{F}^{(r_s)} \cdot \mathfrak{F}^{(K+1)} = V_1(\mathfrak{G}^{(r_1)} \ldots \mathfrak{G}^{(r_s)})\, V_2(\mathfrak{E}^{(K+1)}),$$

und daher kommt nach Satz 1 jede Merkmalverbindung $\mathfrak{m}_{\lambda_1}^{(r_1)} \ldots \mathfrak{m}_{\lambda_\varkappa}^{(r_\varkappa)}\, \mathfrak{m}_{\lambda_{K+1}}^{(K+1)}$ in $\mathfrak{F}^{(r_1)} \ldots \mathfrak{F}^{(r_\varkappa)} \cdot \mathfrak{F}^{(K+1)}$ mit der verlangten Wahrscheinlichkeit $w_{\lambda_1}^{(r_1)} \ldots w_{\lambda_s}^{(r_s)}\, w_{\lambda_{K+1}}^{(K+1)}$ vor, d. h. der Satz gilt auch für $k = K + 1$.

Anmerkung: Schon an dieser Stelle könnte Satz 2 auf abzählbar unendlich viele W-Folgen erweitert werden. Der entsprechende Satz ist jedoch in dem Satz 4 von § 3 enthalten, dessen Beweis nicht viel mehr Schwierigkeiten macht.

§ 2.

Bernoullische Folgen.

Eine $\mathfrak{E}$-Folge, welche hinsichtlich der Merkmale $\mathfrak{m}', \mathfrak{m}'', \ldots$ die Verteilung $w', w'', \ldots$ besitzt, heißt eine Bernoullische Folge, wenn für jede natürliche Zahl k die k Folgen

$$\begin{aligned}
&\binom{1}{k}\mathfrak{E}\colon\ \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_{k+1}, \mathfrak{E}_{2k+1}, \ldots\\
&\binom{2}{k}\mathfrak{E}\colon\ \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_{k+2}, \mathfrak{E}_{2k+2}, \ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\binom{k}{k}\mathfrak{E}\colon\ \mathfrak{E}_k, \mathfrak{E}_{2k}, \mathfrak{E}_{3k}, \ldots\ldots
\end{aligned}$$

a) dieselbe Verteilung besitzen[6]);

b) ein abbrechendes W-Feld im engeren Sinne bilden.

Satz 3: *Zu jeder Folge $\mathfrak{E}$, die hinsichtlich der beliebigen Merkmale $\mathfrak{m}', \mathfrak{m}'', \ldots$ die Verteilung $w', w'', \ldots$ besitzt, gibt es auch eine Bernoullische Folge mit dieser Verteilung.*

Dem Beweise schicken wir folgende Bemerkungen voraus:

Sind k $\mathfrak{E}$-Folgen

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{E}'\colon\ \mathfrak{E}'_1, \mathfrak{E}'_2, \mathfrak{E}'_3, \ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mathfrak{E}^{(k)}\colon\ \mathfrak{E}^{(k)}_1, \mathfrak{E}^{(k)}_2, \mathfrak{E}^{(k)}_3, \ldots
\end{aligned}$$

gegeben, so nennt man die Folge

$$\mathfrak{E}'_1, \ldots, \mathfrak{E}^{(k)}_1, \mathfrak{E}'_2, \ldots, \mathfrak{E}^{(k)}_2, \mathfrak{E}'_3, \ldots$$

die aus den k Folgen $\mathfrak{E}', \ldots, \mathfrak{E}^{(k)}$ gebildete *Folgenmischung* und bezeichnet sie mit $\mathfrak{E}' + \ldots + \mathfrak{E}^{(k)}$.

Man beweist leicht folgende Regeln[7]):

I. Haben alle k Folgen $\mathfrak{E}', \ldots, \mathfrak{E}^{(k)}$ dieselbe Verteilung, so kommt auch der Folgenmischung $\mathfrak{E}' + \ldots + \mathfrak{E}^{(k)}$ diese Verteilung zu[8]).

---

[6]) Nach der gleich folgenden Regel I besitzen dann alle dieselbe Verteilung wie $\mathfrak{E}$.

[7]) Diese Regeln finden sich implizit alle bei Herrn Copeland in seiner Arbeit „Admissible Numbers in the Theory of Probability", Amer. Journ. of Math. **50** (1928), S. 535—552. Diese Arbeit wird im folgenden als Copeland I zitiert.

[8]) Für den Beweis vgl. z. B. E. Kamke, Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie. Leipzig 1932, S. 26.

II. Ist m ein Teiler von k und gelten dieselben Voraussetzungen wie bei I), so haben auch die m Folgen

$$\left(\frac{1}{m}\,(\mathfrak{E}' + \ldots + \mathfrak{E}^{(k)})\right); \ldots; \left(\frac{m}{m}\,(\mathfrak{E}' + \ldots + \mathfrak{E}^{(k)})\right)$$

dieselbe Verteilung. (Denn es sind selber Folgenmischungen aus $\frac{k}{m}$ Folgen $\mathfrak{E}^{(\nu)}$.)

III. Ganz allgemein gilt über Folgenverbindungen und Folgenmischungen

$$\begin{aligned}(\mathfrak{E}' + \ldots + \mathfrak{E}^{(k)})\,(\mathfrak{F}' + \ldots + \mathfrak{F}^{(k)})\,(\mathfrak{G}' + \ldots + \mathfrak{G}^{(k)}) \ldots \\ = \mathfrak{E}'\mathfrak{F}'\mathfrak{G}' \ldots + \mathfrak{E}''\mathfrak{F}''\mathfrak{G}'' \ldots + \ldots + \mathfrak{E}^{(k)}\mathfrak{F}^{(k)}\mathfrak{G}^{(k)} \ldots .\end{aligned}$$

Dabei steht rechterhand die Folgenmischung von k Folgenverbindungen.

Nunmehr können wir Satz 3 beweisen. Satz 2 mit $\mathfrak{E}' = \mathfrak{E}'' = \ldots = \mathfrak{E}^{(k)} = \mathfrak{E}$ liefert uns k Folgen $\mathfrak{F}', \mathfrak{F}'', \ldots, \mathfrak{F}^{(k)}$, von denen jede dieselbe Verteilung wie $\mathfrak{E}$ besitzt und die ein abbrechendes W-Feld im engeren Sinne bilden. Wir wählen der Reihe nach $k = 1!, 2!, \ldots$ und bilden aus den $s!$ Folgen des für $k = s!$ entstehenden Feldes $\mathfrak{F}', \mathfrak{F}'', \ldots, \mathfrak{F}^{(s!)}$ die Folgenmischung

$$\mathfrak{G}^{(s)} = \mathfrak{F}' + \mathfrak{F}'' + \ldots + \mathfrak{F}^{(s!)}.$$

$\mathfrak{G}^{(s)}$ besitzt die Eigenschaft

A. Für jede natürliche Zahl $m \leqq s$ haben die m Folgen $\left(\frac{1}{m}\,\mathfrak{G}^{(s)}\right), \ldots, \left(\frac{m}{m}\,\mathfrak{G}^{(s)}\right)$ dieselbe Verteilung wie $\mathfrak{E}$ und bilden ein abbrechendes W-Feld im engeren Sinne.

Denn nach Regel II kommt der Folge $\left(\frac{r}{m}\,\mathfrak{G}^{(s)}\right)$ $(1 \leqq r \leqq m)$ die Verteilung von $\mathfrak{E}$ zu. Wegen $\left(\frac{r}{m}\,\mathfrak{G}^{(s)}\right) = \mathfrak{F}^{(r)} + \ldots + \mathfrak{F}^{(r+\lambda m)}$ mit $\lambda = \frac{s!}{m} - 1$ ist nach Regel III für $1 \leqq r_1 < \ldots < r_\nu \leqq m$

$$\left(\frac{r_1}{m}\,\mathfrak{G}^{(s)}\right) \ldots \left(\frac{r_\nu}{m}\,\mathfrak{G}^{(s)}\right) = \mathfrak{F}^{(r_1)} \ldots \mathfrak{F}^{(r_\nu)} + \ldots + \mathfrak{F}^{(r_1+\lambda m)} \ldots \mathfrak{F}^{(r_\nu+\lambda m)}.$$

In jeder der $\frac{s!}{m}$ Folgenverbindungen rechts kommt jede Merkmalverbindung $\mathfrak{m}^{(t_1)} \ldots \mathfrak{m}^{(t_\nu)}$ mit der Wahrscheinlichkeit $w^{(t_1)} \ldots w^{(t_\nu)}$ vor, folglich nach Regel I auch in $\left(\frac{r_1}{m}\,\mathfrak{G}^{(s)}\right) \ldots \left(\frac{r_\nu}{m}\,\mathfrak{G}^{(s)}\right)$.

Aus den Folgen $\mathfrak{G}', \mathfrak{G}'', \ldots$ wird nun die gewünschte Bernoullische Folge zusammengebaut. Das Konstruktionsverfahren benutzt dabei die Tatsache, daß $\mathfrak{G}^{(s)}$ die Eigenschaft A beibehält, wenn man endlich viele Glieder von $\mathfrak{G}^{(s)}$ durch ebenso viele andere ersetzt [9]).

[9]) Vgl. zum Beweise dieser Tatsache etwa Kamke, a. a. O. S. 7 und S. 139 f.

Es sei $1 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots$ eine Folge von Zahlen, die monoton zu Null abnehmen. Zu ε_1 bestimmen wir eine Zahl N_1 so, daß

$$\left|\frac{1}{n} H_n(\mathfrak{G}', \mathfrak{m}') - w'\right| < \frac{\varepsilon_1}{3} \quad \text{und} \quad \left|\frac{1}{n} H_n(\mathfrak{G}'', \mathfrak{m}') - w'\right| < \frac{\varepsilon_1}{3}$$

für alle $n \geqq N_1$ ist. Wir ersetzen die ersten N_1 Elemente von $\mathfrak{G}''$ durch die entsprechenden Elemente von $\mathfrak{G}'$ und erhalten die Folge

$$(1) \qquad \mathfrak{G}''_{\mathrm{abg}}\colon \mathfrak{G}'_1, \ldots, \mathfrak{G}'_{N_1}, \mathfrak{G}''_{N_1+1}, \mathfrak{G}''_{N_1+2}, \ldots$$

Für $n \geqq N_1$ gilt dann

$$H_n(\mathfrak{G}''_{\mathrm{abg}}, \mathfrak{m}') = H_{N_1}(\mathfrak{G}', \mathfrak{m}') + H_n(\mathfrak{G}'', \mathfrak{m}') - H_{N_1}(\mathfrak{G}'', \mathfrak{m}');$$

daraus folgt

$$\left|\frac{1}{n} H_n(\mathfrak{G}''_{\mathrm{abg}}, \mathfrak{m}') - w'\right| \leqq \left|\frac{1}{n} H_n(\mathfrak{G}'', \mathfrak{m}') - w'\right| + \frac{N_1}{n}\left|\frac{H_{N_1}(\mathfrak{G}', \mathfrak{m}')}{N_1} - \frac{H_{N_1}(\mathfrak{G}'' \mathfrak{m}')}{N_1}\right| < \frac{\varepsilon_1}{3} + 2\frac{\varepsilon_1}{3} = \varepsilon_1.$$

Da $\mathfrak{G}''_{\mathrm{abg}}$ aus $\mathfrak{G}''$ dadurch entsteht, daß endlich viele Glieder durch andere ersetzt werden, kommt nach der voranstehenden Bemerkung auch $\mathfrak{G}''_{\mathrm{abg}}$ die Eigenschaft A mit $s = 2$ zu. Wir können daher das Abänderungsverfahren nach folgender Vorschrift fortsetzen:

Liegt $\mathfrak{G}^{(s)}_{\mathrm{abg}}$ $(s \geqq 2)$ schon fest, so ist es möglich, zu $\varepsilon_s > 0$ eine durch $s!$ teilbare Zahl $N_s > N_{s-1}$ so ausfindig zu machen, daß für alle $n \geqq \frac{N_s}{s}$ und alle *endlich* vielen Zusammenstellungen

$$(a) \qquad 1 \leqq m \leqq s; \quad 1 < r_1 < \ldots < r_\nu \leqq m; \quad 1 \leqq t_1, \ldots, t_\nu \leqq s$$

die Ungleichungen

$$\left|\frac{1}{n} H_n\left\{\binom{r_1}{m}\mathfrak{G}^{(s)}_{\mathrm{abg}}\right) \ldots \binom{r_\nu}{m}\mathfrak{G}^{(s)}_{\mathrm{abg}}\right), \ \mathfrak{m}^{(t_1)} \ldots \mathfrak{m}^{(t_\nu)}\right\} - w^{(t_1)} \ldots w^{(t_\nu)}\right| < \frac{\varepsilon_s}{3}$$

und

$$\left|\frac{1}{n} H_n\left\{\binom{r_1}{m}\mathfrak{G}^{(s+1)}\right) \ldots \binom{r_\nu}{m}\mathfrak{G}^{(s+1)}\right), \ \mathfrak{m}^{(t_1)} \ldots \mathfrak{m}^{(t_\nu)}\right\} - w^{(t_1)} \ldots w^{(t_\nu)}\right| < \frac{\varepsilon_s}{3}$$

gelten. Nun bilden wir $\mathfrak{G}^{(s+1)}_{\mathrm{abg}}$, indem wir die ersten N_s Elemente aus $\mathfrak{G}^{(s+1)}$ durch die entsprechenden Elemente von $\mathfrak{G}^{(s)}_{\mathrm{abg}}$ ersetzen. Die entstehende Folge ist nach dem Konstruktionsverfahren von der Gestalt

$$(2) \quad \mathfrak{G}^{(s+1)}_{\mathrm{abg}}\colon \mathfrak{G}'_1, \ldots, \mathfrak{G}'_{N_1}, \mathfrak{G}''_{N_1+1}, \ldots, \mathfrak{G}''_{N_2}, \ldots, \mathfrak{G}^{(s)}_{N_s}, \mathfrak{G}^{(s+1)}_{N_s+1}, \mathfrak{G}^{(s+1)}_{N_s+2}, \ldots.$$

Für $n \geqq \frac{N_s}{s}$ gilt

$$H_n\left\{\binom{r_1}{m}\mathfrak{G}^{(s+1)}_{\mathrm{abg}}\right) \ldots \binom{r_\nu}{m}\mathfrak{G}^{(s+1)}_{\mathrm{abg}}\right), \mathfrak{m}^{(t_1)} \ldots \mathfrak{m}^{(t_\nu)}\right\} = \underline{\underline{H_{N_s}}}\left\{\binom{r_1}{m}\mathfrak{G}^{(s)}_{\mathrm{abg}}\right) \ldots\right\} + H_n\left\{\binom{r_1}{m}\mathfrak{G}^{(s+1)}\right) \ldots\right\} - \underline{\underline{H_{N_s}}}\left\{\binom{r_1}{m}\mathfrak{G}^{(s+1)}\right) \ldots\right\}.$$

Daher ist unter den Bedingungen (a) für $n \geqq \frac{1}{m} N_s$

$$(3)\left| \frac{1}{n} H_n \left\{ \binom{r_1}{m} \mathfrak{G}_{\text{abg}}^{(s+1)} \right) \dots \binom{r_\nu}{m} \mathfrak{G}_{\text{abg}}^{(s+1)} \right), \ \mathfrak{m}^{(t_1)} \dots \mathfrak{m}^{(t_\nu)} \Big\} - w^{(t_1)} \dots w^{(t_\nu)} \right| < \varepsilon_s.$$

$\mathfrak{G}_{\text{abg}}^{(s+1)}$ entsteht aus $\mathfrak{G}^{(s+1)}$ durch Abänderung von endlich vielen Gliedern und besitzt daher ebenfalls die Eigenschaft A mit $s+1$ statt s.

Betrachten wir die „Anfänge" $\mathfrak{G}'_1, \dots, \mathfrak{G}'_{N_1}$; $\mathfrak{G}'_1, \dots, \mathfrak{G}''_{N_2}$; $\dots$; $\mathfrak{G}'_1, \dots, \mathfrak{G}^{(s)}_{N_s}$; usw., so sehen wir, daß diese für $s \to \infty$ zu einer Grenzfolge $\mathfrak{G}$ führen, von der nun leicht zu zeigen ist, daß sie eine Bernoullische Folge mit der verlangten Verteilung darstellt.

Denn sind irgendwelche Zahlen m; $1 \leqq r_1 < \dots < r_\nu \leqq m$; $t_1, \dots, t_\nu$ gegeben, so wähle man $S = \text{Max}(m, t_1, \dots, t_\nu)$; dann ist für alle $s > S$ und $n \geqq \frac{N_s}{m}$ Ungleichung (3) richtig. Für $\frac{N_s}{m} < n \leqq \frac{N_{s+1}}{m}$ stimmen aber die Folgen $\binom{r_1}{m} \mathfrak{G}_{\text{abg}}^{(s+1)}\Big), \dots, \binom{r_\nu}{m} \mathfrak{G}_{\text{abg}}^{(s+1)}\Big)$ mit den Folgen $\binom{r_1}{m} \mathfrak{G}\Big), \dots, \binom{r_\nu}{m} \mathfrak{G}\Big)$ überein, und daher folgt für diese n aus (3)

$$\left| \frac{1}{n} H_n \left\{ \binom{r_1}{m} \mathfrak{G}\Big) \dots \binom{r_\nu}{m} \mathfrak{G}\Big), \ \mathfrak{m}^{(t_1)} \dots \mathfrak{m}^{(t_\nu)} \Big\} - w^{(t_1)} \dots w^{(t_\nu)} \right| < \varepsilon_s.$$

Da $\varepsilon_s \to 0$ für $s \to \infty$, ist also

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H_n \left\{ \binom{r_1}{m} \mathfrak{G}\Big) \dots \binom{r_\nu}{m} \mathfrak{G}\Big), \ \mathfrak{m}^{(t_1)} \dots \mathfrak{m}^{(t_\nu)} \Big\} = w^{(t_1)} \dots w^{(t_\nu)},$$

d. h. in der Folgenverbindung $\binom{r_1}{m} \mathfrak{G}\Big) \dots \binom{r_\nu}{m} \mathfrak{G}\Big)$ kommt in der Tat die Merkmalverbindung $\mathfrak{m}^{(t_1)} \dots \mathfrak{m}^{(t_\nu)}$ mit der Wahrscheinlichkeit $w^{(t_1)} \dots w^{(t_\nu)}$ vor.

§ 3.

Bernoullische Felder.

Wir wollen eine Folge

$$\mathfrak{B}: \mathfrak{E}', \mathfrak{E}'', \mathfrak{E}''', \dots$$

von Bernoullischen Folgen ein Bernoullisches Feld nennen; $\mathfrak{B}$ soll ein Bernoullisches Feld im engeren Sinne heißen, wenn für jede natürliche Zahl k das aus den Folgen

$$\binom{1}{k} \mathfrak{E}'\Big), \dots, \binom{k}{k} \mathfrak{E}'\Big), \ \binom{1}{k} \mathfrak{E}''\Big), \dots, \binom{k}{k} \mathfrak{E}''\Big), \ \binom{1}{k} \mathfrak{E}'''\Big), \dots$$

bestehende Feld ein W-Feld im engeren Sinne bildet.

Satz 4: *Es seien abzählbar viele W-Folgen $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{E}''$, $\dots$ gegeben, jedes $\mathfrak{E}^{(\nu)}$ habe hinsichtlich der Merkmale $\mathfrak{m}_1^{(\nu)}, \mathfrak{m}_2^{(\nu)}, \dots$ eine Verteilung $w_1^{(\nu)}, w_2^{(\nu)}, \dots$. Dann gibt es Folgen $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}''$, $\dots$ derart, daß $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ dieselbe Verteilung besitzt wie $\mathfrak{E}^{(\nu)}$ und daß das aus $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}''$, $\dots$ bestehende Feld ein Bernoullisches Feld im engeren Sinne bildet.*

Vorbemerkung: Setzt man in diesem Satz $\mathfrak{E}' = \mathfrak{E}'' = \ldots = \mathfrak{E}$, so ergibt sich noch einmal die Existenz Bernoullischer Folgen. Satz 4 ist aber auch ein Existenzsatz für W-Felder im engeren Sinne, denn jedes Bernoullische Feld im engeren Sinne ist nach Definition auch ein W-Feld im engeren Sinne.

Beweis zu Satz 4: Wir konstruieren zunächst ein „abbrechendes" Bernoullisches Feld im engeren Sinne. Dies geschieht in folgender Weise:

Jede der s Folgen $\mathfrak{E}', \ldots, \mathfrak{E}^{(s)}$ wird $s!$ mal hintereinander aufgeschrieben, auf diese $s \cdot s!$ Folgen $\mathfrak{E}', \ldots, \mathfrak{E}'$; $\mathfrak{E}'', \ldots, \mathfrak{E}''$: $\ldots$; $\mathfrak{E}^{(s)}, \ldots, \mathfrak{E}^{(s)}$ wenden wir Satz 2 an. Dieser liefert uns ein abbrechendes W-Feld im engeren Sinne $\mathfrak{F}', \ldots, \mathfrak{F}^{(s \cdot s!)}$, in welchem für $p = 1, \ldots, s$ die $s!$ Folgen $\mathfrak{F}^{((p-1)\,s!+1)}$, $\mathfrak{F}^{((p-1)\,s!+2)}, \ldots, \mathfrak{F}^{(p \cdot s!)}$ hinsichtlich der Verteilung mit $\mathfrak{E}^{(p)}$ übereinstimmen. Aus den Folgen $\mathfrak{F}^{((p-1)\,s!+1)}, \ldots, \mathfrak{F}^{(p \cdot s!)}$ bilden wir die Folgenmischung

$$\mathfrak{G}^{(p,\,s)} = \mathfrak{F}^{((p-1)\,s!+1)} + \ldots + \mathfrak{F}^{(p \cdot s!)}$$

und hiermit das Feld

$$\mathfrak{W}^{(s)}\colon\ \mathfrak{G}^{(1,\,s)}, \ldots, \mathfrak{G}^{(s,\,s)}.$$

Dieses besitzt die Eigenschaft

B. Für jedes $1 \leqq m \leqq s$ ist das Feld

$$\binom{1}{m}\mathfrak{G}^{(1,\,s)}, \ldots, \binom{m}{m}\mathfrak{G}^{(1,\,s)}, \ldots, \binom{1}{m}\mathfrak{G}^{(s,\,s)}, \ldots, \binom{m}{m}\mathfrak{G}^{(s,\,s)}$$

ein abbrechendes W-Feld im engeren Sinne.

Denn nach Konstruktion ist für $1 \leqq r \leqq m$ und $1 \leqq p \leqq s$

$$\binom{r}{m}\mathfrak{G}^{(p,\,s)} = \mathfrak{F}^{((p-1)\,s!+r)} + \ldots + \mathfrak{F}^{((p-1)\,s!+r+\lambda m))} \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{s!}{m} - 1.$$

Nach Regel I von § 2 besitzt also $\binom{r}{m}\mathfrak{G}^{(p,\,s)}$ dieselbe Verteilung wie $\mathfrak{E}^{(p)}$; ferner ist für jedes Indexsystem

$$0 \leqq r_{11} < \ldots < r_{1\,r_1} \leqq m; \ \ldots; \ 0 \leqq r_{s1} < \ldots < r_{s\,r_s} \leqq m \ ^{10})$$

nach Regel III von § 2

$$(1)\ \binom{r_{11}}{m}\mathfrak{G}^{(1,\,s)}\ldots\binom{r_{1\,r_1}}{m}\mathfrak{G}^{(1,\,s)}\ldots\binom{r_{s\,r_s}}{m}\mathfrak{G}^{(s,\,s)} = \mathfrak{F}^{(r_{11})}\ldots\mathfrak{F}^{(r_{1\,r_1})}\ldots\mathfrak{F}^{((s-1)\,s!\,+\,r_{s\,r_s})}$$
$$+ \ldots + \mathfrak{F}^{(r_{11}\,+\,\lambda m)}\ldots\mathfrak{F}^{((s-1)\,s!\,+\,r_{s\,r_s}\,+\,\lambda m)}.$$

Die Einzelfolgen jeder der rechts stehenden Folgenverbindungen stimmen hinsichtlich der Verteilung mit den entsprechenden Einzelfolgen der Folgenverbindung $\mathfrak{F}^{(1 \cdot s!)}\ldots\mathfrak{F}^{(1 \cdot s!)}\ldots\mathfrak{F}^{(s \cdot s!)}\ldots\mathfrak{F}^{(s \cdot s!)}$, in welcher die Folge $\mathfrak{F}^{(\mu \cdot s!)}$ genau r_μ-mal auftritt, überein und sind nach Konstruktion

---

[10]) Diese Ungleichungen sind so zu verstehen: Entweder sind für ein bestimmtes $\mu \leqq s$ alle $r_{\mu\,\nu} \geqq 1$, oder es ist $r_{\mu\,r_\mu} = 0$, und das letztere soll dann heißen, daß in der Folgenverbindung (1) $\mathfrak{G}^{(\mu,\,s)}$ nicht auftritt.

voneinander unabhängig. Nach § 2, Regel I folgt daraus, daß auch die Folgen $\left(\binom{r_{11}}{m}\mathfrak{G}^{(1,s)}\right), \ldots, \left(\binom{r_{s\nu_s}}{m}\mathfrak{G}^{(s,s)}\right)$ voneinander unabhängig sind. Damit ist unter Berücksichtigung von Fußnote 10 die Eigenschaft B nachgewiesen.

Aus der Folge $\mathfrak{W}', \mathfrak{W}'', \ldots$, von abbrechenden Bernoullischen Feldern wird nun das gewünschte Feld zusammengebaut. Benutzt wird dabei die Tatsache, daß $\mathfrak{W}^{(s)}$ die Eigenschaft B beibehält, wenn in beliebig vielen Zeilen endlich viele Ereignisse durch ebenso viele andere ersetzt werden.

Sei $1 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots$ eine Folge von Zahlen mit dem Grenzwert 0. Zu ε_1 bestimmen wir N_1 so, daß für alle $n \geqq N_1$

$$\left|\frac{1}{n}H_n(\mathfrak{G}^{(1,1)}, \mathfrak{m}_1') - w_1'\right| < \frac{\varepsilon_1}{3} \quad \text{und} \quad \left|\frac{1}{n}H_n(\mathfrak{G}^{(1,2)}, \mathfrak{m}_1') - w_1'\right| < \frac{\varepsilon_1}{3}$$

ist. Wir bilden

$$\mathfrak{G}_{\mathfrak{abg}}^{(1,2)}: \mathfrak{G}_1^{(1,1)}, \ldots, \mathfrak{G}_{N_1}^{(1,1)}, \mathfrak{G}_{N_1+1}^{(1,2)}, \mathfrak{G}_{N_1+2}^{(1,2)}, \ldots.$$

Für $n \geqq N_1$ gilt dann wegen

$$H_n(\mathfrak{G}_{\mathfrak{abg}}^{(1,2)}, \mathfrak{m}_1') = H_{N_1}(\mathfrak{G}^{(1,1)}, \ldots) + H_n(\mathfrak{G}^{(1,2)}, \ldots) - H_{N_1}(\mathfrak{G}^{(1,2)}, \ldots)$$

die Abschätzung

$$\left|\frac{1}{n}H_n(\mathfrak{G}_{\mathfrak{abg}}^{(1,2)}, \mathfrak{m}_1') - w_1'\right| < \varepsilon_1.$$

Dem aus $\mathfrak{G}_{\mathfrak{abg}}^{(1,2)}$ und $\mathfrak{G}^{(2,2)}$ (im folgenden auch mit $\mathfrak{G}_{\mathfrak{abg}}^{(2,2)}$ bezeichnet) bestehenden Feld $\mathfrak{W}_{\mathfrak{abg}}''$ kommt nach der vorangehenden Bemerkung immer noch die Eigenschaft B mit $s = 2$ zu. Das Abänderungsverfahren kann also fortgesetzt werden. Liegt $\mathfrak{W}_{\mathfrak{abg}}^{(s)}$ schon fest, so hat man zu ε_s eine durch $s!$ teilbare Zahl $N_s > N_{s-1}$ so ausfindig zu machen, daß

$$\left|\frac{1}{n}H_n\left\{\left(\binom{r_{11}}{m}\mathfrak{G}_{\mathfrak{abg}}^{(1,s)}\right)\ldots\left(\binom{r_{1\nu_1}}{m}\mathfrak{G}_{\mathfrak{abg}}^{(1,s)}\right)\ldots\left(\binom{r_{s\nu_s}}{m}\mathfrak{G}_{\mathfrak{abg}}^{(s,s)}\right), \mathfrak{m}'_{t_{11}}\ldots\mathfrak{m}'_{t_{1\nu_1}}\ldots\mathfrak{m}^{(s)}_{t_{s\nu_s}}\right\} - w'_{t_{11}}\ldots w^{(s)}_{t_{s\nu_s}}\right| < \frac{\varepsilon_s}{3}$$

ist und dieselben Ungleichungen auch für die ersten s Folgen von $\mathfrak{W}^{(s+1)}$ gelten für alle $n \geqq \frac{N_s}{s}$ und alle *endlich* vielen Zusammenstellungen

(b)
$$\begin{aligned} &1 \leqq m \leqq s; \quad 0 \leqq r_{11} < \ldots < r_{1\nu_1} \leqq m\,^{10}); \quad 1 \leqq t_{11}, \ldots, t_{1\nu_1} \leqq s; \\ &\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad\qquad 0 \leqq r_{s1} < \ldots < r_{s\nu_s} \leqq m; \qquad 1 \leqq t_{s1}, \ldots, t_{s\nu_s} \leqq s. \end{aligned}$$

Ersetzt man die ersten N_s Ereignisse der ersten s Folgen von $\mathfrak{W}^{(s+1)}$ durch die entsprechenden Elemente von $\mathfrak{W}_{\mathfrak{abg}}^{(s)}$ und setzt noch $\mathfrak{G}_{\mathfrak{abg}}^{(s+1,s+1)} = \mathfrak{G}^{(s+1,s+1)}$, so entsteht das Feld $\mathfrak{W}_{\mathfrak{abg}}^{(s+1)}$. Für $n \geqq \frac{N_s}{m}$ gilt dann

$$H_n\left\{\binom{r_{11}}{m}\mathfrak{G}^{(1,s+1)}_{\mathfrak{abg}}\right)\dots\binom{r_{sr_s}}{m}\mathfrak{G}^{(s,s+1)}_{\mathfrak{abg}}\Big),\ \mathfrak{m}'_{t_{11}}\dots\mathfrak{m}^{(s)}_{t_{sr_s}}\right\}$$
$$= H_{\underline{N_s}}\left\{\binom{r_{11}}{m}\mathfrak{G}^{(1,s)}_{\mathfrak{abg}}\Big)\dots\right\} + H_n\left\{\binom{r_{11}}{m}\mathfrak{G}^{(1,s-1)}\Big)\dots\right\} - H_{\underline{N_s}}\left\{\binom{r_{11}}{m}\mathfrak{G}^{(1,s+1)}\Big)\dots\right\}.$$

Daher ist unter den Bedingungen (b) für $n \geqq \frac{N_s}{m}$

$$(2)\qquad \left|\frac{1}{n}H_n\left\{\binom{r_{11}}{m}\mathfrak{G}^{(1,s+1)}_{\mathfrak{abg}}\Big)\dots\binom{r_{sr_s}}{m}\mathfrak{G}^{(s,s+1)}_{\mathfrak{abg}}\Big),\ \mathfrak{m}'_{t_{11}}\dots\mathfrak{m}^{(s)}_{t_{sr_s}}\right\}\right.$$
$$\left. - w'_{t_{11}}\dots w^{(s)}_{t_{sr_s}}\right| < \varepsilon_s.$$

Nach der vorangestellten Bemerkung besitzt $\mathfrak{W}^{(s+1)}_{\mathfrak{abg}}$ immer noch die Eigenschaft B mit $s+1$ satt s.

Für $s \to \infty$ haben die Felder $\mathfrak{W}^{(s)}_{\mathfrak{abg}}$ ein eindeutig bestimmtes Feld $\mathfrak{W}$: $\mathfrak{G}', \mathfrak{G}'', \dots$ zur Grenze. Von diesem ist leicht zu zeigen, daß es ein Bernoullisches Feld im engeren Sinne mit den vorgegebenen Verteilungen darstellt.

Denn sind irgendwelche Zahlen m, $0 \leqq r_{11} < \dots < r_{1r_1} \leqq m$; $\dots$: $0 \leqq r_{\mu 1} < \dots < r_{\mu r_\mu} \leqq m$ [10]); $t_{11}, \dots, t_{\mu r_\mu}$ gegeben, so wähle man $S = \mathrm{Max}(m, t_{11}, \dots, t_{\mu r_\mu})$, dann gilt (2) für alle $s > S$ und $n \geqq \frac{N_s}{m}$. Für $\frac{N_s}{m} < n \leqq \frac{N_{s+1}}{m}$ stimmen aber die Folgen $\left(\binom{r_{11}}{m}\mathfrak{G}^{(1,s+1)}_{\mathfrak{abg}}\right), \dots, \left(\binom{r_{\mu r_\mu}}{m}\mathfrak{G}^{(\mu,s+1)}_{\mathfrak{abg}}\right)$ mit den Folgen $\left(\binom{r_{11}}{m}\mathfrak{G}'\right), \dots, \left(\binom{r_{\mu r_\mu}}{m}\mathfrak{G}^{(\mu)}\right)$ überein und daher folgt für diese n aus (2)

$$\left|\frac{1}{n}H_n\left\{\binom{r_{11}}{m}\mathfrak{G}'\Big)\dots\binom{r_{\mu r_\mu}}{m}\mathfrak{G}^{(\mu)}\Big),\ \mathfrak{m}'_{t_{11}}\dots\mathfrak{m}^{(\mu)}_{t_{\mu r_\mu}}\right\} - w'_{t_{11}}\dots w^{(\mu)}_{t_{\mu r_\mu}}\right| < \varepsilon_s.$$

Da $\varepsilon_s \to 0$ für $s \to \infty$, ist also

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_n\left\{\binom{r_{11}}{m}\mathfrak{G}'\Big)\dots\binom{r_{\mu r_\mu}}{m}\mathfrak{G}^{(\mu)}\Big),\ \mathfrak{m}'_{t_{11}}\dots\mathfrak{m}^{(\mu)}_{t_{\mu r_\mu}}\right\} = w'_{t_{11}}\dots w^{(\mu)}_{t_{\mu r_\mu}}.$$

Das war aber zu beweisen.

Historische Bemerkungen. Die W-Felder wurden von Herrn Tornier [11]), allerdings in etwas anderer Form, in die Theorie eingeführt. In der zweiten der in Fußnote 11 angegebenen Arbeiten weist Herr Tornier die Existenz eines W-Feldes im engeren Sinne nach für den Fall, daß die Merkmale $\mathfrak{m}^{(r)}_1$, $\mathfrak{m}^{(r)}_2, \dots$ innerhalb einer jeden W-Folge einander ausschließen. In diesem Falle kann man zu vorgegebenen Verteilungs-

[11]) Journal für die reine und angewandte Mathematik **160** (1929), S. 177—198 und **163** (1930), S. 45—64; insbesondere S. 181 bzw. S. 47 f. Für den Existenzbeweis vergleiche man noch W. Feller und E. Tornier, Math. Annalen **107** (1933), S. 204—207. In einer späteren Arbeit [Acta mathematica **60** (1933), S. 239—380] hat Herr Tornier den Begriff des W-Feldes anders gefaßt.

zahlen $w_1^{(\nu)}$, $w_2^{(\nu)}$, ... immer W-Folgen mit dieser Verteilung konstruieren, wenn nur die Summe $w_1^{(\nu)} + w_2^{(\nu)} + \ldots \leqq 1$ ist [12]). In unserem Falle, bei dem auch Merkmale zugelassen sind, die einander nicht auszuschließen brauchen, kann eine widerspruchsfreie Verteilung nur durch eine W-Folge vorgegeben werden. Das bedeutet gegenüber der Formulierung von Herrn Tornier offenbar keine Einschränkung; daraus ergibt sich, daß der Existenzsatz von Herrn Tornier in Satz 4 enthalten ist. Das von Herrn Tornier angegebene Verfahren ist von dem hier benutzten naturgemäß verschieden. In § 4 werden wir ein Verfahren kennen lernen, welches jenem mehr angeglichen ist.

Bernoullische Folgen sind deswegen wichtig, weil sie „nachwirkungsfrei" im Sinne der Herren Reichenbach [13]) und Popper [14]) sind und weil für sie das Bernoullische Gesetz der großen Zahlen gilt. Die Existenz Bernoullischer Folgen wurde für den Fall zweier einander ausschließender Merkmale zuerst von Herrn Copeland [15]) nachgewiesen. In Satz 3, in dem die Merkmale in abzählbarer Menge auftreten dürfen und einander nicht auszuschließen brauchen, ist dieser Satz natürlich enthalten. Herrn Copelands Verfahren, die Bernoullische Folge aus abbrechenden W-Feldern aufzubauen, wurde auch hier benutzt, konnte aber in der Durchführung vereinfacht werden [16]).

Der Begriff eines Bernoullischen Feldes geht im Prinzip auf Herrn Copeland [17]) zurück. Näheres siehe am Schluß von § 5.

§ 4.

Indexfolgen.

Unter einer Indexfolge L verstehen wir eine endliche oder unendliche Menge von natürlichen Zahlen $1 \leqq L_1 < L_2 < \ldots$. Mit N sei insbesondere die Indexfolge N: 1, 2, 3, ... bezeichnet.

Summe $L' + L'' + \ldots$ und Durchschnitt $L'L'' \ldots$ von Indexfolgen sollen im gewöhnlichen mengentheoretischen Sinne verstanden

---

[12]) Siehe § 4, Satz 5a mit Fußnote.

[13]) H. Reichenbach, Math. Zeitschr. 34 (1932), S. 568—619; insbesondere S. 599—607. Vgl. auch H. Reichenbach, Wahrscheinlichkeitslehre, Leiden (1935), S. 134—146.

[14]) K. Popper, Logik der Forschung, Wien (1935), S. 106—109; ferner auch S. 115—117 und S. 215—217.

[15]) Copeland I, S. 535—547.

[16]) Für einen Sonderfall hat Herr v. Mises (Math. Annalen 108 (1933), S. 757—772) den Beweis ebenfalls vereinfacht.

[17]) A. H. Copeland, Math. Zeitschr. 37 (1933), S. 542—555, insbesondere S. 549—550.

werden; um dabei wieder Indexfolgen zu erhalten, sind die sich ergebenden Zahlenfolgen noch nach wachsender Größe zu ordnen. $L'L'' = 0$ soll bedeuten, daß die beiden Indexfolgen L' und L'' keine Zahlen gemeinsam haben. Ist L'' Teilfolge von L', so kann man dem „Merkmal" L'' eine nur aus Nullen und Einsen bestehende $\mathfrak{E}$-Folge umkehrbar eindeutig dadurch zuordnen, daß man in L' die zu L'' gehörigen Zahlen durch das Merkmal 1, die übrigen durch das Merkmal 0 ersetzt. Kommt in dieser Folge das Merkmal 1 mit einer Wahrscheinlichkeit w vor, so wollen wir auch sagen, die Indexfolge L'' kommt in L' mit der Wahrscheinlichkeit $W(L', L'') = w$ vor, und wollen L'' eine in bezug auf L' echte Indexfolge nennen. Für echte Indexfolgen gelten folgende Sätze:

I. *Eine Indexfolge L bleibt eine in bezug auf N echte Indexfolge mit derselben Wahrscheinlichkeit w, wenn man eine Indexfolge L', die in N mit der Wahrscheinlichkeit 0 vorkommt, aus L fortnimmt oder zu L hinzufügt.*

II. *Ist für zwei elementenfremde Indexfolgen $W(N, L') = w'$ und $W(N, L'') = w''$, so ist für die Summe $W(N, L' + L'') = w' + w''$.* (*Additionsgesetz.*)

III. *Ist $W(N, L') = w' \neq 0$ und $W(N, L'') = w''$ für eine Teilfolge L'' von L', so ist $W(L', L'') = \frac{w''}{w'}$.* (*Divisionsgesetz.*)

IV. *Ist L'' eine Teilfolge von L' und $W(N, L') = w'$, $W(L', L'') = w''$, so ist $W(N, L'') = w'w''$.* (*Multiplikationsgesetz.*)

Diese Sätze sind nur eine andere Formulierung von bekannten elementaren Sätzen der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Den folgenden Satz, der von Herrn Tornier[18]) herrührt, wollen wir für Indexfolgen und für Merkmale formulieren, da wir ihn in beiden Fassungen benutzen werden.

Satz 5: *Es seien endlich oder abzählbar viele Zahlen $w^{(\nu)} \geqq 0$ mit einer Summe $w' + w'' + \ldots \leqq 1$ gegeben.* (*Im Falle endlich vieler Zahlen $w^{(\nu)}$ muß die Summe den Wert 1 besitzen.*) *Dann gibt es ebenso viele* (*nichtleere*) *Indexfolgen $L', L'', \ldots$ mit folgenden Eigenschaften:*

a) *es ist $W(N, L^{(\nu)}) = w^{(\nu)}$;*

b) *keine zwei Indexfolgen haben Zahlen gemeinsam;*

c) *ihre Summe ist $L' + L'' + \ldots = N$.*

Satz 5a: *Es seien endlich oder abzählbar unendlich viele Zahlen $w^{(\nu)} \geqq 0$ mit einer Summe $w' + w'' + \ldots \leqq 1$ und ebenso viele einander ausschließende Merkmale $\mathfrak{m}', \mathfrak{m}'', \ldots$ gegeben.* (*Im Falle endlich vieler Zahlen $w^{(\nu)}$ muß die Summe den Wert 1 besitzen.*) *Dann gibt es eine nur aus den*

[18]) E. Tornier, Journal für die reine und angewandte Mathematik **163** (1930), S. 50 mit einer Berichtigung bei W. Feller und E. Tornier, a. a. O. S. 204 f.

Merkmalen $\mathfrak{m}', \mathfrak{m}'', \ldots$ *aufgebaute* $\mathfrak{E}$*-Folge, in welcher jedes Merkmal* $\mathfrak{m}^{(\nu)}$ *mit der Wahrscheinlichkeit* $w^{(\nu)}$ *auftritt.*

Trifft in einer $\mathfrak{E}$-Folge $\mathfrak{E}$: $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots$ ein Merkmal $\mathfrak{m}$ gerade auf die Ereignisse mit den Indizes $L_1, L_2, \ldots$ zu (und auf keine weiteren), so soll L: $L_1, L_2, \ldots$ die dem Merkmal $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{E}$ entsprechende Indexfolge heißen. Die $\mathfrak{E}$-Folge $\mathfrak{E}_{L_1}, \mathfrak{E}_{L_2}, \ldots$ wollen wir mit $(L\,\mathfrak{E})$ bezeichnen. Unter der Summe $(L'\,\mathfrak{E}) + (L''\,\mathfrak{E})$ verstehen wir die $\mathfrak{E}$-Folge $((L' + L'')\,\mathfrak{E})$. Sind endlich oder abzählbar unendlich viele $\mathfrak{E}$-Folgen $\mathfrak{E}', \mathfrak{E}'', \ldots$ und ebenso viele elementenfremde Indexfolgen $L', L'', \ldots$ gegeben, so kann man die Stellen der Indexfolge $L^{(\nu)}$ mit den Ereignissen der Folge $\mathfrak{E}^{(\nu)}$ belegen. Der Summe $L' + L'' + \ldots$, der Indexfolgen entspricht dann eindeutig eine $\mathfrak{E}$-Folge $\mathfrak{E}$, welche wir die aus $\mathfrak{E}', \mathfrak{E}'', \ldots$ bezüglich $L', L'', \ldots$ gebildete Folgenmischung nennen. Ist insbesondere $L' + L'' + \ldots = N$, so ist für $\nu = 1, 2, \ldots$ $(L^{(\nu)}\,\mathfrak{E}) = \mathfrak{E}^{(\nu)}$. Mit diesen Bezeichnungen läßt sich Regel I von § 2 zu folgendem Satz erweitern:

Satz 6: *In den endlich vielen* $\mathfrak{E}$*-Folgen* $\mathfrak{E}', \ldots, \mathfrak{E}^{(k)}$ *komme ein Merkmal* $\mathfrak{m}$ *mit der bei allen gleichen Wahrscheinlichkeit* w *vor; ferner seien* $L', \ldots, L^{(k)}$ *ebenso viele paarweise elementenfremde Indexfolgen, von denen jede unendlich viele Zahlen besitzt*[19]*. Dann kommt das Merkmal* $\mathfrak{m}$ *in der aus* $\mathfrak{E}', \ldots, \mathfrak{E}^{(k)}$ *bezüglich* $L', \ldots, L^{(k)}$ *gebildeten Folgenmischung* $\mathfrak{E}$ *wieder mit der Wahrscheinlichkeit* w *vor.*

Beweis: Es genügt offenbar, den Beweis für $k = 2$ zu führen.

In $\mathfrak{E}$ seien von den ersten n Ereignissen r_n' Ereignisse aus $\mathfrak{E}'$ und r_n'' Ereignisse aus $\mathfrak{E}''$; dann ist

(1) $\qquad r_n' + r_n'' = n \quad$ und $\quad H_n(\mathfrak{E}, \mathfrak{m}) = H_{r_n'}(\mathfrak{E}', \mathfrak{m}) + H_{r_n''}(\mathfrak{E}'', \mathfrak{m})$.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl n_0, so daß für alle $n \geqq n_0$ sowohl $r_n' > 0$ als auch $r_n'' > 0$ ist und außerdem

$$\left|\frac{1}{r_n'} H_{r_n'}(\mathfrak{E}', \mathfrak{m}) - w\right| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \left|\frac{1}{r_n''} H_{r_n''}(\mathfrak{E}'', \mathfrak{m}) - w\right| < \varepsilon$$

gilt. Aus

$$\frac{1}{n} H_n(\mathfrak{E}, \mathfrak{m}) = \frac{r_n'}{n} \frac{1}{r_n'} H_{r_n'}(\mathfrak{E}', \mathfrak{m}) + \frac{r_n''}{n} \frac{1}{r_n''} H_{r_n''}(\mathfrak{E}'', \mathfrak{m})$$

folgt dann für alle $n \geqq n_0$ bei Berücksichtigung von (1)

$$\left|\frac{1}{n} H_n(\mathfrak{E}, \mathfrak{m}) - w\right| \leqq \frac{r_n'}{n}\left|\frac{1}{r_n'} H_{r_n'}(\mathfrak{E}', \mathfrak{m}) - w\right| + \frac{r_n''}{n}\left|\frac{1}{r_n''} H_{r_n''}(\mathfrak{E}'', \mathfrak{m}) - w\right|$$

$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Unter Benutzung der vorangehenden Sätze dieses Paragraphen ist es nun möglich, Satz 1 noch einmal zu beweisen. Das Beweisverfahren ent-

[19]) $L', \ldots, L^{(k)}$ brauchen keine *echten* Indexfolgen zu sein.

spricht dem von Herrn Tornier[20]) bei der Konstruktion eines W-Feldes im engeren Sinne angegebenen. Das Ergebnis ist jedoch gegenüber Satz 1 insofern weitgehender, als jetzt eine der beiden vorgegebenen $\mathfrak{E}$-Folgen unverändert bleibt.

Satz 7: *Ist $\mathfrak{E}'$ eine $\mathfrak{E}$-Folge, welche hinsichtlich der Merkmale $\mathfrak{m}_1'$, $\mathfrak{m}_2'$, ... die Verteilung w_1', w_2', ... besitzt, und hat $\mathfrak{F}$ hinsichtlich der Merkmale $\mathfrak{m}_1''$, $\mathfrak{m}_2''$, ... ebenfalls eine Verteilung w_1'', w_2'', ..., so gibt es eine $\mathfrak{E}$-Folge $\mathfrak{E}''$ mit derselben Verteilung wie $\mathfrak{F}$, aber so, daß $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{E}''$ voneinander unabhängig sind.*

Beweis: Jedem Merkmal $\mathfrak{m}_\nu'$ entspricht eine Indexfolge L_ν'. Mit den Indexfolgen L_ν' als Elementen wird ein Feld in folgender Weise aufgebaut:

In die erste Zeile kommt L_1'. Ist $L_1' L_2' = 0$, so kommt L_2' ebenfalls in die erste Zeile; ist $L_1' L_2'$ dagegen nicht leer, so soll L_2' in die zweite Zeile kommen. Allgemein kommt die Indexfolge L_k' in die ν-te Zeile ($1 \leqq \nu \leqq k$), wenn ν die größte Zahl ist, für die L_k' mit jeder der vorangehenden $\nu - 1$ Zeilen Zahlen gemeinsam hat.

Damit ist ein Feld von Indexfolgen eindeutig festgelegt. Es werde mit

$$\mathfrak{S}: \begin{cases} S_1', S_2', \ldots \\ S_1'', S_2'', \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

bezeichnet und kann aus endlich oder unendlich vielen Zeilen bestehen. (Schließen sich die Merkmale $\mathfrak{m}_\nu'$ gegenseitig aus, so besteht $\mathfrak{S}$ aus nur einer Zeile.)

Aus dem Feld $\mathfrak{S}$ wird ein zweites Feld $\mathfrak{T}$ von Indexfolgen

$$\mathfrak{T}: \begin{cases} T_1', T_2', \ldots \\ T_1'', T_2'', \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

hergeleitet mit folgenden Eigenschaften:

a) Die Indexfolgen jeder Zeile sind paarweise elementenfremd (wie bei $\mathfrak{S}$);

b) jede Indexfolge besteht aus unendlich vielen Zahlen;

c) die Summe der Indexfolgen jeder Zeile ist N;

d) jeder Indexfolge $S_\mu^{(\nu)}$ von $\mathfrak{S}$, welche aus unendlich vielen Zahlen besteht, entspricht in $\mathfrak{T}$ eine Indexfolge $T_\lambda^{(\nu)}$ (gleicher Zeilennummer), welche sich von $S_\mu^{(\nu)}$ in höchstens endlich vielen Zahlen unterscheidet.

Das Feld $\mathfrak{T}$ wird aus $\mathfrak{S}$ so erzeugt: Zunächst wird jede Zeile, in der noch nicht alle Indizes von N vorkommen, durch eine Indexfolge so ergänzt, daß in *jeder* Zeile *alle* Indizes vorkommen. Stehen nun in einer

[20]) Näheres siehe S. 232f.

Zeile endlich viele (abzählbar unendlich viele) Indexfolgen mit nur endlich vielen Zahlen, so werden diese Indexfolgen sämtlich mit einer der übrigen (miteinander) vereinigt.

Wenn es gelingt, eine Folge $\mathfrak{E}''$ mit der durch $\mathfrak{F}$ gegebenen Verteilung zu konstruieren, die so beschaffen ist, daß für jedes $T_\mu^{(\nu)}$ von $\mathfrak{T}$ die $\mathfrak{E}$-Folge $(T_\mu^{(\nu)}\,\mathfrak{E}'')$ ebenfalls diese Verteilung besitzt, dann ist der Satz bewiesen. Denn es seien $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{m}''$ irgendwelche Merkmale, die in $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{E}''$ mit den Wahrscheinlichkeiten w', w'' vorkommen; L' sei die dem Merkmal $\mathfrak{m}'$ in $\mathfrak{E}'$ entsprechende Indexfolge. Besteht L' aus endlich vielen Zahlen, so kommt die Merkmalverbindung $\mathfrak{m}'\mathfrak{m}''$ in $\mathfrak{E}'\mathfrak{E}''$ von selbst mit der Wahrscheinlichkeit $w'w'' = 0$ vor. Enthält L' jedoch unendlich viele Zahlen, so gibt es in $\mathfrak{T}$ nach d) eine Indexfolge $T_\mu^{(\nu)}$, welche sich von L' nur in endlich vielen Elementen unterscheidet; das Gleiche ist daher auch bei den $\mathfrak{E}$-Folgen $(L'\,\mathfrak{E}'')$ und $(T_\mu^{(\nu)}\,\mathfrak{E}'')$ der Fall. Denjenigen Ereignispaaren $\mathfrak{E}_n'\mathfrak{E}_n''$, bei welchen auf $\mathfrak{E}_n'$ das Merkmal $\mathfrak{m}'$ zutrifft, entspricht die Indexfolge L'. Den Ereignispaaren, bei welchen außerdem noch auf $\mathfrak{E}_n''$ das Merkmal $\mathfrak{m}''$ zutrifft, entspricht eine Teilfolge L'', welche nun nach der Annahme am Anfang dieses Absatzes in L' mit der Wahrscheinlichkeit w'' und daher nach Regel IV von S. 234 in N mit der Wahrscheinlichkeit $w'w''$ vorkommt. Das bedeutet aber nichts anderes, als daß die Merkmalverbindung $\mathfrak{m}'\mathfrak{m}''$ in $\mathfrak{E}'\mathfrak{E}''$ mit der Wahrscheinlichkeit $w'w''$ vorkommt. Folglich sind $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{E}''$ voneinander unabhängig.

Bei der Konstruktion der $\mathfrak{E}$-Folge $\mathfrak{E}''$ werde der Fall vorweggenommen, daß das Feld $\mathfrak{T}$ aus endlich vielen Indexfolgen besteht; es sei

$$\mathfrak{T}: \begin{cases} T_1', \ldots, T_{m_1}' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ T_1^{(s)}, \ldots, T_{m_s}^{(s)}. \end{cases}$$

Wir bilden die $m_1 \ldots m_s$ Durchschnitte $T_1' \ldots T_1^{(s)}$; $T_1' \ldots T_1^{(s-1)}\, T_2^{(s)}$; $\ldots$; $T_{m_1}' \ldots T_{m_s}^{(s)}$ und belegen die Stellen jedes dieser Durchschnitte, sofern es unendlich viele Zahlen sind, mit den Ereignissen von $\mathfrak{F}$. Die übrigen Stellen füllen wir beliebig aus. Die bezüglich dieser Durchschnitte gebildete Folgenmischung ist schon die gewünschte Folge $\mathfrak{E}''$. Denn da sich jede Indexfolge $\mathfrak{T}_\mu^{(\nu)}$ aus $\frac{m_1 \ldots m_s}{m_\nu}$ dieser Durchschnitte zusammensetzt (man beachte dabei die Eigenschaft c) des Feldes), und da es auf endlich viele Glieder nicht ankommt, so besitzt $(T_\mu^{(\nu)}\,\mathfrak{E}'')$ nach Satz 6 die durch $\mathfrak{F}$ gegebene Verteilung; nach demselben Satz besitzt dann auch $\mathfrak{E}''$ diese Verteilung.

Um den allgemeinen Fall auf den Sonderfall zurückzuführen, wird das Feld $\mathfrak{T}$ in folgender Weise in ein Feld $\mathfrak{T}_s$ mit endlich vielen Indexfolgen umgewandelt.

α) $\mathfrak{T}_s$ besteht aus den ersten s Zeilen von $\mathfrak{T}$. Besteht $\mathfrak{T}$ aus weniger als s Zeilen, so soll $\mathfrak{T}_s$ alle Zeilen von $\mathfrak{T}$ umfassen.

β) In jeder Zeile werden die auf die Indexfolge $\mathfrak{T}_s^{(\nu)}$ $(1 \leqq \nu \leqq s)$ folgenden Indexfolgen (sofern es welche gibt) zu einer einzigen Indexfolge

$$R_s^{(\nu)} = T_{s+1}^{(\nu)} + T_{s+2}^{(\nu)} + \ldots = N - \sum_{\mu=1}^{s} T_\mu^{(\nu)}$$ zusammengefaßt.

Da $\mathfrak{T}_s$ aus endlich vielen Indexfolgen besteht, gibt es eine Folge $\mathfrak{F}^{(s)}$ mit der Eigenschaft

C. $\mathfrak{F}^{(s)}$ und alle $\mathfrak{E}$-Folgen $(T_\mu^{(\nu)}\, \mathfrak{F}^{(s)})$ mit $1 \leqq \nu, \mu \leqq s$ besitzen dieselbe Verteilung wie $\mathfrak{F}$.

Für $s = 1, 2, \ldots$ erhält man eine Folge von $\mathfrak{E}$-Folgen $\mathfrak{F}', \mathfrak{F}'', \ldots$; aus diesen wird die Folge $\mathfrak{E}''$ zusammengebaut. Das Verfahren entspricht dem beim Beweise von Satz 3 (S. 227 ff.) angegebenen. Zur Abkürzung wird $H_n(N, T_\mu^{(\nu)}) = n_\mu^{(\nu)}$ gesetzt. Es sei wieder $1 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots$ eine Folge positiver Zahlen mit dem Grenzwert 0.

Der s-te Schritt des Verfahrens ist folgender:

Liegt $\mathfrak{F}_{\text{abg}}^{(s)}$ (im Falle $s = 1$ ist $\mathfrak{F}_{\text{abg}}' = \mathfrak{F}'$) schon fest, so gibt es zu ε_s eine Zahl $N_s > N_{s-1}$, so daß

1. alle $n_\mu^{(\nu)} \geqq 1$ sind für die Indexfolgen $T_\mu^{(\nu)}$ des Feldes $\mathfrak{T}_s$; und

2. für alle $n \geqq N_s$; $t \leqq s$ und alle $T_\mu^{(\nu)}$ von $\mathfrak{T}_s$

$$\left| \frac{1}{n_\mu^{(\nu)}} H_{n_\mu^{(\nu)}} \left\{ (T_\mu^{(\nu)}\, \mathfrak{F}_{\text{abg}}^{(s)}),\, \mathfrak{m}_t'' \right\} - w_t'' \right| < \frac{\varepsilon_s}{3}; \quad \left| \frac{1}{n} H_n (\mathfrak{F}_{\text{abg}}^{(s)}, \mathfrak{m}_t'') - w_t'' \right| < \frac{\varepsilon_s}{3}$$

und

$$\left| \frac{1}{n_\mu^{(\nu)}} H_{n_\mu^{(\nu)}} \left\{ (T_\mu^{(\nu)}\, \mathfrak{F}^{(s+1)}),\, \mathfrak{m}_t'' \right\} - w_t'' \right| < \frac{\varepsilon_s}{3}; \quad \left| \frac{1}{n} H_n (\mathfrak{F}^{(s+1)}, \mathfrak{m}_t'') - w_t'' \right| < \frac{\varepsilon_s}{3}$$

ist. Nun wird

$$\mathfrak{F}_{\text{abg}}^{(s+1)}: \mathfrak{F}_1', \ldots, \mathfrak{F}_{N_1}', \mathfrak{F}_{N_1+1}'', \ldots, \mathfrak{F}_{N_s}^{(s)}, \mathfrak{F}_{N_s+1}^{(s+1)}, \mathfrak{F}_{N_s+2}^{(s+1)}, \ldots$$

gebildet; für alle $n \geqq N_s$; $t \leqq s$ und alle $T_\mu^{(\nu)}$ von $\mathfrak{T}_s$ gilt dann nach demselben Schluß wie früher

$$(2) \quad \begin{cases} \left| \frac{1}{n_\mu^{(\nu)}} H_{n_\mu^{(\nu)}} \left\{ (T_\mu^{(\nu)}\, \mathfrak{F}_{\text{abg}}^{s+1}),\, \mathfrak{m}_t'' \right\} - w_t'' \right| < \varepsilon_s, \\ \left| \frac{1}{n} H_n (\mathfrak{F}_{\text{abg}}^{(s+1)}, \mathfrak{m}_t'') - w_t'' \right| < \varepsilon_s. \end{cases}$$

$\mathfrak{F}_{\text{abg}}^{(s+1)}$ entsteht aus $\mathfrak{F}^{(s+1)}$ dadurch, daß endlich viele Ereignisse durch ebenso viele andere ersetzt werden; dabei bleibt die Eigenschaft C (mit $s+1$ statt s) erhalten. Das Verfahren kann also fortgesetzt werden.

Die $\mathfrak{E}$-Folgen $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}''_{\text{abg}}$, $\mathfrak{F}'''_{\text{abg}}$, ... haben, da alle $\mathfrak{F}^{(\nu)}_{\text{abg}}$ für $\nu > s$ in den Elementen mit einem Index $\leqq N_s$ übereinstimmen, eine Folge $\mathfrak{E}''$ zur Grenze, von der nun leicht zu zeigen ist, daß sie alle an sie gestellten Bedingungen erfüllt.

Denn sind Zahlen ν, μ, t gegeben, so wähle man $S = \text{Max}(\nu, \mu, t)$, dann gilt für alle $s > S$ und für $n \geqq N_s$ Ungleichung (2). Für $N_s < n \leqq N_{s+1}$ stimmt aber $\mathfrak{F}^{(s+1)}_{\text{abg}}$ mit $\mathfrak{E}''$ überein, folglich gilt für diese n

$$\left| \frac{1}{n^{(\nu)}_{\mu}} H_{n^{(\nu)}_{\mu}} \left\{ (T^{(\nu)}_{\mu}\, \mathfrak{E}''), \mathfrak{m}''_t \right\} - w''_t \right| < \varepsilon_s \quad \text{und} \quad \left| \frac{1}{n} H_n (\mathfrak{E}'', \mathfrak{m}''_t) - w''_t \right| < \varepsilon_s.$$

Da für $s \to \infty$ die Zahlen $\varepsilon_s \to 0$ streben, so gilt

$$\lim_{n^{(\nu)}_{\mu} \to \infty} \frac{1}{n^{(\nu)}_{\mu}} H_{n^{(\nu)}_{\mu}} \left\{ (T^{(\nu)}_{\mu}\, \mathfrak{E}''), \mathfrak{m}''_t \right\} = w''_t \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H_n (\mathfrak{E}'', \mathfrak{m}''_t) = w''_t.$$

Bemerkung: Man kann auch auf diesem Wege zu abbrechenden W-Feldern mit vorgeschriebener Verteilung gelangen; auf die Wiedergabe des etwas langwierigen Verfahrens sei hier verzichtet.

Satz 6 kann auch auf unendlich viele Indexfolgen ausgedehnt werden:

Satz 8: *Es seien unendlich viele $\mathfrak{E}$-Folgen $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{E}''$, ... gegeben, in denen ein Merkmal* $\mathfrak{m}$ *mit der bei allen gleichen Wahrscheinlichkeit w vorkommt; L', L'', ... seien unendlich viele Indexfolgen mit folgenden Eigenschaften:*

a) *jede Indexfolge besteht aus unendlich vielen Zahlen;*

b) *keine zwei Indexfolgen haben Zahlen gemeinsam;*

c) *es ist $L' + L'' + \ldots = L$ und dabei*

d) $$\overline{\lim_{k \to \infty}}\ \underline{\lim_{n \to \infty}} \frac{H_n (L, L' + \ldots + L^{(k)})}{n} = 1.$$

Dann kommt in der aus $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{E}''$, ... bezüglich L', L'', ... gebildeten Folgenmischung $\mathfrak{E}$ das Merkmal $\mathfrak{m}$ *wieder mit der Wahrscheinlichkeit w vor.*

Beweis. Wegen d) gibt es zu $\varepsilon > 0$ eine Zahl k, so daß

$$\underline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n} H_n (L, L' + \ldots + L^{(k)}) > 1 - \varepsilon$$

ist. Zu der festen Zahl k und zu $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl n_0, so daß für alle $n \geqq n_0$

$$\frac{1}{n} H_n (L, L' + \ldots + L^{(k)}) > 1 - 2\varepsilon \tag{3}$$

ist. Bezeichnet man die aus $\mathfrak{E}'$, ..., $\mathfrak{E}^{(k)}$ bezüglich L', ..., $L^{(k)}$ gebildete Folgenmischung mit $\mathfrak{E}' + \ldots + \mathfrak{E}^{(k)}$, so gelten dieselben Ungleichungen auch bezüglich des Vorkommens des „Merkmals“ $\mathfrak{E}' + \ldots + \mathfrak{E}^{(k)}$ in der Folgenmischung $\mathfrak{E}$, d. h: es ist für dieselben n

$$\frac{1}{n} H_n (\mathfrak{E}, \mathfrak{E}' + \ldots + \mathfrak{E}^{(k)}) > 1 - 2\varepsilon. \tag{3a}$$

Gehören in $\mathfrak{E}$ unter den ersten n Ereignissen r_n der Folgenmischung $\mathfrak{E}' + \ldots + \mathfrak{E}^{(k)}$ an, so gilt offenbar

$$H_{r_n}(\mathfrak{E}' + \ldots + \mathfrak{E}^{(k)}, \mathfrak{m}) \leqq H_n(\mathfrak{E}, \mathfrak{m}) \leqq H_{r_n}(\mathfrak{E}' + \ldots + \mathfrak{E}^{(k)}, \mathfrak{m}) + (n - r_n),$$

also

$$\left(\frac{H_{r_n}(\mathfrak{E}' + \ldots + \mathfrak{E}^{(k)}, \mathfrak{m})}{r_n} - w\right)\frac{r_n}{n} - \left(1 - \frac{r_n}{n}\right)w \leqq \frac{H_n(\mathfrak{E}, \mathfrak{m})}{n} - w$$

$$\leqq \left(\frac{H_{r_n}(\mathfrak{E}' + \ldots + \mathfrak{E}^{(k)}, \mathfrak{m})}{r_n} - w\right)\frac{r_n}{n} + \left(1 - \frac{r_n}{n}\right)(1 - w).$$

Nach Satz 6 und Ungleichung (3a) kann man n_0 so groß wählen, daß für alle $n \geqq n_0$

$$\left|\frac{H_{r_n}(\mathfrak{E}' + \ldots + \mathfrak{E}^{(k)}, \mathfrak{m})}{r_n} - w\right| < \varepsilon \quad \text{und} \quad 1 \geqq \frac{r_n}{n} > 1 - 2\varepsilon$$

gilt. Daraus ergibt sich die Behauptung.

Für *echte* Indexfolgen gilt

Satz 9: *Es seien die endlich oder unendlich vielen $\mathfrak{E}$-Folgen $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{E}''$, ... in bezug auf ein Merkmal $\mathfrak{m}$ W-Folgen mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten w', w'', ... Ferner seien L', L'', ... ebenso viele Indexfolgen mit den folgenden Eigenschaften:*

a) *jede Indexfolge besteht aus unendlich vielen Zahlen;*

b) *keine zwei Indexfolgen haben Zahlen gemeinsam;*

c) *es ist $L' + L'' + \ldots = N$;*

d) *$L^{(k)}$ kommt in N mit der Wahrscheinlichkeit $a^{(k)}$ vor, und es ist*

e) $a' + a'' + \ldots = 1$.

Dann ist auch die aus $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{E}''$, ... bezüglich L', L'', ... gebildete Folgenmischung $\mathfrak{E}$ für das Merkmal $\mathfrak{m}$ eine W-Folge mit der Wahrscheinlichkeit

$$w = a'w' + a''w'' + \ldots.$$

Beweis: Für endlich viele $\mathfrak{E}$-Folgen ist der Satz klar. Denn dem aus der Folge $\mathfrak{E}^{(k)}$ herrührenden Merkmal $\mathfrak{m}$ entspricht, da das „Merkmal" $\mathfrak{E}^{(k)}$ in $\mathfrak{E}$ mit der Wahrscheinlichkeit $a^{(k)}$ vorkommt, nach dem Multiplikationsgesetz eine Teilfolge von $L^{(k)}$ mit der Wahrscheinlichkeit $a^{(k)}w^{(k)}$. Da für $k = 1, 2, \ldots$ alle diese Teilfolgen elementenfremd sind, folgt aus dem Additionsgesetz die Behauptung.

Im Falle unendlich vieler $\mathfrak{E}$-Folgen sei n_k die Anzahl derjenigen unter den ersten n Ereignissen von $\mathfrak{E}$, die von $\mathfrak{E}^{(k)}$ herrühren. Dann ist offenbar $H_n(\mathfrak{E}, \mathfrak{m}) = \sum_{k=1}^{\infty} H_{n_k}(\mathfrak{E}^{(k)}, \mathfrak{m})$, und für die Differenz

$$D_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_{n_k}(\mathfrak{E}^{(k)}, \mathfrak{m})}{n} - \sum_{k=1}^{\infty} a^{(k)}w^{(k)}$$

gilt bei $n_k \geqq 1$

$$|D_n| \leqq \left| \sum_{k=1}^{p} \left\{ \frac{H_{n_k}(\mathfrak{E}^{(k)}, \mathfrak{m})}{n_k} \cdot \frac{n_k}{n} - a^{(k)} w^{(k)} \right\} \right| + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{H_{n_k}(\mathfrak{E}^{(k)}, \mathfrak{m})}{n} + \sum_{k=p+1}^{\infty} a^{(k)} w^{(k)}$$

$$= \quad |\mathrm{I}| \quad + \quad \mathrm{II} \quad + \quad \mathrm{III}.$$

Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so wird p so gewählt, daß

$$a^{(p+1)} + a^{(p+2)} + \ldots < \varepsilon$$

ist; dieses p bleibt fest. Wegen

$$\frac{H_{n_k}(\mathfrak{E}^{(k)}, \mathfrak{m})}{n_k} \cdot \frac{n_k}{n} \to w^{(k)} a^{(k)}$$

gibt es weiter ein q, so daß

$$\left| \frac{H_{n_k}(\mathfrak{E}^{(k)}, \mathfrak{m})}{n_k} \cdot \frac{n_k}{n} - a^{(k)} w^{(k)} \right| < \frac{\varepsilon}{p} \quad \text{und} \quad \left| \frac{n_k}{n} - a^{(k)} \right| < \frac{\varepsilon}{p}$$

für alle $k = 1, \ldots, p$ und alle $n \geqq q$ ist. Dann ist

$$|\mathrm{I}| < p \frac{\varepsilon}{p} = \varepsilon.$$

$$\mathrm{III} < a^{(p+1)} + a^{(p+2)} + \ldots < \varepsilon.$$

$$\mathrm{II} \leqq \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{n_k}{n} = 1 - \sum_{k=1}^{p} \frac{n_k}{n} = \left(a' - \frac{n_1}{n}\right) + \ldots + \left(a^{(p)} - \frac{n_p}{n}\right) + a^{(p+1)} + a^{(p+2)} + \ldots$$

$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

§ 5.

Geometrische Verteilungen.

Wir wollen unsere bisherigen Ergebnisse auf die Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten anwenden.

Eine Folge von reellen Zahlen

$$\mathfrak{E}: x_1, x_2, x_3, \ldots$$

heißt eine Ereignisfolge mit geometrischer Verteilung, kurz auch Verteilungsfolge, wenn sie folgende Bedingung D erfüllt:

D. Für jedes *endliche* Intervall i existiert die Wahrscheinlichkeit $W(\mathfrak{E}, i)$ dafür, daß ein Punkt x der Folge $\mathfrak{E}$ im Intervall i liegt.

Die überall definierte Intervallfunktion $W(\mathfrak{E}, i)$ wollen wir die zu $\mathfrak{E}$ gehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion, kurz W-Funktion, nennen.

Bei dem Intervall i ist auf die Endpunkte zu achten. Sind a, b diese Endpunkte, so sind vier verschiedene Möglichkeiten zu unterscheiden, je nachdem es sich um das offene Intervall (a, b), das nach rechts offene

Intervall $\langle a, b)$, das nach links offene Intervall $(a, b\rangle$, oder um das beiderseitig abgeschlossene Intervall $\langle a, b\rangle$ handelt. Diesen vier Fällen entsprechen die vier Wahrscheinlichkeitswerte $W(\mathfrak{E}; (a, b))$, $W(\mathfrak{E}; \langle a, b))$, $W(\mathfrak{E}; (a, b\rangle)$ und $W(\mathfrak{E}; \langle a, b\rangle)$. Die Differenz $W(\mathfrak{E}; (a, b\rangle) - W(\mathfrak{E}; (a, b))$[21] gibt offenbar die Wahrscheinlichkeit $W(\mathfrak{E}, b)$ an, mit welcher der Punkt b in $\mathfrak{E}$ auftritt. Es ist also[21]

$$W(\mathfrak{E}, b) = W(\mathfrak{E}; a, b\rangle) - W(\mathfrak{E}; a, b)).$$

Ferner ist nach der Definition der Wahrscheinlichkeit

$$0 \leqq W(\mathfrak{E}; (a, b)) \leqq W(\mathfrak{E}; \langle a, b)), \quad W(\mathfrak{E}; (a, b\rangle) \leqq W(\mathfrak{E}; \langle a, b\rangle) \leqq 1,$$

und nach dem Additionsgesetz für $a < b < c$

$$W(\mathfrak{E}; a, b)) + W(\mathfrak{E}; \langle b, c) = W(\mathfrak{E}; a, b\rangle) + W(\mathfrak{E}; (b, c) = W(\mathfrak{E}; a, c).$$

Wir wollen nun ganz allgemein und unabhängig von dem Begriff der Verteilungsfolge eine für jedes endliche Intervall i[22] definierte Intervallfunktion $F(i)$, welche die folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt[23], eine additive Intervallfunktion, kurz I-Funktion nennen:

(1) $$F(b) = F(a, b\rangle) - F(a, b)) \quad \text{für } a < b;$$

(2) $$0 \leqq F(i) \leqq 1 \text{ für jedes } i;$$

(3) $$F(a, b)) + F(\langle b, c) = F(a, b\rangle) + F((b, c) = F(a, c) \quad \text{für } a < b < c.$$

Eine I-Funktion $F(i)$ soll eine I-Funktion zweiter Art heißen, wenn es ein abgeschlossenes Intervall i_0 gibt, derart daß

1. $F(i_0) < 1$ ist und

2. $F(i) = 0$ ist für jedes ganz außerhalb i_0 liegende Intervall i.

In jedem andern Falle wollen wir $F(i)$ eine I-Funktion erster Art nennen.

Nach dem Vorangehenden ist jede W-Funktion eine I-Funktion. Im folgenden wollen wir zeigen, daß es auch umgekehrt zu jeder I-Funktion Verteilungsfolgen gibt, welche sie als W-Funktion haben.

Bei festgehaltenem Anfangspunkt a sind die Funktionen $F(a, x))$ und $F(a, x\rangle)$, gleichgültig, ob es sich um I-Funktionen erster oder zweiter Art handelt, monotone Funktionen von x. Daher sind die folgenden Grenzwerte vorhanden und es ist

(4) $$\lim_{x \to b-0} F(a, x\rangle) = \lim_{x \to b-0} F(a, x)); \quad \lim_{x \to b+0} F(a, x\rangle) = \lim_{x \to b+0} F(a, x)).$$

---

[21]) Offenbar hat diese Differenz denselben Wert wie $W(\mathfrak{E}; \langle a, b\rangle) - W(\mathfrak{E}; \langle a, b))$. Immer dann, wenn es nur darauf ankommt, daß in einer Formel an allen Stellen die gleiche Intervallklammer steht, werden wir sie in Zukunft weglassen.

[22]) i darf auch in einen Punkt entartet sein.

[23]) Die drei Bedingungen entsprechen den drei für W-Funktionen festgestellten Eigenschaften. — Bemerkenswert ist, daß hiernach auch $F \equiv 0$ zulässig ist.

Da es also keine Rolle spielt, ob hinter x eine runde oder eckige Klammer steht, lassen wir sie hier ebenfalls weg. Offenbar ist

$$(5) \qquad \lim_{x \to b-0} F(a, x) \leqq F(a, b)) \leqq F(a, b\rangle) \leqq \lim_{x \to b+0} F(a, x).$$

Ist $F(a, x)$ an der Stelle b stetig, so fallen alle vier Werte zusammen, und aus (1) folgt dann $F(b) = 0$. An einer Stetigkeitsstelle b von $F(a, x)$ ist auch die Funktion $F(x, c)$ $(a < b < c)$ stetig. Das ergibt sich aus den Gleichungen

$$F(a, c) = F(a, x\rangle) + F((x, c) = F(a, x)) + F(\langle x, c) \quad (a < x < c) \text{ und } (4).$$

Die in (5) auftretenden Größen können alle vier voneinander verschieden sein. Daß dies sogar für W-Funktionen von Verteilungsfolgen möglich ist, zeigt das Beispiel

$$\mathfrak{E}\colon\ -1,\ +1,\ 0,\ -{}^1/_2,\ +{}^1/_2,\ 0,\ -{}^1/_3,\ +{}^1/_3,\ 0,\ -{}^1/_4,\ \ldots$$

für $a < 0$ und $b = 0$.

Als monotone Funktionen besitzen $F(a, x\rangle)$ und $F(a, x))$ höchstens abzählbar unendlich viele Unstetigkeitsstellen; also ist auch die Gesamtheit der für $a = -1, -2, \ldots$ entstehenden Unstetigkeitsstellen abzählbar. Diese denken wir uns in einer Folge

$$U\colon U_1,\ U_2,\ U_3,\ \ldots$$

angeordnet.

Bedingung D, welche eine Verteilungsfolge zu erfüllen hat, ersetzen wir jetzt durch eine der Form nach weniger verlangende. Zu diesem Zwecke bilden wir für jede I-Funktion eine gewisse Mengenfolge. Zunächst führen wir abzählbar viele Punktmengen $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots$ mit folgenden Eigenschaften ein:

a) Jede Menge $\mathfrak{m}_k$ besteht aus abzählbar vielen Punkten der Zahlengeraden, hat keinen Häufungspunkt und ist nach keiner Seite beschränkt.

b) Jede Menge $\mathfrak{m}_k$ enthält die vorhergehende als echte Teilmenge.

c) Mindestens die ersten k Unstetigkeitsstellen $U_1, \ldots, U_k$ der Anordnung U kommen in $\mathfrak{m}_k$ vor.

d) Ist δ der Abstand zweier aufeinanderfolgender Punkte von $\mathfrak{m}_k$, so soll $\overline{\text{fin}}_{k \text{ fest}}\, \delta = G_k \to 0$ für $k \to \infty$ streben.

Aus jeder Punktmenge $\mathfrak{m}_k$ bilden wir eine Intervallmenge J_k in der Weise, daß wir je zwei auf der Zahlengeraden unmittelbar aufeinanderfolgende Punkte von $\mathfrak{m}_k$ als die Endpunkte eines *offenen* Intervalls von J_k nehmen. Die Punkte von $\mathfrak{m}_k$ und die Intervalle von J_k werden zu einer

Menge vereinigt. Die Elemente dieser Menge denken wir uns als Folge geschrieben und bezeichnen sie mit $j_r^{(k)}$ $(r = 1, 2, \ldots)$; an dieser Bezeichnung werden wir bis zum Schluß festhalten. Hiermit ergibt sich die folgende Verallgemeinerung eines von Herrn Copeland[24]) für totalstetige I-Funktionen aufgestellten Satzes:

Satz 10: *Die Verteilungsfolge* $\mathfrak{E}$: $x_1, x_2, \ldots$ *erfülle die Bedingung*

E. *Für jedes Element* $i = j_r^{(k)}$ *existiert die Wahrscheinlichkeit* $W(\mathfrak{E}, i)$ *dafür, daß ein Punkt* x *von* $\mathfrak{E}$ *in* i *liegt*[25]), *und es gibt eine* I-*Funktion* $F(i)$, *so daß* $W(\mathfrak{E}, i) = F(i)$ *ist.*

Dann erfüllt $\mathfrak{E}$ *auch die Bedingung* A, *und es ist für jedes* i $W(\mathfrak{E}, i) = F(i)$.

Beweis: Es sei ein beliebiges Intervall i gegeben.

α) Gehören die beiden Endpunkte von i Mengen $\mathfrak{m}_k$ an, so kann i als endliche Summe von Elementen $j_r^{(k)}$ dargestellt werden. Aus dem Additionsgesetz für Wahrscheinlichkeiten und aus der Additionseigenschaft von $F(i)$ folgt dann die Behauptung.

β) Gehören die Endpunkte von i zu keinem $\mathfrak{m}_k$, so sind sie wegen c) Stetigkeitsstellen von $F(i)$. Das Intervall i läßt sich nach d) beliebig genau durch Intervalle i_1, i_2 annähern, die zu den in α) behandelten gehören und für die i_1 in i, i in i_2 liegt. Offenbar ist nun

$$H_n(\mathfrak{E}, i_1) \leqq H_n(\mathfrak{E}, i) \leqq H_n(\mathfrak{E}, i_2).$$

Da nach α) $\frac{1}{n} H_n(\mathfrak{E}, i_\nu) \to F(i_\nu)$ $(\nu = 1, 2)$ für $n \to \infty$ ist, folgt hieraus

$$F(i_1) \leqq \underline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n} H_n(\mathfrak{E}, i) \leqq \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n} H_n(\mathfrak{E}, i) \leqq F(i_2).$$

Da die Endpunkte von i Stetigkeitspunkte sind, also $F(i)$ beliebig genau durch $F(i_1)$ und $F(i_2)$ approximiert werden kann, ergibt sich hieraus $W(\mathfrak{E}, i) = F(i)$.

γ) Gehört nur einer der Endpunkte, etwa a, zu den $\mathfrak{m}_k$, so gehe man wie unter β) vor, jedoch mit der Vorschrift, daß a gemeinsamer Endpunkt von i, i_1 und i_2 sein soll.

Betrachtet man statt der Folge $\mathfrak{E}$ eine Folgenverbindung $\mathfrak{E}' \ldots \mathfrak{E}^{(m)}$, so erhält man den

Zusatz: *Erfüllen die* m *Verteilungsfolgen* $\mathfrak{E}', \ldots, \mathfrak{E}^{(m)}$ *die Bedingung* E *mit* $F'(i), \ldots, F^{(m)}(i)$, *und sind sie hinsichtlich der Zugehörigkeit ihrer*

---

[24]) A. H. Copeland, Admissible Numbers in the Theory of Geometrical Probability, American Journal of Mathematics 53 (1931), S. 158, Satz 3. Diese Arbeit wird künftig als Copeland II zitiert.

[25]) Ist i ein Punkt, so soll i mit x zusammenfallen.

Punkte zu den Intervallen $j_r^{(k)}$ $(r, k = 1, 2, \ldots)$ *voneinander unabhängig, so sind sie auch hinsichtlich aller Intervalle* i *voneinander unabhängig.*

Der Beweis ist für die Folgenverbindung $\mathfrak{E}' \ldots \mathfrak{E}^{(m)}$ ganz ähnlich zu führen wie für eine einzelne Folge.

Der Satz 10 ist einer der Hauptsätze, die es ermöglichen, aus unseren Existenzsätzen für nichtgeometrische Verteilungen solche für geometrische Verteilungen herzuleiten. Neben Satz 10 bilden ein weiteres Hilfsmittel gewisse $\mathfrak{E}$-Folgen, die aus den Elementen $j_r^{(k)}$ aufgebaut sind. Hier wollen wir uns auf I-Funktionen erster Art beschränken.

Definition: Eine Folge von Intervallen und Punkten

$$I\colon I_1, I_2, \ldots$$

heißt eine ausgezeichnete Intervallfolge für die I-Funktion erster Art $F(i)$, wenn sie folgende Eigenschaften aufweist:

a) Jedes I_s ist ein Element $j_r^{(k)}$.

b) Ist $F(i) = 0$ für ein Element $i = j_r^{(k)}$, so soll in I kein in i liegendes Element[26]) auftreten.

c) Ist $\mathfrak{M}(i)$ die Menge der Elemente von I, die in einem $i = j_r^{(k)}$ liegen[26]), so sollen die zu $\mathfrak{M}(i)$ gehörigen Elemente (das Merkmal $\mathfrak{M}(i)$) in I mit der Wahrscheinlichkeit $W(I, \mathfrak{M}(i)) = F(i)$ vorkommen.

Satz 11: *Zu jeder* I*-Funktion erster Art* $F(i)$ *gibt es ausgezeichnete Intervallfolgen.*

Beweis: Wir beschränken uns auf solche $j_r^{(k)}$, für die $F(j_r^{(k)}) > 0$ ist. Da $F(i)$ eine I-Funktion erster Art ist, hat für diese $j_r^{(k)}$ bei festem k die Summe der $F(j_r^{(k)})$, falls sie endlich viele Glieder enthält, den Wert 1. Nach Satz 5a mit $w^{(r)} = F(j_r^{(k)})$ gibt es daher (bei festem k) eine nur aus den obigen $j_r^{(k)}$ bestehende Folge $I^{(k)}\colon I_1^{(k)}, I_2^{(k)}, \ldots$, in welcher die $j_r^{(k)}$ mit der Wahrscheinlichkeit $F(j_r^{(k)})$ vorkommen. Den Folgen $I^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ kommen offenbar die Eigenschaften a) und b) zu. An Stelle von c) können wir hier nur sagen:

c') Für jedes $s \leqq k$ kommt das Merkmal $\mathfrak{M}(j_r^{(s)})$ in $I^{(k)}$ mit der Wahrscheinlichkeit $W(I^{(k)}, \mathfrak{M}(j_r^{(s)})) = F(j_r^{(s)})$ vor.

Das ergibt sich nach dem Muster von Teil α) des Beweises zu Satz 10.

Aus den Folgen $I', I'', \ldots$ wird nun die gewünschte Intervallfolge I nach dem Verfahren, das wir schon in § 2 kennen gelernt haben, zusammengebaut. Es sei $1 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots$ eine Folge von Zahlen, die zu Null abnehmen. Der k-te Schritt des Verfahrens besteht in folgendem:

---

[26]) Einschließlich i. Man beachte weiterhin Fußnote [25]).

Liegt $I^{(k)}_{\text{abg}}$ schon fest ($I'_{\text{abg}} = I'$), so gibt es eine Zahl $N_k > N_{k-1}$, so daß für alle $n \geqq N_k$, $1 \leqq r, s \leqq k$

$$\left| \frac{1}{n} H_n\left(I^{(k)}_{\text{abg}}, \mathfrak{M}\left(j_r^{(s)}\right)\right) - F\left(j_r^{(s)}\right) \right| < \frac{\varepsilon_k}{3}$$

und

$$\left| \frac{1}{n} H_n\left(I^{(k+1)}, \mathfrak{M}\left(j_r^{(s)}\right)\right) - F\left(j_r^{(s)}\right) \right| < \frac{\varepsilon_k}{3}$$

ist. Die Folge
$I^{(k+1)}_{\text{abg}}$: $I'_1, \ldots, I'_{N_1}, I''_{N_1+1}, \ldots, I''_{N_2}, \ldots, I^{(k)}_{N_k}, I^{(k+1)}_{N_k+1}, I^{(k+1)}_{N_k+2}, \ldots$ hat dieselbe Verteilung wie $I^{(k+1)}$ und besitzt die Eigenschaften a), b) und c') mit $k+1$ statt k. Ferner ergibt sich wie auf S. 228 für alle $n \geqq N_k$, $1 \leqq r, s \leqq k$

$$\left| \frac{1}{n} H_n\left(I^{(k+1)}_{\text{abg}}, \mathfrak{M}\left(j_r^{(s)}\right)\right) - F\left(j_r^{(s)}\right) \right| < \varepsilon_k.$$

Das Verfahren kann unbegrenzt fortgesetzt werden und liefert für $k \to \infty$ eine Grenzfolge I, von der nun ähnlich wie in § 2 gezeigt werden kann, daß sie eine ausgezeichnete Intervallfolge ist.

Jetzt können wir unsere Existenzsätze anwenden und erhalten

Satz 12: *Zu jeder I-Funktion erster Art gibt es Bernoullische ausgezeichnete Intervallfolgen.*

Beweis: Benutzt man bei dem Konstruktionsverfahren von Satz 3 nur ausgezeichnete Intervallfolgen, so kommen auch der entstehenden Intervallfolge die Eigenschaften a), b) und c) zu.

Satz 13: *Es seien abzählbar viele I-Funktionen erster Art $F'(i)$, $F''(i), \ldots$ gegeben. Dann gibt es ausgezeichnete Intervallfolgen $I', I'', \ldots$ derart, daß $I^{(\nu)}$ zu der I-Funktion $F^{(\nu)}(i)$ gehört und daß das aus $I', I'', \ldots$ gebildete Feld ein Bernoullisches Feld im engeren Sinne ist.*

Beweis: Man wende Satz 4 an und benutze bei dem Konstruktionsverfahren desselben nur ausgezeichnete Intervallfolgen.

Wir können jetzt zu den Existenzsätzen für Verteilungsfolgen übergehen. Ausschlaggebend ist der folgende Satz.

Satz 14: *Es sei I: $I_1, I_2, \ldots$ eine ausgezeichnete Intervallfolge, welche zu der I-Funktion erster Art $F(i)$ gehört. Dann erhält man aus I eine Punktfolge $\mathfrak{E}$ mit derselben Funktion $F(i)$ als W-Funktion dadurch, daß man jedes Intervall von I durch einen in diesem Intervall liegenden, aber sonst beliebigen Punkt x ersetzt*[27]).

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß jedes Element $i = j_r^{(k)}$, sofern es ein Intervall ist, als Merkmal für sich betrachtet, in I mit der Wahrscheinlichkeit $W(I, i) = 0$ vorkommt. Zu diesem Zweck greifen wir einen

[27]) Vgl. einen entsprechenden Ansatz in Copeland II, S. 159 f. Auch bei Herrn Tornier (Acta math. a. a. O.) findet sich bei der Konstruktion eines Wahrscheinlichkeitsmodells ein ähnlicher Gedanke, aber für einen andern Zweck.

Punkt P von $\mathfrak{m}_\nu (\nu \geqq k)$ heraus, der innerer Punkt von i ist, und betrachten die beiden Teilintervalle i_1 und i_2, in welche i durch P zerfällt. Für diese ist $i_1 + i_2 + P = i$ und für jedes n

$$H_n(I, \mathfrak{M}(i)) \geqq H_n(I, \mathfrak{M}(i_1)) + H_n(I, \mathfrak{M}(i_2)) + H_n(I, P) + H_n(I, i).$$

Nun ist aber für I-Funktionen

$$F(i) = F(i_1) + F(i_2) + F(P)$$

und daher

$$\frac{1}{n} H_n(I, i) \to 0.$$

Es sei nun eine Folge $\mathfrak{E}$ nach der Vorschrift des Satzes gebildet. Alle Elemente von I, welche in einem festen i liegen, liefern Punkte von $\mathfrak{E}$, die in i liegen. In i können aber auch noch Punkte von $\mathfrak{E}$ liegen, die von Intervallen $j_r^{(k)}$ stammen, welche ihrerseits das Element i enthalten. Solcher Intervalle gibt es aber nur endlich viele, welche nach der vorangestellten Bemerkung in I mit der Wahrscheinlichkeit 0 vorkommen. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Punkt x von $\mathfrak{E}$ in i liegt, ist also durch $W(I, \mathfrak{M}(i)) = F(i)$ gegeben. Nach Satz 10 kommt also $\mathfrak{E}$ die W-Funktion $F(i)$ zu.

Zusatz: *Die m ausgezeichneten Intervallfolgen $I', I'', \ldots, I^{(m)}$ $(m \geqq 2)$, von denen $I^{(\nu)}$ zu der I-Funktion erster Art $F^{(\nu)}(i)$ gehört, seien voneinander unabhängig. Dann sind auch die m Verteilungsfolgen $\mathfrak{E}', \ldots, \mathfrak{E}^{(m)}$, die aus den Intervallfolgen $I', \ldots, I^{(m)}$ auf die in Satz 14 angegebene Art entstehen, voneinander unabhängig.*

Der Beweis ergibt sich für die Folgenverbindung $\mathfrak{E}' \ldots \mathfrak{E}^{(m)}$ nach dem Muster von Satz 14 unter Berücksichtigung des Zusatzes zu Satz 10.

Nunmehr können wir die Existenzsätze für Verteilungsfolgen unmittelbar aus den Sätzen über ausgezeichnete Intervallfolgen herleiten. Dabei besteht noch in der Wahl der bei dem Aufbau der Verteilungsfolgen verwendeten Punktmengen eine gewisse Willkür.

Satz 15: *Es sei $\mathfrak{Q}: Q_1, Q_2, \ldots$ eine Punktfolge mit folgenden Eigenschaften:*

a) *In jedem Intervall i, für welches $F(i) > 0$ ist, liegen unendlich viele Punkte von $\mathfrak{Q}$;*

b) *jede Unstetigkeitsstelle von $F(i)$ tritt in $\mathfrak{Q}$ unendlich oft auf;*

c) *ist $F(i)$ eine I-Funktion zweiter Art, so ist $\mathfrak{Q}$ nicht beschränkt. Unter diesen Bedingungen kann $\mathfrak{Q}$ so umgeordnet werden, daß die umgeordnete Zahlenfolge eine Verteilungsfolge mit der W-Funktion $F(i)$ ist.*

Beweis: 1. Fall: Die I-Funktion $F(i)$ sei von der ersten Art. Dann gibt es nach Satz 11 zu der I-Funktion $F(i)$ eine ausgezeichnete Intervallfolge $I: I_1, I_2, \ldots$. Jedes Element I_s von I kann durch einen Punkt von $\mathfrak{Q}$ ersetzt werden. Denn nach Definition enthält I nur solche Elemente $j_r^{(k)}$, für welche $F(j_r^{(k)}) > 0$ ist. In I_s liegen also nach a) unendlich viele

Punkte von $\mathfrak{Q}$, während aus I_s bei der Verwandlung der vorangehenden Elemente von I höchstens $(s-1)$ Punkte von $\mathfrak{Q}$ entnommen sind. Auf diese Weise entsteht nach Satz 14 eine Verteilungsfolge $\mathfrak{E}'$ mit der W-Funktion $F(i)$.

Die etwa übrigbleibenden Punkte von $\mathfrak{Q}$ können dadurch untergebracht werden, daß man aus $\mathfrak{E}'$ eine Folge $\mathfrak{F}$ heraushebt, welche in $\mathfrak{E}'$ mit der Wahrscheinlichkeit 0 vorkommt und unendlich viele Stellen hat. Die Punkte von $\mathfrak{F}$ und die Restfolge von $\mathfrak{Q}$ werden alsdann auf den Stellen von $\mathfrak{F}$ in irgendeiner Anordnung in $\mathfrak{E}'$ eingefügt. Das ändert, wie man z. B. mit Hilfe von § 4, Regel I leicht einsieht, an der Verteilung nichts.

2. Fall: Ist $F(i)$ eine I-Funktion zweiter Art, und i_0 das in der Definition von S. 242 auftretende Intervall, so greifen wir irgendeinen außerhalb i_0 liegenden Punkt P heraus und definieren eine Intervallfunktion $F(i)$ in folgender Weise:

$$F'(i) = \begin{cases} 1 - F(i_0) & \text{für } i = P; \\ F(i) + F'(P), & \text{wenn } i \text{ den Punkt } P \text{ enthält}; \\ F(i) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar ist $F'(i)$ eine I-Funktion erster Art, und nach Satz 11 gibt es zu dieser I-Funktion eine ausgezeichnete Intervallfolge I. Bei der Konstruktion von I wollen wir zu den Elementen $j_r^{(k)}$ (siehe S. 244) schon für $k = 1$ den Punkt P und die Endpunkte des Intervalls i_0 hinzunehmen. Dann ist nämlich mit Ausnahme von Punkt P für jedes Element $j_r^{(k)}$, das nicht in i_0 liegt, $F'(j_r^{(k)}) = 0$, und die ausgezeichnete Intervallfolge I enthält nach ihrer Definitionseigenschaft b) von S. 245 außer P überhaupt keine Elemente, die außerhalb i_0 liegen. Ersetzen wir in $\mathfrak{Q}$ jeden außerhalb i_0 liegenden Punkt durch den Punkt P, so erfüllt die neue Punktfolge $\mathfrak{Q}'$ bezüglich $F'(i)$ die Voraussetzungen a) und b) des schon bewiesenen Teiles von Satz 15 und kann daher zu einer Verteilungsfolge $\mathfrak{E}'$ mit der W-Funktion $F'(i)$ umgeordnet werden. Wegen c) enthält $\mathfrak{Q}$ eine unendliche Teilfolge $\mathfrak{R}$ von Punkten, die außerhalb i_0 liegen und im Endlichen keinen Häufungspunkt haben. In $\mathfrak{E}'$ setzen wir jedesmal, sooft der Punkt P auftritt, einen Punkt von $\mathfrak{R}$ an dessen Stelle. Die so entstehende Verteilungsfolge $\mathfrak{E}''$ hat die I-Funktion $F(i)$ zur W-Funktion, denn jedes Intervall i enthält höchstens endlich viele Punkte von $\mathfrak{R}$, und Punkt P kommt in $\mathfrak{E}''$ mit der Wahrscheinlichkeit 0 vor. Fügen wir in $\mathfrak{E}''$ noch (soweit vorhanden) die weder in i_0 liegenden noch zu $\mathfrak{R}$ gehörigen Punkte von $\mathfrak{Q}$ auf die am Schluß des ersten Falles angegebene Weise ein, so erhalten wir die gewünschte Umordnung von $\mathfrak{Q}$.

Satz 16[28]): *Es sei $F(i)$ eine I-Funktion und $\mathfrak{Q}$ eine Punktmenge mit den in Satz* 15 *angegebenen Eigenschaften; dann kann $\mathfrak{Q}$ zu einer Bernoullischen Verteilungsfolge mit $F(i)$ als W-Funktion umgeordnet werden.*

Beweis: Ist $F(i)$ eine I-Funktion erster Art, so gehen wir von einer Bernoullischen ausgezeichneten Intervallfolge aus und ordnen $\mathfrak{Q}$ genau so um wie in Satz 15. Nach Satz 14 und 10 je mit Zusatz ist dann die entstehende Verteilungsfolge $\mathfrak{E}$ eine Bernoullische Folge. Der Fall, daß $F(i)$ eine I-Funktion zweiter Art ist, läßt sich, wie in Satz 15, auf den ersten Fall zurückführen.

Eine entsprechende Begründung gilt für

Satz 17[29]): *Zu den I-Funktionen $F'(i)$, $F''(i)$, ... und den Punktfolgen $\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{Q}''$, ..., von denen $\mathfrak{Q}^{(\nu)}$ bezüglich $F^{(\nu)}(i)$ die in Satz* 15 *angegebenen Eigenschaften besitzt, gibt es Verteilungsfolgen $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{E}''$, ..., die ein Bernoullisches Feld im engeren Sinne bilden mit folgenden Eigenschaften;*

a) *jede Folge $\mathfrak{E}^{(\nu)}$ hat die I-Funktion $F^{(\nu)}(i)$ zur W-Funktion;*

b) *$\mathfrak{E}^{(\nu)}$ entsteht aus $\mathfrak{Q}^{(\nu)}$ durch Umordnung.*

Anmerkung: Die Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten, wie sie soeben entwickelt wurde, kann in naheliegender Weise auf n Dimensionen ausgedehnt werden.

Ergänzend seien noch die folgenden Tatsachen angeführt:

Satz 18. *Die endlich vielen Indexfolgen $L', \ldots, L^{(k)}$, von denen jede unendlich viele Zahlen besitzt, seien paarweise elementenfremd; ferner seien $\mathfrak{E}', \ldots, \mathfrak{E}^{(k)}$ ebenso viele Verteilungsfolgen mit der bei allen gleichen W-Funktion $F(i)$, dann ist auch die aus $\mathfrak{E}', \ldots, \mathfrak{E}^{(k)}$ bezüglich $L', \ldots, L^{(k)}$ gebildete Folgenmischung $\mathfrak{E}$ eine Verteilungsfolge mit der W-Funktion $F(i)$.*

Beweis: Nach Satz 6 kommt in $\mathfrak{E}$ jedes Intervall i mit der Wahrscheinlichkeit $F(i)$ vor.

Satz 19: *Es seien unendlich viele Verteilungsfolgen $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{E}''$, ... mit derselben W-Funktion $F(i)$ gegeben; L', L'', ... seien unendlich viele Indexfolgen mit folgenden Eigenschaften:*

a) *jede Indexfolge besteht aus unendlich vielen Zahlen;*

b) *je zwei Indexfolgen sind elementenfremd;*

c) *es ist $L' + L'' + \ldots = L$ und dabei*

d) $$\overline{\lim_{k \to \infty}} \; \underline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n} H_n(L, L' + L'' + \ldots + L^{(k)}) = 1.$$

---

[28]) Vgl. Copeland II, Satz 6, S. 162 für totalstetige W-Funktionen und A. H. Copeland, A Matrix Theory of Measurement, Math. Zeitschr. 37 (1933), S. 542—555. Diese Arbeit wird künftig als Copeland III zitiert.

[29]) Vgl. Copeland III, Satz 4, S. 550 für abbrechende Felder und die Ausführungen S. 554 Mitte für nichtabbrechende Felder.

Dann ist die aus $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{E}''$, ... bezüglich L', L'', ... gebildete Folgenmischung $\mathfrak{E}$ wieder eine Verteilungsfolge mit derselben W-Funktion $F(i)$.

Beweis nach Satz 8.

Aus Satz 9 folgt

Satz 20: *Es seien die endlich oder unendlich vielen Verteilungsfolgen $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{E}''$, ... mit den W-Funktionen $F'(i)$, $F''(i)$, ... gegeben. Ferner seien L', L'', ... ebenso viele Indexfolgen mit den folgenden Eigenschaften:*

a) *jede Indexfolge besteht aus unendlich vielen Zahlen;*

b) *je zwei Indexfolgen sind elementenfremd;*

c) *es ist $L' + L'' + \ldots = N$;*

d) *$L^{(k)}$ kommt in N mit der Wahrscheinlichkeit $a^{(k)}$ vor, und es ist*

e) $a' + a'' + \ldots = 1$.

Dann ist auch die aus $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{E}''$, ... bezüglich L', L'', ... gebildete Folgenmischung $\mathfrak{E}$ eine Verteilungsfolge mit der W-Funktion

$$F(i) = a' F'(i) + a'' F''(i) + \ldots.$$

Historische Bemerkungen: Die in § 5 über die Existenz von Verteilungsfolgen ausgesprochenen Sätze finden sich fast alle unter mehr oder weniger starken Einschränkungen in den beiden zuletzt angegebenen Arbeiten von Herrn Copeland (Copeland II und III). Hier sind die Sätze in voller Allgemeinheit und nach anderen Methoden bewiesen worden.

In der ersten der beiden Arbeiten beweist Herr Copeland unseren Satz 16 unter der Voraussetzung, daß $F(i)$ eine totalstetige Intervallfunktion erster Art ist[30]). In derselben Arbeit findet sich neben der Ausdehnung der Existenzsätze auf n Dimensionen auch noch eine Verschärfung der an eine Verteilungsfolge gestellten Forderung D. Herr Copeland verlangt, daß D nicht bloß für Intervalle erfüllt ist, sondern allgemeiner für Mengen, deren Grenzpunkte das Maß 0 haben. Jede dieser Mengen läßt sich, wie Herr Copeland zeigt, durch eine endliche Summe von Würfeln (d. s. Elemente $j_r^{(k)}$) beliebig approximieren. Infolgedessen gilt, da $F(i)$ als totalstetig vorausgesetzt ist, ein unserem Satz 10 entsprechender Satz. Der von Herrn Copeland eingeschlagene Weg hat mit dem hier gegangenen manche Berührungspunkte gemein.

Der Begriff einer „admissible variate", mit dem Herr Copeland die letzte der beiden Arbeiten beginnt, deckt sich im wesentlichen mit dem einer Bernoullischen Verteilungsfolge, sofern $F(i)$ eine I-Funktion erster Art ist[30]). Durch eine geeignete Transformation führt Herr Copeland den

[30]) Genauer: Die beim Beweise von Satz 11 auftretenden Summen $\sum_{r=1}^{\infty} F(j_r^{(k)})$ müssen alle den Wert 1 haben.

Existenzbeweis für eine derartige Folge auf den früher behandelten Fall zurück. Bei dieser Beweisführung geht aber der sich auf die Punktmengen beziehende Teil des Satzes 16 verloren. Ferner kann Herr Copeland den Begriff eines Bernoullischen Feldes im engeren Sinne[31]) nur unter Zuhilfenahme dieser Transformation einführen, um nicht auf den Existenzbeweis verzichten zu müssen. Das führt aber nicht nur auf Einschränkungen des Begriffs selber, sondern macht auch den Existenzbeweis recht lang.

[31]) Copeland III, S. 549—550; dort „admissibly independent variates" genannt. Man beachte insbesondere S. 550 o. und die Fußnote.

(Eingegangen am 27. November 1935.)

Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe. IV.

Über Minimalkomplexe.

Von

Wolfgang Haack in Berlin.

Herrn W. Blaschke verdanke ich die Anregung zu der folgenden Untersuchung: Die Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe wird auf einer quadratischen Differentialform

$$\bar{g}_{ik}\,du^i\,du^k \qquad (i,k=1,2,3)$$

aufgebaut. In Analogie zu den Minimalflächen der elementaren Flächentheorie liegt daher die Frage nahe: Welche notwendige Bedingung muß zwischen den Invarianten eines Komplexes bestehen, damit das Integral

$$\iiint \sqrt{|\bar{g}_{ik}|}\,du^1\,du^2\,du^3 \tag{1}$$

einen Extremwert annimmt, und welches ist die geometrische Kennzeichnung dieser „Minimalkomplexe"?

§ 1.

Grundlagen.

Verwendet man zur Darstellung der Geraden des Raumes nach Study duale Vektoren, so kann man einen Strahlenkomplex geben durch [1])

$$\mathfrak{A}(u^1,u^2,u^3)=\mathfrak{a}(u^1,u^2,u^3)+\varepsilon\,\bar{\mathfrak{a}}(u^1,u^2,u^3),$$

dabei gilt die Identität

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}+2\,\varepsilon\,\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{a}}\equiv 1,\quad \varepsilon^2=0.$$

Bezeichnet man mit $\mathfrak{A}_i$ die partielle Ableitung nach u^i, so ist

$$G_{ik}=g_{ik}+\varepsilon\,\bar{g}_{ik}=\mathfrak{A}_i\,\mathfrak{A}_k \tag{2}$$

ein dualer Tensor zweiter Stufe. Der Dualteil führt zu der in der Einleitung erwähnten quadratischen Form [2])

$$\bar{g}_{ik}\,du^i\,du^k, \tag{3}$$

deren Determinante in dem betrachteten Bereich nicht Null ist:

$$|\bar{g}_{ik}|\neq 0.$$

---

[1]) Bezüglich der notwendigen Voraussetzungen sei auf die „Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe I" verwiesen. Math. Zeitschr. **40** (1935), S. 560—581 (später zitiert als I).

[2]) Die Form wurde schon von Sannia und Mayrhofer als Grundform eingeführt (I, § 2).

Aus den Tensoren g_{ik} und g_{ik} lassen sich drei Linearformen

$$d\alpha = l_i\,du^i, \quad d\beta = m_i\,du^i, \quad d\gamma = n_i\,du^i \tag{4}$$

ableiten, die zum Aufbau eines invarianten Formelapparates dienen. Der Komplexstrahl $\mathfrak{A}$, die Hauptnormale $\mathfrak{H}$ und die Binormale $\mathfrak{B}$ bilden das begleitende Dreibein. Dabei gilt für die Skalarprodukte

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}\mathfrak{A} = \mathfrak{H}\mathfrak{H} = \mathfrak{B}\mathfrak{B} = 1, \\ \mathfrak{A}\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Die invarianten Ableitungsgleichungen eines Komplexes lauten:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 &= \quad \varepsilon\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}, & \mathfrak{H}_1 &= & -A\mathfrak{B}, & \mathfrak{B}_1 &= & -\varepsilon\tfrac{1}{2}\mathfrak{A} + A\mathfrak{H}, \\ \mathfrak{A}_2 &= (1+\varepsilon k)\mathfrak{H}, & \mathfrak{H}_2 &= -(1+\varepsilon k)\mathfrak{A} & - B\mathfrak{B}, & \mathfrak{B}_2 &= & + B\mathfrak{H}, \\ \mathfrak{A}_3 &= (1+\varepsilon k)\mathfrak{B}, & \mathfrak{H}_3 &= & -C\mathfrak{B}, & \mathfrak{B}_3 &= -(1+\varepsilon k)\mathfrak{A} & + C\mathfrak{H}. \end{aligned} \tag{6}$$

Hier sind k, A, B, C die Invarianten des Komplexes. A, B, C sind duale Größen

$$A = a + \varepsilon\bar{a}, \quad B = b + \varepsilon\bar{b}, \quad C = c + \varepsilon\bar{c}.$$

Der Übergang von gewöhnlichen partiellen Ableitungen φ_i einer Größe φ zu den invarianten Ableitungen φ_1, φ_2, φ_3 wird vermittelt durch die Beziehung

$$\varphi_i = l_i\,\varphi_1 + m_i\,\varphi_2 + n_i\,\varphi_3. \tag{7}$$

§ 2.

Übergang zu einem benachbarten Komplex.

Zur Lösung des Problems ist die erste Variation des Integrales (1) zu berechnen. Man geht durch Verschiebung des Komplexstrahles $\mathfrak{A}$ zu einem benachbarten Komplex $\mathfrak{A}'(u^1, u^2, u^3)$ über. Führt man diese Verschiebung in beliebiger Richtung, also in ganz allgemeiner Weise aus, so hat $\mathfrak{A}'$ die Gestalt

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + \delta\mathfrak{A} = \mathfrak{A} + S\mathfrak{H} + T\mathfrak{B}. \tag{8}$$

S und T sind duale Größen der Form

$$S = \sigma\{s(u^1, u^2, u^3) + \varepsilon\bar{s}(u^1, u^2, u^3)\}; \quad T = \sigma\{t(u^1, u^2, u^3) + \varepsilon\bar{t}(u^1, u^2, u^3)\}. \tag{9}$$

σ bedeutet eine kleine Zahl, deren höhere Potenzen vernachlässigt werden können. S und T müssen diffenzierbar sein und am Rande des Integrales verschwinden.

Versucht man nun, für diese allgemeine Verschiebung von $\mathfrak{A}$ die erste Variation von (1) zu berechnen, und auf eine solche Form zu bringen, daß ihr Verschwinden durch eine Bedingungsgleichung zwischen den Invarianten des Komplexes wiedergegeben wird, so hat man erhebliche Schwierigkeiten zu überwinden. Da nämlich der Formelapparat nur die invarianten Ableitungen in bezug auf die drei Linearformen enthält, kann man hier nicht die Greensche Formel anwenden, die z. B. in der Flächen-

theorie zum Ziele führt. Der Vergleich mit der Flächentheorie zeigt aber einen Weg, der auch in dem vorliegenden Falle die Schwierigkeiten umgeht: Ist $\mathfrak{x}(u,v)$ eine Fläche, so kann man zu einer benachbarten Fläche $\mathfrak{x}'(u,v)$ dadurch gelangen, daß man die Flächenpunkte längs der Flächennormalen $\mathfrak{y}$ verschiebt, also $\mathfrak{x}'$ in der Form annimmt $\mathfrak{x}' = \mathfrak{x} + \sigma n(u,v)\mathfrak{y}$. Dann zeigt sich unmittelbar, daß die erste Variation der Oberfläche mit der mittleren Krümmung verschwindet. Wir wollen diese in der Flächentheorie gebräuchliche Verschiebung des Punktes $\mathfrak{x}$ eine Normalverschiebung nennen und versuchen, für die Komplexstrahlen $\mathfrak{A}$ eine ebenso ausgezeichnete Verschiebungsrichtung zu bestimmen.

Die dem Komplex angehörende Umgebung des Strahles $\mathfrak{A}$ ist

$$\mathfrak{A} + d\mathfrak{A} = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}_i\, du^i = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}_1\, d\alpha + \mathfrak{A}_2\, d\beta + \mathfrak{A}_3\, d\gamma$$

oder nach (6)

$$\mathfrak{A} + d\mathfrak{A} = \mathfrak{A} + d\beta\,(1+\varepsilon k)\,\mathfrak{H} + \{\varepsilon\tfrac{1}{2}\,d\alpha + (1+\varepsilon k)\,d\gamma\}\,\mathfrak{B}. \tag{10}$$

Daraus erkennt man, daß jede Verschiebung der Form $\mathfrak{A} + T\mathfrak{B}$ überhaupt nicht aus dem gegebenen Komplex herausführt, sondern nur zu einem zum Komplex gehörenden Nachbarstrahl von $\mathfrak{A}$. Dagegen wird die Gerade

$$\mathfrak{A} + \delta\mathfrak{A} = \mathfrak{A} + S\mathfrak{H}, \tag{9a}$$

wenn $S \neq \sigma s(1+\varepsilon k)$ ist, sicher nicht dem Komplex angehören. Wählt man die Verschiebungsrichtung von $\mathfrak{A}$ so, daß

$$\mathfrak{A} + \delta\mathfrak{A} = \mathfrak{A} + \sigma s(1-\varepsilon k)\,\mathfrak{H}, \tag{11}$$

so erhält man, wie die Rechnung zeigen wird, ein vollständiges Analogon zur Normalverschiebung der Flächentheorie; die erste Variation des Integrales (1) läßt sich unmittelbar durch die Invarianten des Komplexes ausdrücken.

Die Analogie wird noch erhöht, wenn man eine von Koenigs und später von Zindler durchgeführte Untersuchung über die von einem Strahle $\mathfrak{A}$ ausgehenden Fortschreitungsrichtungen des Geradenraumes beachtet[3]). An Stelle der etwas umständlichen Symbolik jener Autoren verwenden wir duale Vektoren. Zwei von einem Strahle $\mathfrak{A}$ ausgehende Fortschreitungsrichtungen $\mathfrak{A} + \delta\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} + \delta'\mathfrak{A}$ heißen dann nach Koenigs orthogonal, wenn der Dualteil des Skalarproduktes $(\delta\mathfrak{A}\cdot\delta'\mathfrak{A})$ verschwindet. Wählen wir für $\delta\mathfrak{A}$ nach (10) irgend eine dem Komplex angehörende Richtung und für $\delta'\mathfrak{A}$ die durch (11) bestimmte Verschiebungsrichtung, so verschwindet stets der Dualteil des Produktes $(d\mathfrak{A}\cdot\delta\mathfrak{A})$. Die durch (11) gekennzeichnete Verschiebungsrichtung ist also nach Koenigs Terminologie die einzige, die zu allen Richtungen des Komplexes orthogonal ist; sie entspricht daher durchaus der Normalen einer Fläche.

---

[3]) Man vgl. etwa: Zindler, Liniengeom. m. Anw. II, § 46, Leipzig 1906.

§ 3.

Berechnung der ersten Variation.

In der Rechnung gehen wir zunächst von (9 a) aus und setzen zum Schluß den aus (11) folgenden Wert für S ein. Es wird

$$\frac{\partial}{\partial u^i}(\mathfrak{A} + \delta\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}_i + S_i\mathfrak{H} + S\mathfrak{H}_i.$$

Wenn die Größen des Nachbarkomplexes mit Akzenten bezeichnet werden, erhält man bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$G'_{ik} = G_{ik} + S_i(\mathfrak{A}_k\mathfrak{H}) + S_k(\mathfrak{A}_i\mathfrak{H}) + S(\mathfrak{A}_i\mathfrak{H}_k) + S(\mathfrak{A}_k\mathfrak{H}_i).$$

Um den Zusammenhang mit den Ableitungsgleichungen (6) herzustellen, gehen wir nach (7) zu invarianten Ableitungen über:

$$\begin{aligned} G'_{ik} = G_{ik} &+ S\{(l_i\mathfrak{A}_1 + m_i\mathfrak{A}_2 + n_i\mathfrak{A}_3)(l_k\mathfrak{H}_1 + m_k\mathfrak{H}_2 + n_k\mathfrak{H}_3) \\ &+ (l_k\mathfrak{A}_1 + m_k\mathfrak{A}_2 + n_k\mathfrak{A}_3)(l_i\mathfrak{H}_1 + m_i\mathfrak{H}_2 + n_i\mathfrak{H}_3)\} \\ &+ (l_iS_1 + m_iS_2 + n_iS_3)(l_k\mathfrak{A}_1 + m_k\mathfrak{A}_2 + n_k\mathfrak{A}_3)\mathfrak{H} \\ &+ (l_kS_1 + m_kS_2 + n_kS_3)(l_i\mathfrak{A}_1 + m_i\mathfrak{A}_2 + n_i\mathfrak{A}_3)\mathfrak{H}. \end{aligned}$$

Setzt man hier nach (6) die Ableitungsvektoren ein und multipliziert aus, so folgt

$$\begin{aligned} G'_{ik} = G_{ik} &+ S\{-\varepsilon\tfrac{1}{2}A(l_il_k + l_kl_i) - \varepsilon\tfrac{1}{2}B(l_im_k + l_km_i) \\ &- \varepsilon\tfrac{1}{2}C(l_in_k + l_kn_i) - (1+\varepsilon k)A(n_il_k + n_kl_i) \\ &- (1+\varepsilon k)B(n_im_k + n_km_i) - (1+\varepsilon k)C(n_in_k + n_kn_i)\} \\ &+ (1+\varepsilon k)\{S_1(l_im_k + l_km_i) + S_2(m_im_k + m_km_i) \\ &+ S_3(n_im_k + n_km_i)\}. \end{aligned}$$

Daraus folgt für den Dualteil, der uns allein interessiert:

$$\begin{aligned} (12)\quad \bar{g}'_{ik} = \bar{g}_{ik} &+ \sigma s\{-\tfrac{1}{2}a(l_il_k + l_kl_i) - \tfrac{1}{2}b(l_im_k + l_km_i) \\ &- (\tfrac{1}{2}c + \bar{a} + ka)(l_in_k + l_kn_i) - (\bar{b} + kb)(n_im_k + n_km_i) \\ &- (\bar{c} + kc)(n_in_k + n_kn_i)\} \\ &+ \sigma\bar{s}\{-a(n_il_k + n_kl_i) - b(n_im_k + n_km_i) - c(n_in_k + n_kn_i)\} \\ &+ \sigma(\bar{s}_1 + ks_1)(l_im_k + l_km_i) + \sigma(\bar{s}_2 + ks_2)(m_im_k + m_km_i) \\ &+ \sigma(\bar{s}_3 + ks_3)(n_im_k + n_km_i). \end{aligned}$$

Jetzt gehen wir von der Verschiebung (10) zur Normalverschiebung (11) über und setzen

$$S = \sigma s(1 - \varepsilon k), \quad \text{also} \quad \bar{s} = -ks$$

und

$$\bar{s}_1 + ks_1 = -sk_1, \quad \bar{s}_2 + ks_2 = -sk_2, \quad \bar{s}_3 + ks_3 = -sk_3.$$

Führt man diese Werte in (12) ein, so fallen die Ableitungen von s aus dem Ausdruck heraus und $\bar{g}'_{ik}$ läßt sich schreiben in der Form

$$(12\,a)\qquad \bar{g}'_{ik} = \bar{g}_{ik} + \sigma s\,\varrho_{ik},$$

dabei ist

$$\begin{aligned}(13)\qquad \varrho_{ik} = &-\tfrac{1}{2}a\,(l_i l_k + l_k l_i) - (\tfrac{1}{2}b + k_1)\,(l_i m_k + l_k m_i)\\ &- (\tfrac{1}{2}c + \bar{a})\,(n_i l_k + n_k l_i) - k_2\,(m_i m_k + m_k m_i)\\ &- (\bar{b} - k_3)\,(n_i m_k + n_k m_i) - \bar{c}\,(n_i n_k + n_k n_i).\end{aligned}$$

Die Determinante $|\bar{g}'_{ik}|$ hat zunächst die Gestalt

$$|\bar{g}'_{ik}| = |\bar{g}_{ik} + \sigma s\,\varrho_{ik}|.$$

Entwickelt man nach Potenzen von σ und beachtet nur Glieder bis zur ersten Ordnung, dann erhält man

$$|\bar{g}'_{ik}| = |\bar{g}_{ik}| + \sigma s\,\{|\varrho_{11}\,\bar{g}_{12}\,\bar{g}_{13}| + |\bar{g}_{11}\,\varrho_{12}\,\bar{g}_{13}| + |\bar{g}_{11}\,\bar{g}_{12}\,\varrho_{13}|\}.$$

Diesen Ausdruck kann man, da $\bar{g}_{ik}$ als Grundtensor dient und symmetrisch ist, schreiben

$$(14)\qquad |\bar{g}'_{ik}| = |\bar{g}_{ik}|\,\{1 + \sigma s\,\bar{g}^{ik}\varrho_{ik}\}.$$

Man erhält also für die erste Variation des Integrales (1)

$$(15)\qquad \delta\int\int\int \sqrt{|\bar{g}_{ik}|}\,du^1\,du^2\,du^3 = \sigma\int\int\int \tfrac{1}{2}\,s\,\bar{g}^{ik}\varrho_{ik}\sqrt{|\bar{g}_{ik}|}\,du^1\,du^2\,du^3.$$

Ein Extremwert kann nur dann auftreten, wenn im ganzen Integrationsbereich die Gleichung gilt

$$(16)\qquad \boxed{\bar{g}^{ik}\varrho_{ik} = 0.}$$

Die Zurückführung dieser Gleichung auf die Invarianten des Komplexes verlangt zwar noch einige Rechnung, bietet aber keine Schwierigkeiten. Die Ausmultiplikation der linken Seite von (16) führt nach (13) zu den sechs Ausdrücken

$$\begin{aligned}&\bar{g}^{ik}\,l_i\,l_k, \qquad \bar{g}^{ik}\,l_i\,m_k, \qquad \bar{g}^{ik}\,n_i\,l_k,\\ &\bar{g}^{ik}\,m_i\,m_k, \qquad \bar{g}^{ik}\,n_i\,m_k, \qquad \bar{g}^{ik}\,n_i\,n_k.\end{aligned}$$

Zu ihrer Auswertung sind die zwischen $\bar{g}_{ik}$ und den Linearformen geltenden Beziehungen zu beachten. In I, § 2 (14) sind die Größen l_i, m_i, n_i unter der Voraussetzung spezieller Parameter durch g_{ik} und $\bar{g}_{ik}$ dargestellt. Aus diesen Formeln errechnet man die Werte

$$(17)\qquad \begin{aligned}&\bar{g}^{ik}\,l_i\,m_k = 0, \qquad &&\bar{g}^{ik}\,m_i\,m_k = \frac{1}{2k},\\ &\bar{g}^{ik}\,m_i\,n_k = 0, \qquad &&\bar{g}^{ik}\,n_i\,l_k = \frac{1}{2k}\cdot 4k,\\ &\bar{g}^{ik}\,n_i\,n_k = 0, \qquad &&\bar{g}^{ik}\,l_i\,l_k = -\frac{1}{2k}\cdot(4k)^2.\end{aligned}$$

Es sei erwähnt, daß die drei verschwindenden Werte ohne Rechnung aus dem in I, § 2 konstruierten Bild in der Ebene E abgelesen werden können. Durch Einsetzen in (16) erhält man

$$\bar{g}^{ik}\varrho_{ik} = \frac{1}{k}\{8k^2 a - 4k\,(\tfrac{1}{2}c + \bar{a}) - k_2\}.$$

Daher ist die Bedingungsgleichung für Minimalkomplexe

$$8k^2a - 4k(\tfrac{1}{2}c + \bar{a}) - k_2 = 0. \tag{18}$$

Damit ist der analytische Teil des Problems gelöst. Nun sind aber A, B, C nicht die einfachsten Differentialinvarianten eines Komplexes, sondern p, q, r. Sie hängen nach I, § 3 (21) zusammen durch die Gleichungen

$$A = -q - \varepsilon\tfrac{1}{2}p, \quad B = 2k_1 + \varepsilon k_3, \quad C = -p + \varepsilon(\tfrac{1}{2}r - k_2).$$

Daher kann man (18) schreiben:

$$\boxed{4k(p - 2kq) - k_2 = 0.} \tag{18a}$$

Es gilt also der

Satz 1: *Genügen die Invarianten k, p, q, r eines Komplexes überall in dem betrachteten Bereich der Gleichung* (18a), *so ist der Komplex ein Minimalkomplex.*

§ 4.

Geometrische Kennzeichnung.

Die Gleichung (18a) gibt eine analytische Kennzeichnung der Minimalkomplexe; sie stellt eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen den sechs Komponenten des dualen Vektors $\mathfrak{A}$ dar. Welche geometrische Eigenschaft des Komplexes wird durch (18a) wiedergegeben? Die Antwort erhält man leicht, wenn man einige geometrische Beziehungen beachtet, die in der Umgebung zweiter Ordnung eines Komplexstrahles gelten. Sie wurden zuerst von Felix Klein für algebraische Komplexe bewiesen und unabhängig davon kürzlich in den Monatsheften für Mathematik und Physik aus den Grundformeln der Differentialgeometrie I, § 3 abgeleitet [4]).

Es gibt ein Büschel linearer Komplexe, von denen jeder die Umgebung erster Ordnung eines Strahles $\mathfrak{A}$ des allgemeinen Komplexes $\mathfrak{A}(u^1, u^2, u^3)$ enthält. Der duale Vektor $\mathfrak{K}_\varkappa$ eines Berührungskomplexes genügt nach (III, 21a) der Gleichung

$$\mathfrak{K}_\varkappa = \varkappa\mathfrak{A} + (1 - \varepsilon k)\mathfrak{H}, \tag{19}$$

dabei ist $\varkappa$ der Parameter des Komplexbüschels und gibt den Kotangens des Winkels ϑ an, den die Achse des linearen Komplexes $\mathfrak{K}_\varkappa$ mit $\mathfrak{A}$ einschließt.

Durch einen Strahl $\mathfrak{A}$ gehen ∞^1 Fortschreitungsrichtungen des Komplexes $\mathfrak{A}(u^1, u^2, u^3)$, längs deren der Berührungskomplex $\mathfrak{K}_\varkappa$ den gegebenen Komplex in zweiter Ordnung berührt. Diese Fortschreitungsrichtungen werden durch eine quadratische Differentialform bestimmt.

[4]) F. Klein, Math. Annalen 5, S. 271. Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe. III. Monatsh. f. Math. u. Phys. 44 (1936), Heft 1. Im folgenden zitiert durch III.

Jedem Berührungskomplex wird auf diese Weise eine quadratische Form zugeordnet und daher dem Büschel der Berührungskomplexe ein Büschel quadratischer Formen; es besitzt die Gleichung

$$\{-\tfrac{1}{2}q\alpha^2 + 2k_1\alpha\beta - p\alpha\gamma + k_2\beta^2 + 2k_3\beta\gamma + (\tfrac{1}{2}r - k_2)\gamma^2\} - \varkappa\{2k(\beta^2+\gamma^2) + \alpha\gamma\} = 0. \tag{20}$$

Die charakteristische Gleichung dieses Formenbüschels lautet

$$\begin{aligned} &\varkappa^3 + \varkappa^2\frac{2}{k}\left\{k(p-2kq) - \frac{1}{4}k_2\right\} \\ &+ \varkappa\frac{2}{k}\left\{\frac{1}{2}kqr + \frac{1}{2}kp^2 + 2kk_1^2 - \frac{1}{2}pk_2 - k_1k_3\right\} \\ &+ \frac{2}{k}\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}q, & k_1, & -\frac{1}{2}p \\ k_1, & k_2, & k_3 \\ -\frac{1}{2}p, & k_3, & c \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Durch die drei Wurzeln $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ dieser Gleichung werden die entarteten Formen des Büschels (20) bestimmt. Das aus (20) folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}q\alpha + k_1\beta - \tfrac{1}{2}(p+\varkappa_i)\gamma &= 0, \\ k_1\alpha + (k_2 - 2k\varkappa_i)\beta + k_3\gamma &= 0, \\ -\tfrac{1}{2}(p+\varkappa_i)\alpha + k_3\beta + (\tfrac{1}{2}r - k_2 - 2k\varkappa_i)\gamma &= 0 \end{aligned} \tag{22}$$

besitzt für $\varkappa_i = \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ Lösungen $\alpha:\beta:\gamma$, die die drei durch $\mathfrak{A}$ gehenden *Hauptrichtungen* bestimmen. Setzt man die drei Werte $\varkappa_i$ in (19) ein, so erhält man die drei linearen *Hauptkomplexe*. Nach F. Klein gilt: *Jeder Hauptkomplex berührt eine Hauptfläche des gegebenen Komplexes in dritter Ordnung.*

Zieht man die Flächentheorie nochmals zum Vergleich heran, so entsprechen die Hauptrichtungen eines Komplexes den Asymptotenrichtungen einer Fläche. In beiden Fällen sind es diejenigen Fortschreitungsrichtungen, längs deren die linearen Berührungsgebilde in höchster Ordnung berühren. Wie sich die Minimalflächen durch eine Winkelbeziehung, nämlich die Orthogonalität, der Asymptotenlinien kennzeichnen lassen, so sind auch die Minimalkomplexe durch eine Winkelbeziehung der Hauptregelflächen, bzw. der Hauptkomplexe, ausgezeichnet. Betrachtet man den Koeffizienten von $\varkappa^2$ der Gleichung (21) und beachtet die Bedeutung von $\varkappa = \operatorname{ctg}\vartheta$, so folgt für die Achsen der drei Hauptkomplexe

$$\operatorname{ctg}\vartheta_1 + \operatorname{ctg}\vartheta_2 + \operatorname{ctg}\vartheta_3 = -\frac{1}{2k}\{4k(p-2kq) - k_2\}. \tag{23}$$

Vergleicht man hiermit (18a), dann erhält man den

Satz 2. *Verschwindet in jedem Strahl $\mathfrak{A}$ eines Komplexes die Summe der Kotangenten der Winkel, die die Achsen der drei linearen Hauptkomplexe mit $\mathfrak{A}$ einschließen, so ist der Komplex ein Minimalkomplex.*

Daß diese geometrische Deutung recht kompliziert erscheint, mag im Wesen der Sache liegen. Denn das Büschel der linearen Berührungskomplexe gehört zu den einfachsten Gebilden, die mit der Umgebung eines Komplexstrahles verbunden sind. Man kann einen interessanten Parallelismus zwischen dem analytischen und dem geometrischen Teil der Untersuchung feststellen: Die quadratische Form $\bar{g}_{ik}du^i du^k$, die den Ausgangspunkt bildet, ist bis auf einen Normierungsfaktor projektiv-invariant. Dementsprechend treten in der geometrischen Kennzeichnung zunächst nur projektiv-geometrische Eigenschaften auf, die erst am Schluß durch eine metrische ergänzt werden.

§ 5.

Der lineare Zentralkomplex.

Die Kennzeichnung der Minimalkomplexe durch Satz 2 ist wenig befriedigend, solange die Summe der Kotangenten der drei Winkel nicht durch eine rein geometrische Eigenschaft ersetzt wird. Das ist das Ziel dieses letzten Paragraphen.

Jeder lineare Berührungskomplex $\mathfrak{K}_\varkappa$ besitzt eine Achse, deren dualer Vektor ist

$$\mathfrak{K}_\varkappa^* = \frac{\mathfrak{K}_\varkappa}{\sqrt{\mathfrak{K}_\varkappa \mathfrak{K}_\varkappa}}.$$

Nach (19) wird

$$\mathfrak{K}_\varkappa \mathfrak{K}_\varkappa = (1+\varkappa^2)\left\{1 - \varepsilon \frac{2k}{1+\varkappa^2}\right\}$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{K}_\varkappa \mathfrak{K}_\varkappa}} = \frac{1}{\sqrt{1+\varkappa^2}}\left\{1 + \varepsilon \frac{k}{1+\varkappa^2}\right\}.$$

Man erhält daher für die Achse $\mathfrak{K}_\varkappa^*$ des Berührungskomplexes $\mathfrak{K}_\varkappa$

$$\mathfrak{K}_\varkappa^* = \frac{1}{\sqrt{1+\varkappa^2}}\left\{\varkappa \mathfrak{A} + \mathfrak{H} + \varepsilon\left[-k\mathfrak{H} + \frac{k}{1+\varkappa^2}(\varkappa \mathfrak{A} + \mathfrak{H})\right]\right\}. \tag{24}$$

Aus dieser Gleichung folgt: Unter den linearen Berührungskomplexen gibt es nur einen, dessen Achse die Gerade $\mathfrak{A}$ schneidet. Denn der Dualteil des Skalarproduktes $(\mathfrak{K}_\varkappa^* \mathfrak{A})$ verschwindet nur für $\varkappa = 0$. Wir wollen diesen Komplex den *linearen Zentralkomplex* nennen. Aus (24) folgt für $\varkappa = 0$, daß die Achse $\mathfrak{K}_0^*$ des linearen Zentralkomplexes zu $\mathfrak{A}$ senkrecht ist und mit der Hauptnormalen $\mathfrak{H}$ zusammenfällt. Das liefert eine neue Deutung der Hauptnormalen $\mathfrak{H}$. Der duale Vektor des Zentralkomplexes ist

$$\mathfrak{K}_0 = (1 - \varepsilon k)\mathfrak{H}. \tag{25}$$

Ist $\mathfrak{X}$ der duale Vektor einer variablen Geraden, dann ist

$$\text{Dualteil von } (1 - \varepsilon k)\,\mathfrak{H}\,\mathfrak{X} = 0; \quad \mathfrak{X}\mathfrak{X} = 1 \tag{25a}$$

die Gleichung des Zentralkomplexes.

Die drei Hauptkomplexe zusammen mit dem Zentralkomplex führen nun unmittelbar zu einer neuen Kennzeichnung der Minimalkomplexe. Die Gesamtheit der Geraden, welche die Achsen der drei Hauptkomplexe schneiden, bilden einen Regulus, d. h. die eine Schar von Erzeugenden einer Fläche zweiten Grades. Es gilt der

Satz 3. *Ist* $\mathfrak{A}(u^1, u^2, u^3)$ *ein Komplex und gehört in jedem Komplexstrahl* $\mathfrak{A}$ *der Regulus, dessen Erzeugenden die Achsen der drei Hauptkomplexe schneiden, dem linearen Zentralkomplex an, so ist* $\mathfrak{A}(u^1, u^2, u^3)$ *ein Minimalkomplex.*

Zum Beweise untersuchen wir die Regelfläche, die von den Achsen $\mathfrak{R}_\varkappa^*$ der ∞^1 Berührungskomplexe erzeugt wird. Da nach (24) das Skalarprodukt $\mathfrak{R}_\varkappa^*\mathfrak{B} = 0$ ist, schneiden alle Achsen $\mathfrak{R}_\varkappa^*$ die Binormale $\mathfrak{B}$ senkrecht. Es soll zunächst gezeigt werden, daß *die Achsenfläche* $\mathfrak{R}_\varkappa^*$ *eine Fläche dritter Ordnung* ist. Es sei

$$\mathfrak{X} = X\mathfrak{A} + Y\mathfrak{H} + Z\mathfrak{B}, \qquad \mathfrak{X}\mathfrak{X} = 1,$$
$$X = x + \varepsilon\bar{x}; \quad Y = y + \varepsilon\bar{y}; \quad Z = z + \varepsilon\bar{z}$$

irgend eine Gerade. Wir bestimmen die Anzahl der Achsen $\mathfrak{R}_\varkappa^*$, die von $\mathfrak{X}$ geschnitten werden, indem wir den Dualteil von $(\mathfrak{X}\mathfrak{R}_\varkappa^*)$ gleich Null setzen. Das führt auf die Gleichung dritten Grades in $\varkappa$:

$$\varkappa^3\bar{x} + \varkappa^2(\bar{y} - ky) + \varkappa(\bar{x} + kx) + \bar{y} = 0. \tag{26}$$

Eine Gerade $\mathfrak{X}$ allgemeiner Lage schneidet also die Achsenfläche in drei Punkten, sie trifft drei Achsen $\mathfrak{R}_\varkappa^*$, die durch die Wurzeln $\varkappa = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ von (26) bestimmt sind. Soll

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \tag{27}$$

sein, so muß in (26) der Koeffizient $\bar{y} - ky$ verschwinden, und die schneidende Gerade $\mathfrak{X}$ läßt sich darstellen in der Form

$$\mathfrak{X} = X\mathfrak{A} + y(1 + \varepsilon k)\,\mathfrak{H} + Z\mathfrak{B}.$$

Dann erfüllt aber $\mathfrak{X}$ stets (25a) und gehört dem Zentralkomplex an. Und umgekehrt schneidet jede Gerade des Zentralkomplexes die Achsen $\mathfrak{R}_{\sigma_1}^*$, $\mathfrak{R}_{\sigma_2}^*$, $\mathfrak{R}_{\sigma_3}^*$ dreier Berührungskomplexe derart, daß (27) erfüllt ist. Es gilt also der Satz: Erfüllen die Achsen dreier Berührungskomplexe die Gleichung (27), so gehört der Regulus, dessen Erzeugenden die drei Achsen schneiden, dem Zentralkomplex an. Ein Vergleich mit (23) führt jetzt unmittelbar zum Satz 3.

(Eingegangen am 22. Dezember 1935.)

Dedekindsche und distributive Verbände.

Von

Fritz Klein-Barmen in Wuppertal.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Literaturverzeichnis 261
Einleitung 262
§ 1. Gesättigte Unterverbände 263
§ 2. Schnürstellen. Hauptunterverbände 266
§ 3. Dedekindsche Tafeln. Verbände fünfter Ordnung. Zwei Hilfssätze 267
§ 4. Dedekindsche Verbände 270
§ 5. Ein weiterer Hilfssatz 273
§ 6. Distributive Verbände 275
Verzeichnis der Fachausdrücke 279

Literaturverzeichnis.

Bei Verweisen auf dieses Verzeichnis wird das in eckigen Klammern beigefügte Zeichen der Arbeit angegeben.

G. Birkhoff.

[1] On the combination of subalgebras. Proceedings of the Cambr. Phil. Soc. 29 (1933), S. 441—464.

[2] Applications of lattice algebra. Proceedings of the Cambr. Phil. Soc. 30 (1934), S. 115—122.

[3] On the lattice theory of ideals. Bulletin of the Am. Math. Soc. (1934), S. 613—619.

R. Dedekind.

[W. XXVI] Über eine Erweiterung des Symbols (a, b) in der Theorie der Moduln. Ges. Werke II (1931), Abh. XXVI, S. 59—85.

[W. XXVIII] Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre größten gemeinsamen Teiler. Ges. Werke II, Abh. XXVIII, S. 103—147.

[W. XXX] Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe. Ges. Werke II, Abh. XXX, S. 236—271.

F. Klein-Barmen.

[D. S.] Einige distributive Systeme in Mathematik und Logik. Jahresber. d. D. Math. Ver. 38 (1929), S. 35—40.

[A. V. I] Zur Theorie der abstrakten Verknüpfungen. Math. Annalen 105 (1931), S. 308—323.

[A. V. II] Über einen Zerlegungssatz in der Theorie der abstrakten Verknüpfungen. Math. Annalen 106 (1932), S. 114—130.

[A. V. III] Über gekoppelte Axiomensysteme in der Theorie der abstrakten Verknüpfungen. Math. Zeitschr. 37 (1933), S. 39—60.

[Verb. 1] Beiträge zur Theorie der Verbände. Math. Zeitschr. 39 (1934), S. 227—239.

[Verb. 2] Grundzüge der Theorie der Verbände. Math. Annalen 111 (1935), S. 596—621.

[Verb. 3] Über ausgeglichene Verbände. Math. Annalen 112 (1936), S. 411—418.

Einleitung.

Was die Geschichte der Theorie der Verbände anbetrifft, so steht am Anfang nicht der Begriff des allgemeinen Verbandes, sondern das Modell eines speziellen Verbandes, nämlich der von Schröder und anderen aufgestellte Kalkül, der die „Und-Oder"-Verknüpfungen der Urteile oder, wie man besser sagt, der Aussagen regelt. Vom Standpunkt der Systematik aus handelt es sich dabei um einen distributiven Verband, der gegenüber dem allgemeinen Verband eine wesentliche Einengung darstellt. Die großen Erwartungen, die man damals hinsichtlich der Weiterentwicklung des Urteilskalküls hegte, haben sich nicht erfüllt. Das beruht in der Hauptsache darauf, daß man — schon die alte Symbolik weist darauf hin — zu sehr befangen war, den Urteilskalkül in Richtung einer Algebra der Logik auszubauen, deren Gesetze denen der Algebra der Zahlen möglichst weitgehend entsprechen sollten. Damit tat man dem Kalkül Zwang an; seine Eigengesetzlichkeit konnte nicht zur Entfaltung kommen; und da niemand etwas Rechtes damit anzufangen wußte, geriet er bei den Mathematikern mehr und mehr in Vergessenheit. Einzig Dedekind, der übrigens auch vom Modell zur abstrakten Konstruktion überging, erkannte frühzeitig den wahren Wirkungsbereich des neuen Formalismus. Leider blieben seine Arbeiten über diesen Gegenstand sowohl bei den Logikern als auch bei den Mathematikern lange Zeit unbekannt. Erst die in den letzten Jahren unabhängig von Dedekind entstandene Theorie der Verbände[1]), die sich nachträglich als Wahrerin Dedekindschen Gedankengutes herausstellte, brachte hier eine Wandlung, indem sie seine Ideen einbaute und ihnen zum Durchbruch verhalf. Ich bemerke noch, daß das, was ich einen Dedekindschen bzw. distributiven[2]) Verband nenne, von Dedekind, der als erster die Bedeutung derselben für die Theorie der Moduln bzw. Ideale erkannt hat, als Dualgruppe vom Modultypus bzw. Idealtypus und von Birkhoff als B-Lattice bzw. C-Lattice bezeichnet wird.

In der vorliegenden Arbeit, die die Kenntnis von [Verb. 2] voraussetzt, soll gezeigt werden, wie aus dem allgemeinen Verband, dessen Theorie zu diesem Zweck in einigen Punkten vervollständigt wird, durch Hinzunahme geeigneter zusätzlicher Axiome zunächst der Dedekindsche

[1]) „Lattices" in der Bezeichnungsweise von Birkhoff.

[2]) Die frühere Bezeichnung des letzteren als A-Menge gebe ich auf; vgl. [A. V. I], S. 310 ff.

und daraus der distributive Verband entsteht. Insbesondere wird das logische Verhältnis zwischen den alten und den neuen Axiomen beleuchtet; wir verwenden dabei die in [Verb. 2] entwickelte graphische Darstellung der Verbände. Im Zusammenhang damit werden die Unterverbände fünfter Ordnung, die nach einem in [Verb. 2] mitgeteilten Satz in jedem Verband von genügend hoher Ordnung enthalten sind, näher bestimmt.

§ 1.

Gesättigte Unterverbände.

Erklärung 1. Ein Unterverband N eines Verbandes M heiße *gesättigt* in bezug auf M oder ein gesättigter Unterverband von M, wenn mit je zwei Elementen a und b aus N, für die $a > b$ gilt, jedes Element x aus M, für das

$$a > x > b \tag{1}$$

gilt, Element von N ist.

Satz 1. *Jeder Verband ist gesättigt in bezug auf sich selbst.*

Satz 2. *Sind N_1 und N_2 gesättigte Unterverbände eines Verbandes M, so ist auch der mengentheoretische Durchschnitt von N_1 und N_2, falls derselbe nicht leer ist, gesättigt in bezug auf M.*

Beweis. D sei der Durchschnitt von N_1 und N_2. Nach einem bekannten Satz[3]) ist D ein Unterverband von M. Sind nun a und b Elemente aus D mit $a > b$, so gehört jedes x aus M, für das (1) gilt, sowohl N_1 als auch N_2 und damit auch D an.

Erklärung 2. Es sei a ein Element eines Verbandes M. Dann werde die Menge der Elemente x aus M, für die

$$x > a$$

gilt, mit $r'(a)$ bezeichnet.

Entsprechend werde die Menge der Elemente x aus M, für die

$$x < a$$

gilt, mit $r''(a)$ bezeichnet[4]).

Satz 3. *Jede der Mengen $r'(a)$ und $r''(a)$ ist ein gesättigter Unterverband von M.*

Beweis. Gilt

$$x_1 > a, \quad x_2 > a,$$

so gilt auch

$$x_1 \cup x_2 > a, \quad x_1 \cap x_2 > a.$$

Somit ist $r'(a)$ ein Unterverband von M. Daß $r'(a)$ gesättigt in bezug auf M ist, ist klar.

---

[3]) Vgl. [Verb. 2], S. 600.

[4]) Bereits Dedekind hat derartige Mengen betrachtet; vgl. [W. XXVIII] S. 117—118.

Entsprechend ergibt sich der zweite Teil der Behauptung.

Satz 4. *Sind a und b Elemente eines Verbandes M, so ist $r'(a)$ dann und nur dann ein Oberverband von $r'(b)$, wenn $a \prec b$ gilt, d. h. wenn b Element von $r'(a)$ ist. Entsprechend ist $r''(a)$ dann und nur dann ein Oberverband von $r''(b)$, wenn $a \succ b$ gilt, d. h. wenn b Element von $r''(a)$ ist.*

Aus $r'(a) = r'(b)$ wie aus $r''(a) = r''(b)$ folgt somit $a = b$.

Satz 5. *Sind a und b Elemente eines Verbandes M, so gilt*[5])

$$D[r'(a), r'(b)] = r'(a \cup b)$$

und

$$D[r''(a), r''(b)] = r''(a \cap b).$$

Beweis. Für jedes Element x aus $D[r'(a), r'(b)]$ gilt

$$x \succ a, \quad x \succ b,$$

also auch

$$x \succ a \cup b;$$

d. h. x gehört zu $r'(a \cup b)$.

Für jedes Element y aus $r'(a \cup b)$ gilt

$$y \succ a \cup b,$$

also auch

$$y \succ a, \quad y \succ b;$$

d. h. y gehört zu $D[r'(a), r'(b)]$.

Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen. Entsprechend ergibt sich die Richtigkeit des zweiten Teiles.

Satz 6. *Sind a und b Elemente eines Verbandes M, so gilt*[6])

$$C[r'(a), r'(b)] = r'(a \cap b)$$

und

$$C[r''(a), r''(b)] = r''(a \cup b).$$

Beweis. Wie soeben beschränken wir uns wieder auf den Beweis des ersten Teiles der Behauptung.

Zu zeigen ist erstens, daß $r'(a \cap b)$ gemeinsame Obermenge von $r'(a)$ und $r'(b)$ ist, und zweitens, daß jede gemeinsame Obermenge $r'(c)$ von $r'(a)$ und $r'(b)$ auch Obermenge von $r'(a \cap b)$ ist.

Aus

$$a \succ a \cap b, \quad b \succ a \cap b$$

folgt, daß $r'(a \cap b)$ gemeinsame Obermenge von $r'(a)$ und $r'(b)$ ist. Ist andererseits c ein Element aus M derart, daß $r'(c)$ gemeinsame Obermenge von $r'(a)$ und $r'(b)$ ist, so findet

$$a \succ c, \quad b \succ c,$$

---

[5]) Unter $D(p, q)$ werde der Durchschnitt der Mengen p und q verstanden.

[6]) Unter $C(p, q)$ werde das „Kompositum" der Verbände p und q, d. h. der engste p und q umfassende Unterverband von M verstanden.

also auch

$$a \cap b \succ c$$

statt; d. h. $r'(c)$ ist Obermenge von $r'(a \cap b)$.

Satz 7. *Dann und nur dann, wenn a und b voneinander abhängig sind, gilt*[7])

$$V[r'(a), r'(b)] = r'(a \cap b)$$

und

$$V[r''(a), r''(b)] = r''(a \cup b).$$

Beweis. Wir beschränken uns wieder auf den Beweis des ersten Teiles der Behauptung.

Gilt $a \succ b$, so ist $r'(a)$ eine Untermenge von $r'(b)$, weswegen

$$C[r'(a), r'(b)] \text{ in } V[r'(a), r'(b)]$$

übergeht. Gilt umgekehrt

$$r'(a \cap b) = V[r'(a), r'(b)],$$

so ist $a \frown b$ Element von $r'(a)$ oder $r'(b)$. Ist das erstere der Fall, so findet

$$a \cap b \succ a,$$

also $b \succ a$ statt. Ist $a \frown b$ dagegen Element von $r'(b)$, so folgt

$$a \cap b \succ b,$$

also $a \succ b$.

Erklärung 3. Die Gesamtheit der den Elementen a eines Verbandes M zugeordneten Unterverbände $r'(a)$ bzw. $r''(a)$ von M werde mit R' bzw. R'' bezeichnet.

Satz 5α. *Jede der Mengen R' und R'' ist eine D-Menge.*

Satz 6α. *R' ist eine $V_{R'}$-Menge; R'' ist eine $V_{R''}$-Menge.*

Folgerung. R' ist eine $(V_{R'}, D)$-Menge; R'' ist eine $(V_{R''}, D)$-Menge.

Satz 7α. *R' und R'' sind dann und nur dann V-Mengen, wenn M ein $\mathfrak{L}$-Verband ist.*

Anmerkung. Die Sätze 5α, 6α und 7α geben den in den Sätzen 5, 6 und 7 beschriebenen Tatbestand in der in [Verb. 2], S. 603 und 604 eingeführten Ausdrucksweise wieder.

Erklärung 4. Es seien a und b Elemente eines Verbandes M, die der Bedingung

$$a \succ b$$

genügen. Dann werde die Menge der Elemente x aus M, für die

$$a \succ x \succ b$$

gilt, mit $r(a, b)$ bezeichnet.

Satz 8. *Die Menge $r(a, b)$ ist ein gesättigter Unterverband von M.* Der Beweis verläuft ähnlich wie bei Satz 3.

---

[7]) Unter $V(p, q)$ werde die Vereinigung der Mengen p und q verstanden.

Ersichtlich findet folgendes statt: Besitzt M eine obere Spitze f, so stellen $r'(a)$ und $r(f, a)$ dieselbe Menge dar; besitzt M eine untere Spitze e, so stellen $r''(a)$ und $r(a, e)$ dieselbe Menge dar; besitzt M beide Spitzen f und e, so stellen

$$r'(e), \quad r''(f), \quad r(f, e) \text{ und } M$$

dieselbe Menge dar.

§ 2.

Schnürstellen. Hauptunterverbände.

Erklärung 5. Ein Element a eines Verbandes M heiße ein *inneres* Element von M, wenn es in M mindestens einmal zwei Elemente x und y gibt derart, daß sich a zwischen x und y befindet.

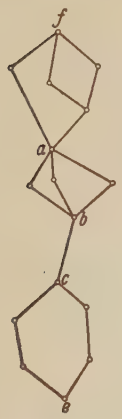

Fig. 1.

Satz 9. *Ein Element a eines Verbandes M ist dann und nur dann ein inneres Element von M, wenn a keine Spitze von M ist.*

Erklärung 6. Ein inneres Element a eines Verbandes M heiße eine *Schnürstelle* von M, wenn alle Elemente des Verbandes abhängig von a sind. M heiße *n-mal geschnürt*, wenn M genau n Schnürstellen besitzt. Ein nullmal geschnürter Verband werde auch als *ungeschnürt* bezeichnet.

Beispielsweise ist der in Fig. 1 wiedergegebene Verband 16. Ordnung dreimal geschnürt; Schnürstellen sind die Elemente a, b und c.

Satz 10. *Jede Schnürstelle a eines Verbandes M teilt die Elemente von M in zwei Klassen derart, daß sich in der ersten Klasse alle Oberelemente und in der zweiten Klasse alle Unterelemente von a befinden. Keine Klasse ist leer. Die erste Klasse ist mit $r'(a)$ und die zweite mit $r''(a)$ identisch.*

Satz 11. *Die Schnürstellen eines Verbandes M bilden einen linearen Unterverband von M.*

Satz 12. *Ein Verband M ist dann und nur dann ein $\mathfrak{L}$-Verband, wenn alle inneren Elemente von M Schnürstellen sind.*

Erklärung 7. Es seien

$$a_1, \ldots, a_n \qquad (n \geqq 1)$$

die Schnürstellen eines n-mal geschnürten Verbandes M. Es sei

$$a_1 \succ \ldots \succ a_n.$$

Dann mögen die $n+1$ Verbände

$$(2) \qquad r'(a_1), \quad r(a_1, a_2), \ldots, r(a_{n-1}, a_n), \quad r''(a_n)$$

als *Hauptunterverbände* von M bezeichnet werden.

Wie man sofort sieht, sind die Hauptunterverbände (2) ungeschnürte Unterverbände von M. Offenbar gehört jedes Element von M mit Ausnahme derjenigen Elemente, die Schnürstellen sind, genau einem Hauptunterverband an; (2) vermittelt somit eine Einteilung der Elemente von M in $n+1$ Klassen.

Satz 13. *Ein Verband M ist dann und nur dann längenendlich bzw. ausgeglichen, wenn alle Hauptunterverbände von M längenendlich bzw. ausgeglichen sind.*

Die Richtigkeit dieses Satzes leuchtet ohne weiteres ein, wenn auf die Erklärung der längenendlichen bzw. ausgeglichenen Verbände zurückgegriffen wird[8]).

§ 3.

Dedekindsche Tafeln. Verbände fünfter Ordnung. Zwei Hilfssätze.

1. Dedekind hat ein Schema angegeben, vermöge dessen man einen Überblick über das Gefüge endlicher Verbände gewinnt[9]). Handelt es sich etwa um einen Verband n-ter Ordnung, so ordne man die n Elemente, die mit

$$a_1, \ldots, a_n$$

bezeichnet sein mögen und die nicht alle voneinander verschieden zu sein brauchen, ähnlich wie bei den Cayleyschen und anderen Tafeln in Form eines Quadrates an:

	a_1	a_2	.	.	.	a_{n-1}	a_n	$\cup$
a_1		.	.	.	.	.	.	a_1
a_2	.		.	.	.	.	.	a_2
.	.	.		.	.	.	.	.
.	.	.	.		.	.	.	.
.	.	.	.	.		.	.	.
a_{n-1}	.	.	.	.	.		.	a_{n-1}
a_n	.	.	.	.	.	.		a_n
$\cap$	a_1	a_2	.	.	.	a_{n-1}	a_n	

[8]) Vgl. [Verb. 2], S. 609 und [Verb. 3], S. 413.

[9]) Vgl. [W. XXVIII], S. 116 und [W. XXX], S. 244 ff. Wegen einer weiteren tabellenmäßigen Zusammenstellung der Elemente eines Verbandes vgl. Birkhoff [1], S. 449 ff.

Das Durchschnittsfeld der i-ten Zeile und der k-ten Spalte wird mit dem Element $a_i \cup a_k$ oder $a_i \cap a_k$ besetzt, je nachdem $i < k$ oder $i > k$ ist. Der besseren Übersichtlichkeit wegen läßt man die Felder der von links oben nach rechts unten verlaufenden Diagonalen, für die also $i = k$ gilt, frei. Beispielsweise kommt dem aus vier nicht notwendigerweise verschiedenen Elementen a, b, c und d bestehenden Verband mit der Kompositionsvorschrift

$$a \cup b = c, \quad a \cap b = d$$

die folgende Tafel zu:

	a	b	c	d	$\cup$
a		c	c	a	a
b	d		c	b	b
c	a	b		c	c
d	d	d	d		d
$\cap$	a	b	c	d	

2. Nach einem in [Verb. 2] mitgeteilten Satz[10]) enthält jeder Verband von einer höheren als der fünften Ordnung mindestens einen $\mathfrak{U}(5)$ — unter $\mathfrak{U}(\mu)$ ein Unterverband μ-ter Ordnung verstanden. Wie in [Verb. 2] ebenfalls dargelegt[11]) worden ist, gibt es genau fünf verschiedene Typen

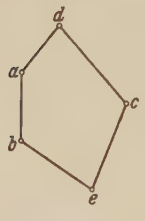

Fig. 2.

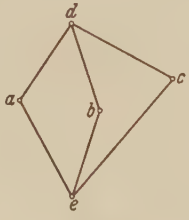

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

von Verbänden fünfter Ordnung. Die Fig. 2 bis 6 geben die Netze dieser Verbände wieder. Wir bemerken dabei, daß die den Fig. 4 und 5 entsprechenden Verbände zueinander symmetrisch sind.

---

[10]) S. 618.
[11]) S. 612.

3. Um den Gang der Untersuchung später nicht unterbrechen zu müssen, teilen wir hier noch zwei Sätze mit, von denen der erste die Grundlage für den später zu beweisenden Satz 24 bildet, während der zweite zur Klärung des zwischen den Dedekindschen und distributiven Verbänden bestehenden logischen Zusammenhanges beiträgt.

Satz 14. *Setzt man, wenn a, b und c nicht notwendigerweise verschiedene Elemente eines Verbandes M sind und $b > c$ stattfindet,*

$$b_1 = b \cap (c \cup a), \quad c' = c \cup (a \cap b),$$
$$b''' = c \cup a, \quad c_3 = a \cap b,$$

so bilden die Elemente

(3) $$b''', b_1, a, c', c_3$$

einen Unterverband N von M. Gilt überdies

(4) $$b_1 \neq c',$$

so sind die Elemente (3) *voneinander verschieden und a ist unabhängig von b_1 und c'.*

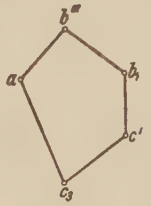

Fig. 7.

Wegen des Beweises werde auf Dedekind, von dem der Satz herrührt, verwiesen[13]). Die dem Verband N entsprechende Dedekindsche Tafel sieht, gleichgültig, ob (4) in Kraft ist oder nicht, folgendermaßen aus:

	b'''	b_1	a	c'	c_3	$\cup$
b'''		b'''	b'''	b'''	b'''	b'''
b_1	b_1		b'''	b_1	b_1	b_1
a	a	c_3		b'''	a	a
c'	c'	c'	c_3		c'	c'
c_3	c_3	c_3	c_3	c_3		c_3
$\cap$	b'''	b_1	a	c'	c_3	

In dem Fall, daß (4) gilt, ist N — das zugehörige Netz gibt Fig. 7 wieder — mit dem in Fig. 2 dargestellten Verband isomorph.

Satz 15. *Gilt für drei Elemente a, b und c eines Verbandes*

$$(a \cup b) \cap (b \cup c) \cap (c \cup a) = (a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a),$$

so gilt auch

$$[(a \cap b) \cup c] \cap (a \cup b) = [(a \cup b) \cap c] \cup (a \cap b).$$

---

[13]) Vgl. [W. XXX], S. 255—258.

Beweis. Nach [Verb. 2], S. 602 sind für drei beliebige Elemente a, b und c eines Verbandes die Abhängigkeiten

$$(a \cup b) \cap (b \cup c) \cap (c \cup a) \succ [(a \cap b) \cup c] \cap (a \cup b),$$
$$[(a \cap b) \cup c] \cap (a \cup b) \succ [(a \cup b) \cap c] \cup (a \cap b),$$
$$[(a \cup b) \cap c] \cup (a \cap b) \succ (a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a)$$

in Kraft, woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

§ 4.

Dedekindsche Verbände.

Satz 16. *Sind von den Elementen a, b und c eines Verbandes zwei Elemente identisch, so gilt*

$$[(a \cap b) \cup c] \cap (a \cup b) = [(a \cup b) \cap c] \cup (a \cap b). \tag{5}$$

Beweis. Da a und b symmetrisch in (5) eingehen, genügt es, die Fälle $a = b$ und $a = c$ zu betrachten. Zur Abkürzung werde die linke Seite von (5) mit c_l und die rechte mit c_r bezeichnet. Dann gilt im ersten Fall

$$c_l = [a \cup c] \cap a = a$$

und

$$c_r = [a \cap c] \cup a = a.$$

Im zweiten Fall ergibt sich

$$c_l = [(a \cap b) \cup a] \cap (a \cup b) = a \cap (a \cup b) = a$$

und

$$c_r = [(a \cup b) \cap a] \cup (a \cap b) = a \cup (a \cap b) = a.$$

Satz 17. *Bestehen zwischen den Elementen a, b und c eines Verbandes zwei Abhängigkeiten, so gilt* (5).

Beweis. Wegen des vorhergehenden Satzes darf angenommen werden, daß a, b und c voneinander verschieden sind. Dann sind die folgenden Fälle zu unterscheiden:

$$a \succ b, \quad a \succ c; \quad a \prec b, \quad a \prec c;$$
$$b \succ c, \quad b \succ a; \quad b \prec c, \quad b \prec a;$$
$$c \succ a, \quad c \succ b; \quad c \prec a, \quad c \prec b.$$

Da (5) sowohl in den Elementen a und b als auch in den Verknüpfungen $\cup$ und $\cap$ symmetrisch ist, genügt es, die Untersuchung auf die beiden Fälle

$$a \succ b, \quad a \succ c$$

und

$$c \succ a, \quad c \succ b$$

zu beschränken. Im ersten Fall ist

$$c_l = [b \cup c] \cap a = b \cup c$$

und

$$c_r = [a \cap c] \cup b = c \cup b.$$

Im zweiten Fall ergibt sich

$$c_l = c \cap (a \cup b) = a \cup b$$

und

$$c_r = [a \cup b] \cup (a \cap b) = a \cup b.$$

Anmerkung. Wegen eines zweiten Beweises der beiden letzten Sätze vgl. die Anmerkung im Anschluß an Satz 27.

Satz 18. *Die folgende Aussage hat axiomatischen Charakter:*

VI. Für drei beliebige Elemente a, b und c aus M gilt

$$[(a \cap b) \cup c] \cap (a \cup b) = [(a \cup b) \cap c] \cup (a \cap b).$$

Beweis. Einerseits gibt es Verbände, für die VI nicht in Kraft ist. Das zeigt z. B. der in Fig. 2 wiedergegebene Verband; für denselben findet

$$c_l = a, \quad c_r = b$$

statt.

Andererseits gibt es Verbände, für die VI in Kraft ist. So hat wegen des Satzes 17 die Aussage VI für jeden $\mathfrak{L}$-Verband, insbesondere also für jeden Verband von der ersten bis zur dritten Ordnung Geltung. Wegen desselben Satzes trifft VI aber auch für die nichtlinearen Verbände vierter Ordnung und somit für *alle* Verbände vierter Ordnung zu. Daß es auch nichtlineare Verbände von höherer als der vierten Ordnung gibt, für die VI in Kraft ist, zeigt der in Fig. 3 wiedergegebene Verband fünfter Ordnung. Um das nachzuweisen, genügt es nach Satz 17, die Gültigkeit von VI für die inneren Elemente a, b und c festzustellen. Das ist aber, da

$$c_l = c, \quad c_r = c$$

stattfindet, der Fall[13]).

VI ist also ein *Axiom*; es ist zuerst von Dedekind aufgestellt worden[14]) und möge deswegen als *Dedekindsches* bezeichnet werden.

Erklärung 8. Ein dem Axiom VI genügender Verband heiße ein *Dedekindscher* Verband (De-Verband).

Satz 19. *Jeder Unterverband eines* De-*Verbandes, insbesondere also der Durchschnitt*[15]) *zweier* De-*Verbände, ist selbst ein* De-*Verband.*

Satz 20. *Ist* M *eine endliche oder unendliche Menge von* De-*Verbänden derart, daß je zwei Verbände aus* M *Unterverbände von mindestens*

[13]) Gleichzeitig geht aus diesem Beispiel hervor, daß die Beziehung (5) in Kraft sein kann, ohne daß zwischen den Elementen a, b und c eine Abhängigkeit besteht; der Satz 17 kann somit nicht umgekehrt werden.

[14]) Vgl. z. B. [W. XXVIII], S. 115.

[15]) Falls derselbe nicht leer ist.

einem Verband aus M *sind, so ist auch die mengentheoretische Vereinigung aller Verbände aus* M *ein* De*-Verband*[16]).

Satz 21. *Mit* VI *ist jedes der folgenden Axiome gleichwertig:*

VI_1'. Für drei beliebige Elemente a, b und c aus M gilt

$$(a \cup b) \cap (a \cup c) = a \cup [(a \cup b) \cap c].$$

VI_1''. Für drei beliebige Elemente a, b und c aus M gilt

$$(a \cap b) \cup (a \cap c) = a \cap [(a \cap b) \cup c].$$

VI_2. Ist $g > h$ und c beliebig, so gilt

$$(h \cup c) \cap g = (g \cap c) \cup h.$$

Beweis. Hinsichtlich VI_1' und VI_1'' vgl. Dedekind [W. XXVIII], S. 115; hinsichtlich VI_2 vgl. [W. XXX], S. 239.

Zusatz. Ist für einen Verband VI_1' in Kraft, dann auch VI_1'' und umgekehrt.

Satz 22. *Das Axiom* VI *ist mit der folgenden formal schwächeren Forderung gleichwertig:*

Für drei beliebige Elemente a, b und c aus M gilt

$$[(a \cap b) \cup c] \cap (a \cup b) < [(a \cup b) \cap c] \cup (a \cap b).$$

Entsprechend sind die in VI_1', VI_1'' und VI_2 auftretenden Gleichungen bzw. mit den folgenden formal schwächeren Abhängigkeiten gleichwertig:

$$(a \cup b) \cap (a \cup c) < a \cup [(a \cup b) \cap c],$$
$$(a \cap b) \cup (a \cap c) > a \cap [(a \cap b) \cup c],$$
$$(h \cup c) \cap g < (g \cap c) \cup h.$$

Beweis: [Verb. 2], S. 602 und 603, Satz 15 und 16.

Satz 23. *Ein Verband* M *ist dann und nur dann dedekindsch, wenn alle Hauptunterverbände von* M *dedekindsch sind.*

Beweis. Daß die angegebene Bedingung notwendig ist, ist klar. Daß sie hinreichend ist, ergibt sich folgendermaßen. Vorausgesetzt sei, daß alle Hauptunterverbände von M dedekindsch sind. Zu zeigen ist, daß für drei beliebige Elemente a, b und c aus M die in VI ausgesprochene Forderung in Kraft ist. Gehören a, b und c demselben Hauptunterverband an, so ist VI nach Voraussetzung erfüllt. Gehören a, b und c zwei verschiedenen Hauptunterverbänden an, so bestehen mindestens zwei Abhängigkeiten zwischen den drei Elementen, und VI ist nach Satz 17 in Geltung. Erst recht ist VI in Kraft, wenn a, b und c drei verschiedenen Hauptunterverbänden von M angehören.

---

[16]) Vgl. [Verb. 2], S. 600.

Satz 24 [Dedekind[17])]. *Jeder nichtdedekindsche Verband, d. h. jeder Verband, für den* VI *nicht durchweg in Kraft ist, besitzt mindestens einen nichtdedekindschen* $\mathfrak{U}$ (5).

Beweis. Da M nichtdedekindsch ist, gibt es in M mindestens einmal drei Elemente a, b und c mit $b \succ c$ derart, daß nicht

$$(c \cup a) \cap b = (b \cap a) \cup c$$

stattfindet. Nach Satz 14 besitzt dann aber M den in Fig. 7 dargestellten nichtdedekindschen $\mathfrak{U}$ (5).

Folgerungen. Es gibt nur einen Typ nichtdedekindscher Verbände fünfter Ordnung, nämlich den in Fig. 7 bzw. Fig. 2 wiedergegebenen Typ. Ein Verband von einer höheren als der fünften Ordnung ist dann und nur dann dedekindsch, wenn alle Unterverbände fünfter Ordnung dedekindsch sind[18]).

§ 5.

Ein weiterer Hilfssatz.

Der folgende Satz ist ein Gegenstück zu Satz 14; wie auf dem letzteren das in Satz 24 ausgesprochene Kriterium für Dedekindsche Verbände fußt, so läßt sich Satz 25 zu einem entsprechenden Kriterium für distributive Verbände entwickeln, dessen Formulierung Satz 34 bringt.

Satz 25. *Setzt man, wenn a, b und c nicht notwendigerweise verschiedene Elemente eines* De*-Verbandes M sind,*

$$a_0 = [(b \cap c) \cup a] \cap (b \cup c) = [(b \cup c) \cap a] \cup (b \cap c),$$
$$b_0 = [(c \cap a) \cup b] \cap (c \cup a) = [(c \cup a) \cap b] \cup (c \cap a),$$
$$c_0 = [(a \cap b) \cup c] \cap (a \cup b) = [(a \cup b) \cap c] \cup (a \cap b),$$
$$d' = (a \cup b) \cap (b \cup c) \cap (c \cup a),$$
$$d_1 = (a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a),$$

so bilden die Elemente

$$a_0,\ b_0,\ c_0,\ d',\ d_1 \tag{6}$$

einen Unterverband N von M. Gilt überdies

$$d' \neq d_1, \tag{7}$$

so sind die Elemente (6) *voneinander verschieden und a_0, b_0, c_0 sind zu je zweien voneinander unabhängig.*

---

[17]) Vgl. [W. XXX], S. 255 ff.

[18]) Aus Satz 24 folgt ferner erneut, daß alle Verbände von der ersten bis zur vierten Ordnung De-Verbände sind.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß die Elemente (6) einen Unterverband N von M bilden. Nach Satz 16 in [Verb. 2], S. 602 findet

$$d' \succ \begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{Bmatrix} \succ d_1$$

statt. Somit genügt es nachzuweisen, daß die Elemente

(8′) $$a_0 \cup b_0,\ b_0 \cup c_0,\ c_0 \cup a_0$$

und

(8″) $$a_0 \cap b_0,\ b_0 \cap c_0,\ c_0 \cap a_0$$

unter den Elementen (6) enthalten sind. Zur Abkürzung werde gesetzt

$$a''' = b \cup c,\ \ b_1 = b \cap (c \cup a),\ \ a_1 = a \cap (b \cup c).$$

Dann gilt

$$a \cap a''' = a_1$$

und somit

(9) $$(a \cap a''') \cup b_1 = a_1 \cup b_1.$$

Wegen VI_1' gilt ferner

(10) $$(a \cup b_1) \cap a''' = d'.$$

Da

$$a''' \succ b_1$$

stattfindet, folgt aus (9) und (10) unter Berücksichtigung von VI_2

$$a_1 \cup b_1 = d'.$$

Aus

$$d' \succ a_0 \succ a_1,\ \ d' \succ b_0 \succ b_1$$

folgt weiter

$$d' \succ a_0 \cup b_0 \succ a_1 \cup b_1$$

und somit

$$a_0 \cup b_0 = d'.$$

Da die Elemente (8′) durch Buchstabenvertauschung ineinander übergehen, ergibt sich schließlich

(11′) $$a_0 \cup b_0 = b_0 \cup c_0 = c_0 \cup a_0 = d'.$$

Ähnlich zeigt man unter Verwendung der Abkürzungen

$$a_2 = b \cap c,\ \ b' = b \cup (c \cap a),\ \ a' = a \cup (b \cap c),$$

daß

(11″) $$a_0 \cap b_0 = b_0 \cap c_0 = c_0 \cap a_0 = d_1$$

stattfindet, womit der erste Teil der Behauptung bewiesen ist.

Nunmehr sei (7) in Kraft; nachzuweisen ist einmal, daß die Elemente (6) voneinander verschieden sind. Aus Symmetriegründen reicht es aus, zu zeigen, daß

$$a_0 \neq b_0,\ \ a_0 \neq d',\ \ a_0 \neq d_1$$

gilt.

Wäre $a_0 = b_0$, so wäre wegen (11′) und (11″) auch $d' = d_1$.
Wäre $a_0 = d'$, so wäre wegen (11′)

$$a_0 \cup b_0 = a_0, \quad c_0 \cup a_0 = a_0,$$

also auch

$$a_0 \cap b_0 = b_0, \quad c_0 \cap a_0 = c_0.$$

Wegen (11″) fände dann $b_0 = c_0$ und infolgedessen $d_1 = d'$ statt.
Ähnlich zeigt man, daß auch $a_0 = d_1$ unmöglich ist.

Wären nun zwei der Elemente a_0, b_0, c_0 voneinander abhängig, etwa a_0 und b_0, so müßte entweder

$$a_0 \cup b_0 = a_0$$

oder

$$a_0 \cup b_0 = b_0$$

sein; beides ist aber, wie bereits gezeigt, unmöglich. Damit ist der Satz 25 in vollem Umfang bewiesen.

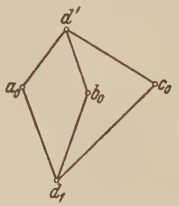

Fig. 8.

Die dem Verband N entsprechende Dedekindsche Tafel sieht, gleichgültig, ob (7) in Kraft ist oder nicht, folgendermaßen aus:

	d'	a_0	b_0	c_0	d_1	$\cup$
d'		d'	d'	d'	d'	d'
a_0	a_0		d'	d'	a_0	a_0
b_0	b_0	d_1		d'	b_0	b_0
c_0	c_0	d_1	d_1		c_0	c_0
d_1	d_1	d_1	d_1	d_1		d_1
$\cap$	d'	a_0	b_0	c_0	d_1	

In dem Fall, daß (7) gilt, ist N — das zugehörige Netz gibt Fig. 8 wieder — mit dem in Fig. 3 dargestellten Verband isomorph[19]).

§ 6.

Distributive Verbände.

Satz 26. *Sind von den Elementen a, b und c eines Verbandes zwei Elemente identisch, so gilt*

(12) $(a \cup b) \cap (b \cup c) \cap (c \cup a) = (a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a)$.

[19]) Von demselben Typus ist übrigens auch der in [A. V. II], S. 120 angegebene Verband.

Beweis. Aus Symmetriegründen genügt es, den Fall $a = b$ zu betrachten. Zur Abkürzung werde die linke Seite von (12) mit d_l und die rechte mit d_r bezeichnet. Dann findet bei der obigen Annahme

$$d_l = a \cap (a \cup c) = a$$

und

$$d_r = a \cup (a \cap c) = a$$

statt.

Satz 27. *Bestehen zwischen den Elementen a, b und c eines Verbandes zwei Abhängigkeiten, so gilt* (12).

Beweis. Wegen des vorhergehenden Satzes darf angenommen werden, daß a, b und c voneinander verschieden sind. Da (12) sowohl in den Elementen als auch in den Verknüpfungen symmetrisch ist, genügt es, den Fall

$$a > b, \quad a > c$$

zu betrachten. Dafür findet aber

$$d_l = a \cap (b \cup c) \cap a = b \cup c$$

und

$$d_r = b \cup (b \cap c) \cup c = b \cup c$$

statt.

Anmerkung. Aus den Sätzen 15 und 26 folgt erneut Satz 16, aus den Sätzen 15 und 27 ebenso Satz 17.

Satz 28. *Die folgende Aussage hat axiomatischen Charakter:*

VII. Für drei beliebige Elemente a, b und c aus M gilt

$$(a \cup b) \cap (b \cup c) \cap (c \cup a) = (a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a).$$

Beweis. Einerseits gibt es Verbände, für die VII nicht in Kraft ist. Das zeigt z. B. der in Fig. 3 wiedergegebene Verband; für denselben findet

$$d_l = d, \quad d_r = e$$

statt. Andererseits gibt es Verbände, für die VII in Kraft ist. So hat wegen des Satzes 27 die Aussage VII für jeden $\mathfrak{L}$-Verband, insbesondere also für jeden Verband von der ersten bis zur dritten Ordnung Geltung. Wegen desselben Satzes trifft VII aber auch für die nichtlinearen Verbände vierter Ordnung und somit für *alle* Verbände vierter Ordnung zu. Daß es auch nichtlineare Verbände von höherer als der vierten Ordnung gibt, für die VII in Kraft ist, zeigt der in Fig. 9 wiedergegebene Verband achter Ordnung. Um das nachzuweisen, genügt es nach Satz 27, die Gültigkeit von VII für diejenigen Tripel von Elementen festzustellen, zwischen denen höchstens eine Abhängigkeit besteht. Aus Symmetriegründen dürfen wir uns bei diesem Nachweis auf die Tripel

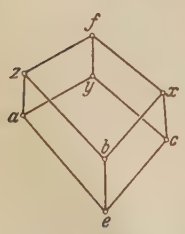

Fig. 9.

$$a, b, c$$

und

$$a,\ b,\ x$$

beschränken. Im ersten Fall erhält man

$$(a \cup b) \cap (b \cup c) \cap (c \cup a) = z \cap x \cap y = e,$$
$$(a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a) = e \cup e \cup e = e$$

und im zweiten Fall

$$(a \cup b) \cap (b \cup x) \cap (x \cup a) = z \cap x \cap f = b,$$
$$(a \cap b) \cup (b \cap x) \cup (x \cap a) = e \cup b \cup e = b.$$

Somit ist VII in Kraft[20]).

VII ist also ein *Axiom*; es mag als *distributives* bezeichnet werden.

Anmerkung. Nach Satz 15 dieser Arbeit ist VI eine Folge von VII. Andererseits ist aber VII keine Folge von VI, wie der in Fig. 3 wiedergegebene Verband erkennen läßt, für den, wie bereits nachgewiesen, zwar VI in Kraft ist, aber nicht VII.

Erklärung 9. Ein dem Axiom VII genügender Verband heiße ein *distributiver* Verband (Dis-Verband).

Satz 29. *Jeder Unterverband eines Dis-Verbandes, insbesondere also der Durchschnitt*[21]) *zweier Dis-Verbände, ist selbst ein Dis-Verband.*

Satz 30. *Ist* M *eine endliche oder unendliche Menge von Dis-Verbänden derart, daß je zwei Verbände aus* M *Unterverbände von mindestens einem Verband aus* M *sind, so ist auch die mengentheoretische Vereinigung aller Verbände aus* M *ein Dis-Verband*[22]).

Satz 31. *Mit* VII *ist jedes der folgenden Axiome gleichwertig*:

VII′. Für drei beliebige Elemente a, b und c aus M gilt

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c).$$

VII″. Für drei beliebige Elemente a, b und c aus M gilt

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c).$$

Beweis: Dedekind [W. XXX], S. 252.

Zusatz. Ist für einen Verband VII′ in Kraft, dann auch VII″ und umgekehrt.

Die Formulierungen VII′ und VII″ haben die Bezeichnung „distributives" Axiom veranlaßt.

---

[20]) Gleichzeitig geht aus diesem Beispiel hervor, daß die Beziehung (12) in Kraft sein kann, ohne daß zwischen den Elementen a, b und c eine Abhängigkeit besteht; der Satz 27 kann somit nicht umgekehrt werden. Wir bemerken noch, daß der in [Verb. 2], S. 617, Fig. 20 dargestellte Verband mit dem in Fig. 9 der vorliegenden Arbeit dargestellten isomorph ist.

[21]) Falls derselbe nicht leer ist.

[22]) Vgl. Fußnote 16.

Satz 32. *Das Axiom* VII *ist mit der folgenden formal schwächeren Forderung gleichwertig:*

Für drei beliebige Elemente a, b und c aus M gilt

$$(a \cup b) \cap (b \cup c) \cap (c \cup a) \prec (a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a).$$

Entsprechend sind die in VII′ und VII″ auftretenden Gleichungen bzw. mit den folgenden formal schwächeren Abhängigkeiten gleichwertig:

$$a \cup (b \cap c) \succ (a \cup b) \cap (a \cup c),$$
$$a \cap (b \cup c) \prec (a \cap b) \cup (a \cap c).$$

Beweis: [Verb. 2], S. 602, Satz 15 und 16.

Satz 33. *Ein Verband M ist dann und nur dann distributiv, wenn alle Hauptunterverbände von M distributiv sind.*

Der Beweis verläuft entsprechend dem von Satz 23; wie der letztere sich auf Satz 17 stützt, so ist jetzt Satz 27 heranzuziehen.

Satz 34. *Jeder nichtdistributive* De-*Verband, d. h. jeder* De-*Verband, für den* VII *nicht durchweg in Kraft ist, besitzt mindestens einen nichtdistributiven Dedekindschen* U (5).

Beweis. Da M nichtdistributiv ist, gibt es in M mindestens einmal drei Elemente a, b und c derart, daß (12) nicht stattfindet. Nach Satz 25 besitzt dann aber M den in Fig. 8 dargestellten nichtdistributiven Dedekindschen U (5).

Folgerungen. Es gibt nur einen Typ nichtdistributiver De-Verbände fünfter Ordnung, nämlich den in Fig. 8 bzw. Fig. 3 wiedergegebenen Typ. Ein Verband von einer höheren als der fünften Ordnung ist dann und nur dann distributiv, wenn alle Unterverbände fünfter Ordnung distributiv sind[23]).

Satz 35. *Es gibt zwei Typen nichtlinearer* Dis-*Verbände fünfter Ordnung, nämlich die in den Fig.* 4 *und* 5 *wiedergegebenen Typen.*

Beweis. Wie bereits bemerkt, stellen die Fig. 2 bis 6 die fünf verschiedenen Typen dar, die bei Verbänden fünfter Ordnung überhaupt möglich sind; von diesen sind die den Fig. 2 und 3 entsprechenden Typen nichtdistributiv, während Fig. 6 den linearen Typ kennzeichnet.

So sind von den sechs Unterverbänden fünfter Ordnung, die der in Fig. 9 dargestellte Verband besitzt, die drei Verbände

$$f, z, a, b, e; \quad f, y, a, c, e; \quad f, x, b, c, e$$

---

[23]) Aus Satz 34 folgt ferner erneut, daß alle Verbände von der ersten bis zur vierten Ordnung Dis-Verbände sind.

vom Typ der Fig. 4, während die drei Verbände

$$f,\ z,\ y,\ a,\ e;\quad f,\ z,\ x,\ b,\ e;\quad f,\ y,\ x,\ c,\ e$$

vom Typ der Fig. 5 sind[24]).

Verzeichnis der Fachausdrücke.

Die Stichworte sind durch gesperrten Druck hervorgehoben; die Wiederholung des Stichwortes ist durch einen waagerechten Strich angedeutet. Die Zahlen verweisen auf die Erklärungen, in denen die Ausdrücke eingeführt werden.

Gesättigter Unterverband 1.
Hauptunterverband 7.
Inneres Element 5.
Menge; r-— 4; r'-—, r''-— 2; R'-—, R''-— 3.
Schnürstelle 6.
Verband; Dedekindscher —, De-— 8; distributiver —, Dis-— 9; geschnürter —, ungeschnürter — 6.

Ein Verzeichnis weiterer Fachausdrücke enthält [Verb. 2].

Heikendorf (Kieler Förde), im Sommer 1935.

---

[24]) Es werde noch bemerkt, daß von den beiden in [A. V. II], S. 128 und 129 beschriebenen Verbänden der erste vom Typ der Fig. 4 und der zweite vom Typ der Fig. 5 ist.

(Eingegangen am 31. Dezember 1935.)

Nachtrag bei der Korrektur (5. 3. 1936). Nachstehend teilen wir zwei weitere Kriterien für De-Verbände mit.

Satz 21a. *Mit* VI *ist jedes der folgenden Axiome gleichwertig:*

VI_3'. Für drei beliebige Elemente a, b und c aus M gilt

$$a \cup [(a \cup b) \cap c] = a \cup [(a \cup c) \cap b]. \tag{13'}$$

VI_3''. Für drei beliebige Elemente a, b und c aus M gilt

$$a \cap [(a \cap b) \cup c] = a \cap [(a \cap c) \cup b]. \tag{13''}$$

Beweis. Wir beschränken uns auf den Beweis des ersten Teils der Behauptung.

Ist M ein De-Verband, so findet nach Satz 21

$$(a \cup b) \cap (a \cup c) = a \cup [(a \cup b) \cap c]$$

und

$$(a \cup c) \cap (a \cup b) = a \cup [(a \cup c) \cap b] \tag{14}$$

statt, woraus (13′) folgt.

Ist für M andererseits (13′) in Kraft, so ersetze man darin das Element c durch $a \cup c$, wodurch sich

$$a \cup [(a \cup b) \cap (a \cup c)] = a \cup [(a \cup c) \cap b]$$

ergibt. Diese Beziehung geht wegen

$$a \cup b > a, \quad a \cup c > a$$

in (14) über, so daß M nach Satz 21 ein $\mathfrak{D}$e-Verband ist.

Zusatz. Ist für einen Verband VI_3' in Kraft, dann auch VI_3'' und umgekehrt.

Eine Kennzeichnung der direkten Produkte von p-Gruppen.

Von

Helmut Wielandt in Berlin.

Unter einer p-Gruppe soll eine endliche Gruppe von Primzahlpotenzordnung verstanden werden.

Es ist eine bekannte Tatsache, daß die Kommutatorgruppe $\mathfrak{K}$ einer p-Gruppe $\mathfrak{H}$ zur Erzeugung von $\mathfrak{H}$ im folgenden Sinne entbehrlich ist: Erzeugen die Elemente $H_1, \ldots, H_m$ zusammen mit $\mathfrak{K}$ die ganze Gruppe $\mathfrak{H}$, so erzeugen schon $H_1, \ldots, H_m$ die Gruppe $\mathfrak{H}$[1]).

Ist $\mathfrak{H}$ direktes Produkt von p-Gruppen, so gilt, wie man leicht erkennt, das Gleiche. Es entsteht die Frage, ob die Entbehrlichkeit der Kommutatorgruppe für die direkten Produkte von p-Gruppen kennzeichnend ist[2]). Die Antwort gibt der Satz:

Ist $\mathfrak{H}$ eine endliche Gruppe, $\mathfrak{K}$ ihre Kommutatorgruppe, und erzeugt jeder Komplex von Elementen aus $\mathfrak{H}$ schon dann die ganze Gruppe $\mathfrak{H}$, wenn er mit $\mathfrak{K}$ zusammen $\mathfrak{H}$ erzeugt, so ist die Gruppe $\mathfrak{H}$ das direkte Produkt ihrer Sylowgruppen.

Zum Beweis genügt es, zu zeigen, daß jede Sylowgruppe von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{H}$ invariant ist. Denn dann sind je zwei Sylowgruppen, die zu verschiedenen Primzahlen gehören, Normalteiler mit dem Durchschnitt E und daher elementweise vertauschbar, und ferner gibt es zu jeder Primzahl nur eine Sylowgruppe; das Produkt aller Sylowgruppen von $\mathfrak{H}$ ist ein direktes Produkt und stimmt mit $\mathfrak{H}$ überein, da es die richtige Ordnung hat.

$\mathfrak{S}$ sei eine Sylowgruppe von $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{N}$ ihr Normalisator in $\mathfrak{H}$. Die Gruppe

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{K}\mathfrak{S} = \sum_{S<\mathfrak{S}} \mathfrak{K}S$$

ist als Obergruppe von $\mathfrak{K}$ invariant in $\mathfrak{H}$; sie enthält $\mathfrak{S}$ als Sylowgruppe.

---

[1]) Dies folgt aus dem Burnsideschen Basissatz für p-Gruppen (On some properties of groups whose orders are powers of primes. II. Proc. London Math. Soc. (2) **13** (1913), 6).

[2]) Herr A. Scholz hat mich auf diese Frage aufmerksam gemacht, die ihm bei seinen Untersuchungen über Klassenkörper begegnet ist.

In jeder Nebengruppe $\mathfrak{I}H$ liegt ein Element aus dem Normalisator $\mathfrak{N}$; denn

$$\mathfrak{S}' = H\mathfrak{S}H^{-1}$$

ist ebenso wie $\mathfrak{S}$ Sylowgruppe von $\mathfrak{I}$ und daher zu $\mathfrak{S}$ schon in $\mathfrak{I}$ konjugiert:

$$\mathfrak{S} = I\mathfrak{S}'I^{-1} \qquad (I < \mathfrak{I}).$$

Es wird dann

$$\mathfrak{S} = IH\mathfrak{S}(IH)^{-1},$$

also liegt IH in $\mathfrak{N}$.

Daß jede Nebengruppe $\mathfrak{I}H$ ein Element N aus $\mathfrak{N}$ enthält, also die Gestalt $\mathfrak{I}N$ hat, bedeutet:

$$\mathfrak{I}\mathfrak{N} = \mathfrak{H}.$$

Man hat also

$$\mathfrak{K}\mathfrak{S}\mathfrak{N} = \mathfrak{H}$$

und wegen $\mathfrak{S}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$

$$\mathfrak{K}\mathfrak{N} = \mathfrak{H}$$

und endlich wegen der Entbehrlichkeit von $\mathfrak{K}$

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{H}.$$

Man kann den Beweis auch so wenden, daß sich der Satz aus der folgenden Tatsache ergibt: Jede Obergruppe des Normalisators einer Sylowgruppe einer endlichen Gruppe ist ihr eigener Normalisator.

Die Voraussetzung, daß $\mathfrak{K}$ die Kommutatorgruppe ist, ist übrigens unnötig stark; Beweis und Satz behalten ihre Gültigkeit, wenn statt dessen etwa vorausgesetzt wird: $\mathfrak{K}$ Normalteiler von $\mathfrak{H}$, $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{K}}$ direktes Produkt von p-Gruppen.

[Eingegangen am 2. Januar 1936.]

Zerlegung einer Funktion in Gaußsche Fehlerkurven und zeitliche Zurückverfolgung eines Temperaturzustandes.

Von

Gustav Doetsch in Freiburg i. B.

Einleitung.

Eine kürzlich von F. Tricomi in dieser Zeitschrift veröffentlichte Arbeit[1]) veranlaßt mich, auf das Problem der Zerlegung einer Funktion in Gaußsche Fehlerkurven oder Normalkurven

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 (x-x_0)^2}$$

zurückzukommen, das ich schon früher zwecks Lösung einer Aufgabe aus der Spektroskopie[2]) behandelt habe. Im ersten Abschnitt wird der Fall betrachtet, daß die fragliche Funktion $F(x)$ aus unendlich vielen Fehlerkurven in Form eines gewöhnlichen Integrals aufgebaut ist:

$$F(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi)\, e^{-h^2 (x-\xi)^2}\, d\xi. \tag{1}$$

$F(x)$ besitzt hier hinsichtlich der Fehlerkurven ein *kontinuierliches „Spektrum"*, und die Aufgabe besteht in der Bestimmung der Spektralfunktion (Amplitude) $\Phi(\xi)$. — Der Übergang von Φ zu F kann auch als eine Funktional-Transformation gedeutet werden, für die Tricomi den Namen *Gauß-Transformation* vorgeschlagen hat. Von diesem Gesichtspunkt aus bedeutet die Gewinnung von Φ bei gegebenem F die *Umkehrung* dieser Transformation. — Setzt man $h^2 = \frac{1}{4t}$, so stellt

$$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi \quad (t > 0) \tag{2}$$

nach Poisson die *Temperaturverteilung* eines unendlich ausgedehnten linearen Wärmeleiters $(-\infty < x < +\infty)$ zur Zeit t dar, wenn er zur Zeit 0

[1]) F. Tricomi, Über Doetschs Umkehrformel der Gauß-Transformation und eine neue Umkehrung der Laplace-Transformation. Math. Zeitschr. 40 (1936), S. 720—726.

[2]) G. Doetsch, Die Elimination des Dopplereffekts bei spektroskopischen Feinstrukturen und exakte Bestimmung der Komponenten. Zeitschr. f. Phys. 49 (1928), S. 705—730.

die Anfangstemperatur $\Phi(x)$ hatte. Die Bestimmung von Φ läßt sich also physikalisch als *Rekonstruktion des früheren Zustandes aus einem späteren* deuten (zeitliche Zurückverfolgung). In dieser Gestalt wurde das Problem bereits von Appell[3]) behandelt, allerdings ohne wirklichen Erfolg. Gelöst wurde es zuerst für den Fall des Leiters von *endlicher Länge*[4]), woraus sich die Lösung für den unendlich ausgedehnten Leiter vermittels eines etwas kühnen Grenzübergangs und ohne Angabe von exakten Gültigkeitsgrenzen ergab[5]). Ich teile nun im folgenden eine neue, *unabhängige* Lösungsmethode mit, die den Geltungsbereich der früher gewonnenen Formel genau abzugrenzen gestattet und den weiteren Vorteil bietet, daß sie sich auf *alle* Transformationen der Gestalt

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} N(x-\xi)\,\Phi(\xi)\,d\xi \tag{3}$$

anwenden läßt. Diese stellen eine wichtige Klasse von Funktional-Transformationen, nämlich im wesentlichen die mit der Ableitung vertauschbaren, dar[6]). Die Methode besteht darin, daß wir die Gleichung (2) als eine *Integralgleichung* vom „Faltungstypus" ansehen und sie durch Anwendung der Laplace-Fourier-Transformation „algebraisieren"[7]).

---

[3]) P. Appell, Sur l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ et la théorie de la chaleur. Journ. de Math. (4) 8 (1892), S. 187—216.

[4]) G. Doetsch, Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung. Dritte Mitteilung: Der lineare Wärmeleiter mit beliebiger Anfangstemperatur. Die zeitliche Fortsetzung des Wärmezustandes. Math. Zeitschr. 25 (1926), S. 608—626 [§ 3]. — Vorher hatte M. Gevrey (Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique. Journ. de Math. (6) 9 (1913), S. 305—475 [S. 458]) unter Zuhilfenahme der Erweiterung der reellen x-Achse zu einer komplexen Ebene eine Bedingung für die Existenz von Φ, aber keine Methode zur Berechnung angegeben.

[5]) Siehe die unter [2]) zitierte Arbeit, § 3. — Einige Jahre später hat sich P. Lévy (Sur un problème de calcul des probabilités lié à celui du refroidissement d'une barre homogène. Annali della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa (2) 1 (1932), S. 283—296), anscheinend ohne Kenntnis der unter [4]) und [2]) zitierten Arbeiten mit diesem Problem hauptsächlich vom Standpunkt der Wahrscheinlichkeitstheorie beschäftigt, ohne definitive Resultate zu erhalten. Er untersucht hauptsächlich die Frage, wie weit in der Vergangenheit die Temperatur positiv bleibt. Vgl. hierzu den zweiten Abschnitt der vorliegenden Arbeit.

[6]) Vgl. F. Tricomi, Sulle trasformazioni funzionali lineari commutabili con la derivazione. Comm. Math. Helv. 8 (1935/36), S. 70—87.

[7]) Bei dieser Gelegenheit möchte ich darauf hinweisen, daß sich das Problem im Falle des Leiters von endlicher Länge, wo übrigens als Kern der Integralgleichung an Stelle der Exponentialfunktion eine Thetafunktion auftritt, auf ganz analoge Weise behandeln läßt, wenn man die in einer neueren Arbeit (G. Doetsch, Integration von Differentialgleichungen vermittels der endlichen Fourier-Transformation. Math. Ann. 112 (1935), S. 52—68) entwickelte Theorie heranzieht.

Im ersten Abschnitt wird dann noch eine Reihe weiterer Fragen erörtert, so die nach der *Stetigkeit* der Umkehrung der Gauß-Transformation im Funktionenraum der $F(x)$, was für die physikalischen Anwendungen wichtig ist; ferner das Problem der *Invarianten der Gauß-Transformation*, wodurch auf die Lösung der Umkehraufgabe neues Licht fällt. Schließlich werden für die *Umkehrung der Laplace-Transformation*, die Tricomi in der unter [1]) zitierten Arbeit aus der Umkehrung der Gauß-Transformation gewonnen hat, exakte Gültigkeitsgrenzen angegeben.

Im zweiten Abschnitt wird die Gauß-Transformation in Gestalt eines *Stieltjes-Integrals*

$$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\Psi(\xi) \tag{4}$$

mit *monotonem* Ψ angesetzt und die Umkehrung bewerkstelligt. Dadurch gelingt es, auch den Fall zu erfassen, daß $F(x)$ ganz oder teilweise aus isolierten Gaußschen Fehlerkurven (in endlicher oder unendlicher Anzahl) besteht, also außer einem eventuellen *Streckenspektrum* auch ein *Punktspektrum* besitzt. Ferner erledigt sich damit die Frage, wie lange ein positiver Temperaturzustand bei Zurückverfolgung *positiv bleibt*.

Der dritte Abschnitt behandelt gesondert den wichtigen Fall, daß $F(x)$ nur aus *endlich vielen* Fehlerkurven aufgebaut ist:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{h_i}{\sqrt{\pi}} e^{-h_i^2 (x-x_i)^2}. \tag{5}$$

Das Problem der Bestimmung der Komponenten, d. h. der a_i, h_i und x_i, kommt in den verschiedensten Zweigen der Statistik und ebenso in der Physik sehr häufig vor und ist außer in der unter [2]) zitierten Arbeit auch schon von führenden Statistikern wie Pearson und Charlier in Angriff genommen worden. Durch die Lösungen, die wir auf Grund der Entwicklungen des ersten und zweiten Abschnitts geben, dürfte es theoretisch abschließend und praktisch befriedigend erledigt sein.

Erster Abschnitt.

Kontinuierliches Spektrum.

Je nach dem Sachgebiet, in dem die Gauß-Transformation gerade auftritt, wird man an die Spektralfunktion $\Phi(\xi)$ verschiedene Anforderungen stellen: In der Theorie der Wärmeleitung pflegt man sie als stetig oder wenigstens von beschränkter Variation vorauszusetzen, um die Differenzierbarkeit und das Erfülltsein der Anfangsbedingung garantieren zu können; ist $F(x)$ eine statistische Häufigkeitsfunktion, so wird man

$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi)\, d\xi = 1$ annehmen. Solche Beschränkungen einzuführen, hätte für uns hier keinen Zweck. Da wir die *Fourier-Transformation* und ihre Umkehrung als Hilfsmittel benutzen werden und sich für diese nur dann hinreichend glatte Sätze ergeben, wenn man die beteiligten Funktionen als im Lebesgueschen Sinn *quadratisch integrabel* annimmt, so legen wir diesen Funktionsbereich zugrunde. In § 1 stellen wir, um später die Verweise möglichst kurz halten zu können, die benutzten Sätze aus der Plancherelschen Theorie der Fourier-Transformation zusammen[8]).

§ 1.

Hilfssätze.

Innerhalb des Bereiches der für alle reellen x definierten und in jedem endlichen Intervall im Lebesgueschen Sinn integrabeln Funktionen $F(x)$ bezeichnen wir die Klasse derjenigen, für die

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|\, dx \text{ existiert, mit } L^1,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|^2\, dx \text{ existiert, mit } L^2,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|\, dx \text{ und } \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|^2\, dx \text{ existiert, mit } L^{1\,2}.$$

Funktionen, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden, werden nicht als verschieden gerechnet.

Strebt eine Funktionenschar $F_\alpha(x)$ aus L^2 für $\alpha \to \infty$ im quadratischen Mittel gegen $F(x)$, d. h.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F_\alpha(x) - F(x)|^2\, dx \to 0 \quad \text{für } \alpha \to \infty,$$

so schreiben wir:

$$F(x) = \underset{\alpha \to \infty}{\text{l.i.m.}}\, F_\alpha(x).$$

Satz 1 (Plancherelscher Satz): *Ist $F(x)$ eine Funktion aus L^2, so gehört zu ihr in umkehrbar eindeutiger Weise eine Fourier-Transformierte*

$$f(y) = \underset{\alpha \to \infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-iyx} F(x)\, dx \equiv \mathfrak{F}\{F\},$$

---

[8]) Siehe z. B. die Darstellung dieser Theorie bei S. Bochner, Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig 1932, 8. Kap.

die selbst auch zu L^2 gehört. — Jede Funktion $f(y)$ aus L^2 ist die Fourier-Transformierte einer Funktion $F(x)$ aus L^2, die man durch die Umkehrformel

$$F(x) = \operatorname*{l.i.m.}_{a \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{+a} e^{ixy} f(y)\, dy \equiv \mathfrak{F}^{-1}\{f\}$$

erhält.

Satz 2 (Parsevalsche Gleichung): *In der Bezeichnungsweise von Satz 1 ist*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^2\, dy.$$

Satz 3 (Erweiterte Parsevalsche Gleichung oder reziproker Faltungssatz): *Wenn F_1 und F_2 zu L^2 gehören und*

$$\mathfrak{F}\{F_1\} = f_1, \qquad \mathfrak{F}\{F_2\} = f_2$$

ist, so gilt für die „Faltung"

$$F_1 * F_2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x-\xi) F_2(\xi)\, d\xi$$

die Beziehung:

$$F_1 * F_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} f_1(y) f_2(y)\, dy.$$

Bemerkung: Da f_1 und f_2 zu L^2, also $f_1 \cdot f_2$ zu L^1 gehört, existiert das Integral im gewöhnlichen Sinn und konvergiert absolut. Wenn ein derartiges Integral auftritt, so sprechen wir nicht von einer Fourier-Transformierten, da dieser Ausdruck für etwas anderes (ein mittelkonvergentes Integral) reserviert ist, sondern von einem „absolut konvergenten Fourier-*Integral*".

Satz 4 (Faltungssatz[9])): *Gehören F_1, F_2 und $f_1 \cdot f_2$ zu L^2, so gehört auch $F_1 * F_2$ zu L^2, und es ist:*

$$\mathfrak{F}\{F_1 * F_2\} = \mathfrak{F}\{F_1\} \cdot \mathfrak{F}\{F_2\}.$$

Beweis: Da $f_1 \cdot f_2$ zu L^2 gehört, so existiert

$$\operatorname*{l.i.m.}_{a \to \infty} \int_{-a}^{+a} e^{ixy} f_1(y) f_2(y)\, dy.$$

Andererseits existiert, da F_1 und F_2 zu L^2, also $f_1 f_2$ zu L^1 gehört:

$$\lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{+a} e^{ixy} f_1(y) f_2(y)\, dy.$$

---

[9]) Dieser Satz kommt l. c. [8]) nicht vor, scheint mir aber für die dort gemachte Anwendung S. 176 unerläßlich.

Wenn aber (fast überall)

$$\lim_{\alpha \to \infty} H_\alpha(x) = H(x) \text{ und } \underset{\alpha \to \infty}{\text{l.i.m.}}\, H_\alpha(x) = L(x)$$

existiert, so ist bekanntlich $H(x) = L(x)$ fast überall. Also ist

$$\underset{\alpha \to \infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{ixy} f_1(y) f_2(y)\, dy = \lim_{\alpha \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{ixy} f_1(y) f_2(y)\, dy.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite ist $\mathfrak{F}^{-1}\{f_1 \cdot f_2\}$, der auf der rechten nach Satz 3 gleich $F_1 * F_2$. Also ergibt sich:

$$F_1 * F_2 = \mathfrak{F}^{-1}\{f_1 \cdot f_2\}.$$

Hieraus folgt aber nach Satz 1, daß $F_1 * F_2$ zu L^2 gehört, und daß $\mathfrak{F}\{F_1 * F_2\} = f_1 \cdot f_2$ ist.

Bemerkung: Setzt man nur voraus, daß F_1 und F_2 zu L^2 gehören, so braucht der Faltungssatz nicht zuzutreffen, schon deshalb, weil $F_1 * F_2$ nicht zu L^2 (und auch nicht zu L^1) zu gehören braucht.

Beispiel:

$$F_1(x) \equiv F_2(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } x \leqq 1, \\ x^{-\frac{2}{3}} \text{ für } x > 1. \end{cases}$$

F_1 und F_2 gehören zu L^2, aber

$$F_1 * F_2 = \begin{cases} 0 \text{ für } x \leqq 2, \\ \int_1^{x-1} \xi^{-\frac{2}{3}} (x-\xi)^{-\frac{2}{3}}\, d\xi = x^{-\frac{1}{3}} \int_{1/x}^{1-1/x} u^{-\frac{2}{3}} (1-u)^{-\frac{2}{3}}\, du \text{ für } x > 2 \end{cases}$$

gehört weder zu L^1 noch zu L^2, da

$$F_1 * F_2 \sim \mathsf{B}\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right) x^{-\frac{1}{3}} \qquad \text{für } x \to \infty.$$

In diesem Beispiel gehört $f_1 \cdot f_2$ nicht zu L^2, da nach Satz 4 das sonst für $F_1 * F_2$ der Fall sein würde.

Satz 5. *Die Faltung zweier Funktionen aus L^2 ist beschränkt und stetig.*

§ 2.

Umkehrung der Gauß-Transformation.

Wir schreiben die Gauß-Transformation in der Gestalt, wie sie in der Theorie der Wärmeleitung auftritt:

$$(2) \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \Phi(\xi)\, d\xi \qquad (t > 0),$$

und bedienen uns bei der Deutung der Ergebnisse auch möglichst der Sprache dieser Theorie, weil sie am anschaulichsten ist. Ist $F(x)$, d. h.

die Temperatur zur Zeit $t > 0$ gegeben und $\Phi(x)$, d. h. die Anfangstemperatur zur Zeit 0 gesucht, so liegt eine Integralgleichung vor, die sich in der Faltungssymbolik so schreiben läßt:

$$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} * \Phi(x). \tag{6}$$

Wir setzen nun fest, daß wir *solche Lösungen* $\Phi(x)$ suchen, *die zu* L^2 *gehören*. Die Bedingungen, die $F(x)$ aufzuerlegen sind, werden sich hieraus von selbst ergeben. Was t angeht, so kann man sich entweder auf den Standpunkt stellen, daß es *fest* gegeben ist (dann hängt die Lösbarkeit der Integralgleichung nur von F ab) — oder aber, daß es noch passend *gewählt* werden darf: dann wird es im allgemeinen gewisse t geben, für die die Lösung möglich ist, und andere, für die das nicht der Fall ist, mit anderen Worten: der Temperaturzustand wird sich über gewisse Zeitstrecken zurückverfolgen lassen, aber diese Rekonstruierbarkeit wird irgendwo ihre Grenze finden. Diese letztere Auffassung ist die natürlichere.

1. Notwendige Bedingungen.

a) Wir geben zunächst einige Bedingungen an, die die Art der zulässigen $F(x)$ schon näher charakterisieren, aber für die Lösbarkeit der Integralgleichung noch nicht hinreichend sind. Da die Kernfunktion $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ für $t > 0$ zu L^2 gehört, so folgt zunächst aus Satz 5, daß, wenn es eine Lösung Φ aus L^2 geben soll, $F(x)$ beschränkt und stetig sein muß; ferner aus Satz 3, daß $F(x)$ sich durch ein absolut (und infolgedessen gleichmäßig) konvergentes Fourier-Integral muß darstellen lassen. Wegen[10])

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right\} = e^{-ty^2} \tag{7}$$

ist, wenn wir $\mathfrak{F}\{\Phi\} = \varphi$ setzen:

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\, e^{-ty^2}\, \varphi(y)\, dy. \tag{8}$$

Der Temperaturzustand zur Zeit $t = 0$ läßt sich demnach als Superposition von reinen Schwingungen e^{iyx} darstellen. Stellt man daneben die Formel

$$\Phi(x) = \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{ixy}\, \varphi(y)\, dy,$$

[10]) Diese Formel kommt schon bei Laplace vor. Für einen einfachen Beweis vgl. G. Doetsch, Ein allgemeines Prinzip der asymptotischen Entwicklung. Journ. f. d. r. u. ang. Math. 167 (1932), S. 274–293 [S. 279].

so kann man sagen, daß sich die Amplitude der Schwingung von der Frequenz y in $F(x)$ aus der Amplitude $\varphi(y)$ derselben Schwingung in $\Phi(x)$ durch Multiplikation mit dem „Abklingungsfaktor" $e^{-y^2 t}$ ergibt. Dies steht in genauer Analogie zu dem Ergebnis bei dem Leiter von endlicher Länge[11]). Dort ist der Temperaturzustand zur Zeit t als eine absolut und gleichmäßig konvergente Fourierreihe, also als Summe von harmonischen Schwingungen darstellbar, zu der Partialschwingung des Anfangszustandes mit der Frequenz n tritt der Abklingungsfaktor $e^{-n^2 t}$ hinzu[12]).

b) Wir leiten jetzt notwendige Bedingungen ab, die sich nachher auch als hinreichend erweisen werden. Gibt es eine Lösung Φ und gehört sie zu L^2, so nach Satz 1 auch $\mathfrak{F}\{\Phi\} = \varphi$ und damit auch

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right\} \cdot \mathfrak{F}\{\Phi\} = e^{-ty^2} \varphi(y),$$

da $0 < e^{-ty^2} \leqq 1$ ist. Nach Satz 4 muß also auch $F(x)$ zu L^2 gehören, und es muß, wenn man $\mathfrak{F}\{F\} = f$ setzt, gelten:

$$f(y) = e^{-ty^2} \varphi(y)$$

oder

$$\varphi(y) = e^{ty^2} f(y). \tag{9}$$

Da aber $\varphi(y)$ aus L^2 ist, so muß auch $e^{ty^2} f(y)$ zu L^2 gehören.

Damit haben wir als notwendige Bedingungen für die Lösbarkeit der Integralgleichung erkannt:

A. Die gegebene Funktion $F(x)$ gehört zu L^2.

B. Die hiernach existierende Funktion $f(y) = \mathfrak{F}\{F\}$ und der Parameter $t > 0$ sind so beschaffen, daß $e^{ty^2} f(y)$ zu L^2 gehört, d. h. daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2ty^2} |f(y)|^2 \, dx = Q$$

einen endlichen Wert besitzt.

2. Hinreichende Bedingungen.

Die Bedingungen A und B sind für die Existenz einer Lösung auch hinreichend. Wegen B existiert, $\varphi(y) = e^{ty^2} f(y)$ gesetzt, die Funktion

---

[11]) Siehe l. c.[4]), S. 622.

[12]) Dies ergab sich dort aus dem Hilbert-Schmidtschen Entwicklungssatz, daß jede quellenmäßig dargestellte Funktion sich in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe nach den Eigenfunktionen des Kernes darstellen läßt. Den Satz 3, aus dem wir oben das Ergebnis für den unendlich langen Leiter erhalten haben, kann man als ein Analogon zum Hilbert-Schmidtschen Entwicklungssatz in einem unendlichen Intervall ansehen, worauf wir in § 4 noch zurückkommen werden.

$\Phi(x) = \mathfrak{F}^{-1}\{\varphi\}$; sie gehört zu L^2, und es ist $\mathfrak{F}\{\Phi\} = \varphi(y)$. Diese Funktion erfüllt die Integralgleichung, denn nach Satz 3 ist

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} * \Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} e^{-ty^2} (e^{ty^2} f(y))\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} f(y)\, dy.$$

Da aber wegen A

$$\operatorname*{l.i.m.}_{\alpha \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{ixy} f(y)\, dy$$

existiert (und gleich $F(x)$ ist), so stimmt (nach dem auch beim Beweis von Satz 4 benutzten Satz) dieser Mittellimes mit dem vorstehenden Integral überein. Es ergibt sich also:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} * \Phi(x) = \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{ixy} f(y)\, dy = F(x).$$

Wenn wir lediglich A und B voraussetzen, so ist diese Gleichung natürlich nur fast überall erfüllt. Setzen wir $F(x)$ noch als stetig voraus (vgl. oben die unter a) genannten notwendigen Bedingungen), so gilt die Gleichung durchweg.

Der explizite Ausdruck für $\Phi(x)$ lautet:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \operatorname*{l.i.m.}_{\beta \to \infty} \int_{-\beta}^{+\beta} e^{ixy} e^{iy^2}\, dy \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha \to \infty} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-iy\xi} F(\xi)\, d\xi. \tag{10}$$

Wie man sieht, ist hier gegenüber der Darstellung von $F(x)$:

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \operatorname*{l.i.m.}_{\beta \to \infty} \int_{-\beta}^{+\beta} e^{ixy}\, dy \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha \to \infty} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-iy\xi} F(\xi)\, d\xi$$

jeder Schwingung e^{iyx} der „Verstärkungsfaktor" $e^{y^2 t}$ hinzugefügt[13]).

Wir bemerken noch, daß nach Satz 2

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi} Q \tag{11}$$

ist.

Ehe wir unser Resultat zusammenfassen, schalten wir einige *Zwischenbetrachtungen* ein.

1. Hat man die Zeit t von vornherein als *fest* angenommen, so ist das Erfülltsein oder das Versagen der Bedingung B mit diesem t fest-

[13]) Wegen des Verstärkungs- bzw. Abklingungsfaktors vgl. die entsprechende Bemerkung bei Tricomi, l. c.[1]), S. 726.

zustellen. Je nachdem läßt sich der Temperaturzustand um die Zeit t zurückverfolgen oder nicht. — Wird t aber als ein *variabler* Parameter angesehen, so kann es sein, daß sich B mit keinem $t > 0$ erfüllen läßt: dann ist $F(x)$ nicht als aus einem früheren Zustand durch Wärmeausgleich entstanden denkbar — oder aber es gibt ein $t > 0$, mit dem Q konvergiert: dann tut es dies mit jedem kleineren t erst recht. Man kann daher in diesem Fall durch einen Dedekindschen Schnitt eine Zahl $T > 0$ konstruieren, so daß Q für $0 \leqq t < T$ konvergiert, für $t > T$ divergiert; T selbst kann entweder zur einen oder zur anderen Klasse gehören. Mit anderen Worten: Der Zustand läßt sich genau um die Zeitspanne T (eventuell ausschließlich Endpunkt) zurückverfolgen.

2. Ist $0 < t_1 < t_2 < T$ und sind Φ_1, Φ_2 die den Zeitwerten t_1, t_2 entsprechenden Lösungen:

$$(12)\qquad \begin{cases} F(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t_1}} e^{-\frac{x^2}{4t_1}} * \Phi_1 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\, e^{-t_1 y^2}\, \varphi_1(y)\, dy, \\ \Phi_1(x) = \dfrac{1}{2\pi} \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha \to \infty} \displaystyle\int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{ixy}\, e^{t_1 y^2}\, f(y)\, dy; \end{cases}$$

$$(13)\qquad \begin{cases} F(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t_2}} e^{-\frac{x^2}{4t_2}} * \Phi_2 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\, e^{-t_2 y^2}\, \varphi_2(y)\, dy, \\ \Phi_2(x) = \dfrac{1}{2\pi} \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha \to \infty} \displaystyle\int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{ixy}\, e^{t_2 y^2}\, f(y)\, dy, \end{cases}$$

so wird man aus der wärmetheoretischen Bedeutung der Integralgleichung schließen, daß Φ_1 auch als Temperaturzustand, hervorgegangen aus dem Anfangszustand Φ_2 nach der Zeit $t_2 - t_1$, angesehen werden kann, d. h. daß der Zusammenhang besteht:

$$(14)\qquad \begin{cases} \Phi_1(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi (t_2 - t_1)}} e^{-\frac{x^2}{4(t_2 - t_1)}} * \Phi_2 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\, e^{-(t_2 - t_1) y^2}\, \varphi_2(y)\, dy, \\ \Phi_2(x) = \dfrac{1}{2\pi} \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha \to \infty} \displaystyle\int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{ixy}\, e^{(t_2 - t_1) y^2}\, \varphi_1(y)\, dy. \end{cases}$$

Bei diesem Schluß wird offenbar die Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems der Wärmeleitung benutzt, die nur unter sehr einschneidenden Bedingungen, die hier nicht zuzutreffen brauchen, garantiert werden kann. Man könnte statt dessen die Koexistenz von (12), (13) und (14), die eine

gewisse Gruppeneigenschaft darstellt, mit dem Huygensschen Prinzip in Verbindung bringen und den Beweis von (14) auf die bekannte Relation

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t_1}} e^{-\frac{x^2}{4t_1}} * \frac{1}{2\sqrt{\pi (t_2 - t_1)}} e^{-\frac{x^2}{4(t_2 - t_1)}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t_2}} e^{-\frac{x^2}{4t_2}}$$

stützen, die ja selber auch ein Ausdruck für das Huygenssche Prinzip ist[14]). Im Rahmen unserer jetzigen Betrachtungen läßt sich jedoch (14) am einfachsten so beweisen: Aus (13) folgt:

$$f(y) = e^{-t_2 y^2} \varphi_2(y);$$

also ist, wenn wir dies in (12) verwenden:

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{2\pi} \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha \to \infty} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{ixy} e^{-(t_2 - t_1) y^2} \varphi_2(y)\, dy.$$

Betrachten wir daneben das Integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} e^{-(t_2 - t_1) y^2} \varphi_2(y)\, dy,$$

so konvergiert dieses im gewöhnlichen Sinn absolut, da $e^{-(t_2 - t_1) y^2}$ und $\varphi_2(y)$ beide zu L^2, ihr Produkt also zu L^1 gehört. Nach dem schon mehrfach benutzten Satz ist es gleich dem mittelkonvergenten Integral, womit sich die erste Hälfte von (14) ergibt, die sofort die zweite nach sich zieht.

3. Man kann also, wenn $0 < t_1 < t_2 < T$ ist, Φ_1 sowohl „rückwärts" aus F durch das im Mittel konvergierende Integral (12) als auch „vorwärts" aus Φ_2 durch das im gewöhnlichen Sinn konvergierende Integral (14) berechnen. Man kann aber auch das erstere Integral durch ein im gewöhnlichen Sinn konvergierendes ersetzen; denn es ist

$$e^{t_1 y^2} f(y) = e^{-(t_2 - t_1) y^2} \cdot e^{t_2 y^2} f(y),$$

und beide Faktoren gehören zu L^2, ihr Produkt also zu L^1, so daß das Integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} e^{t_1 y^2} f(y)\, dy$$

absolut konvergiert und mit dem entsprechenden mittelkonvergenten übereinstimmt.

---

[14]) Siehe G. Doetsch, Thetarelationen als Konsequenzen des Huygensschen und Eulerschen Prinzips in der Theorie der Wärmeleitung. Math. Zeitschr. **40** (1935), S. 613—628 [S. 618, 627].

Resultat.

Damit die Integralgleichung (2) *für ein festes* $t > 0$ *eine zu* L^2 *gehörige Lösung besitzt, d. h. damit eine Funktion* $F(x)$ *sich als Temperaturzustand, entstanden aus einem Anfangszustand der Klasse* L^2 *nach Ablauf der Zeit* t, *auffassen läßt, sind folgende Bedingungen notwendig und hinreichend:*

$F(x)$ *gehört zu* L^2, *das Integral*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2ty^2} |f(y)|^2 \, dy = Q,$$

wo $f(y) = \mathfrak{F}\{F\}$ *ist, konvergiert, und* $F(x)$ *ist stetig. (Falls man das Erfülltsein der Integralgleichung nur fast überall verlangt, fällt die letzte Bedingung weg.) — Betrachtet man* t *als variabel, so sei* T *die Schnittzahl zwischen den* $t \geqq 0$, *die* Q *zum Konvergieren bzw. Divergieren bringen. Ist* $T = 0$, *so ist* $F(x)$ *aus keinem früheren Zustand der Klasse* L^2 *entstanden; ist* $T > 0$, *so läßt sich* $F(x)$ *für alle* $0 < t < T$ *(ist* T *noch Konvergenzzahl, auch für* $t = T$*) zurückverfolgen, für* $t > T$ *dagegen nicht.*

Während man aus einem früheren Zustand $\Phi(x)$ *der Klasse* L^2 *den um* t *(beliebig* > 0*) späteren dadurch gewinnt, daß man in der Fourierdarstellung*

$$\Phi(x) = \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{ixy} \varphi(y) \, dy$$

jeder Schwingung e^{ixy} *den Abklingungsfaktor* e^{-ty^2} *hinzufügt, wodurch man ein absolut konvergentes Fourier-Integral erhält:*

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} e^{-ty^2} \varphi(y) \, dy,$$

bekommt man aus einem späteren Zustand $F(x)$ *den um* t $(0 < t < T)$ *früheren, indem man in der Fourierdarstellung*[15])

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} f(y) \, dy$$

---

[15]) Zunächst ist eigentlich

$$F(x) = \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{ixy} f(y) \, dy.$$

Aber $f(y)$ gehört zur Klasse L^1, denn nach Schwarz ist

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f| \, dy \right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f| \, e^{ty^2} \cdot e^{-ty^2} \, dy \right)^2 \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2ty^2} |f|^2 \, dy \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2ty^2} \, dy.$$

Also existiert $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} f(y) \, dy$ und ist gleich dem obigen mittelkonvergenten Integral.

jeder Schwingung e^{ixy} den Verstärkungsfaktor e^{ty^2} hinzufügt, wodurch man ein absolut konvergentes Fourier-Integral:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} e^{ty^2} f(y)\, dy \tag{15}$$

erhält. War T noch Konvergenzpunkt, so erhält man für diesen Wert:

$$\Phi(x) = \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{ixy} e^{Ty^2} f(y)\, dy. \tag{16}$$

Es besteht die Relation[16])

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x)|^2 = \frac{1}{2\pi} Q.$$

Zusätze: 1. Die in der Lösungsformel (15) bzw. (16) vorkommende Funktion $f(y)$ ist im allgemeinen so definiert:

$$f(y) = \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha \to \infty} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-iyx} F(x)\, dx.$$

Existiert aber

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx} F(x)\, dx,$$

also z. B. wenn $F(x)$ nicht bloß zu L^2, sondern auch zu L^1, also zu $L^{1\,2}$ gehört, so stimmt es mit dem mittelkonvergenten Integral überein, und man kann Φ durch *gewöhnliche Integrale* ausdrücken:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} e^{ty^2}\, dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy\xi} F(\xi)\, d\xi. \tag{17}$$

2. Dieser Formel (und analog den Formeln (15) und (16)) kann man noch eine *rein reelle Gestalt* geben: Es ist

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} e^{ty^2}\, dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(x-\xi)} F(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} \cdots.$$

Ersetzt man im zweiten Summanden y durch $-y$ und vereinigt die beiden Summanden wieder, so ergibt sich:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} e^{ty^2}\, dy \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iy(x-\xi)} + e^{-iy(x-\xi)}) F(\xi)\, d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} e^{ty^2}\, dy \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) \cos y(x-\xi)\, d\xi. \tag{18}$$

---

[16]) Sie macht es nochmals deutlich, daß gerade Q für die Existenz eines Φ aus L^2 verantwortlich ist.

Das ist die Formel, die ich in der unter [2]) zitierten Arbeit angegeben habe und die Tricomi[1]) verwendet hat. Wir verfügen nunmehr über exakte Gültigkeitsbedingungen[17]) für sie.

Die auseinandergesetzte Methode zur Rückwärtsverfolgung des Temperaturzustandes läßt sich unter geeigneten Voraussetzungen auch in *mehr als einer Dimension* anwenden. Im Raum z. B. lautet der Poissonsche Ausdruck:

$$F(x,y,z) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^3} \int_{-\infty}^{+\infty}\int\int e^{\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4t}} \Phi(\xi,\eta,\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Um Φ zu erhalten, hat man hier die Fourier-Transformation dreimal: nach x, y und z anzuwenden.

Wie bereits in der Einleitung bemerkt, kann man mit derselben Methode *alle Transformationen der Gestalt* (3) umkehren, wenn folgende Voraussetzungen zutreffen: N und Φ gehören zu L^2, ebenso $n\cdot\varphi$, wo

$$n = \mathfrak{F}\{N\}, \qquad \varphi = \mathfrak{F}\{\Phi\}, \qquad f = \mathfrak{F}\{F\}$$

gesetzt ist. (F gehört dann notwendig auch zu L^2.) Notwendig und hinreichend für die Umkehrbarkeit ist, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n^{-2} f^2\, dy$$

konvergiert. Die Umkehrformel lautet:

$$\Phi(x) = \underset{\alpha\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{ixy}\, n(y)^{-1} f(y)\, dy. \tag{19}$$

Bemerkung: Man kann die Lösung der Integralgleichung (2) auch innerhalb der Klasse L^1 durchzuführen versuchen. Man würde hier die Transformation

$$f^*(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx} F(x)\, dx \equiv \mathfrak{F}^*\{F\}$$

---

[17]) Man vergleiche damit die von Tricomi l. c. [1]), S. 724 angegebenen nur hinreichenden, nicht notwendigen Bedingungen, die in unserer Terminologie so lauten: $F(x)$ ist durch ein im gewöhnlichen Sinn konvergentes Fourierintegral darstellbar:

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} f(y)\, dy \quad \text{mit} \quad f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx} F(x)\, dx,$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\, e^{ty^2} f(y)\, dy$$

konvergiert gleichmäßig in x.

anwenden. Gibt es eine Lösung $\Phi(x)$ von (2) aus der Klasse L^1, so ist, da die Kernfunktion $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ zu L^1 gehört, bekanntlich auch $F(x)$ als Faltung zweier Funktionen aus L^1 selbst aus L^1, und es gilt, wenn $\mathfrak{F}^*\{F\} = f^*$, $\mathfrak{F}^*\{\Phi\} = \varphi^*$ gesetzt wird:

$$f^* = e^{-ty^2}\varphi^*,$$

da der Faltungssatz in L^1 unbeschränkt richtig ist. Damit eine Lösung Φ aus L^1 existiert, ist notwendig und hinreichend, daß $e^{ty^2} f^*$ die Transformierte einer Funktion aus L^1 ist. Eine Bedingung hierfür ist vor einiger Zeit von Berry [18]) angegeben worden, sie ist aber so unhandlich, daß sie praktisch für unsere Zwecke kaum in Frage kommt. Außerdem fehlt eine allgemein gültige Formel, die aus φ^* das Φ zu berechnen gestattet. Dagegen kann man so sagen: *Wenn* man auf irgend einem Wege eine Funktion Φ *angeben* kann, deren $\mathfrak{F}^*$-Transformierte gleich $e^{ty^2} f^*$ ist (z. B. durch Aufsuchen in einem „Lexikon" zusammengehöriger Transformierter), so ist die Lösung gefunden. Diese Art ist zwar theoretisch nicht so befriedigend wie das Operieren in L^2, dafür aber in der Praxis meist viel leichter zu handhaben [19]).

§ 3.

Über die Stetigkeit der Umkehrung der Gauß-Transformation.

Der Raum der Funktionen der Klasse L^2 läßt sich bekanntlich dadurch *metrisieren*, daß man die Distanz zweier Funktionen $F(x)$ und $G(x)$ durch

$$(F,G) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |F-G|^2\, dx\right)^{1/2}$$

erklärt. Es gilt dann insbesondere die *Dreiecksrelation*

$$(F,G) + (G,H) \geqq (F,H).$$

Eine Folge oder einparametrige Schar von Funktionen $F_\alpha(x)$ aus L^2 *konvergiert* für $\alpha \to \infty$ gegen eine Funktion $F(x)$, die eo ipso zu L^2 gehört, in Zeichen $F_\alpha(x) \underset{\text{i. m.}}{\to} F(x)$, wenn

$$(F_\alpha, F) \to 0 \qquad \text{für } \alpha \to \infty,$$

---

[18]) A. C. Berry, Necessary and sufficient conditions in the theory of Fourier transforms. Ann. of Math. (2) 32 (1931), S. 830–838.

[19]) Vgl. die ganz analoge Methode, Integralgleichungen von einem etwas anderen Faltungstypus mit der Laplace-Transformation zu behandeln, in G. Doetsch, Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus. Math. Ann. 89 (1923), S. 192—207.

d. h. wenn die F_α gegen F mittelkonvergent sind. Eine in L^2 definierte Funktional-Transformation $\mathfrak{T}$, deren Werte wieder zu L^2 gehören, heißt für $F(x)$ *stetig*, wenn für jede gegen F konvergierende Schar $F_\alpha(x)$:

$$F_\alpha(x) \underset{\text{i. m.}}{\to} F(x),$$

gilt:

$$\mathfrak{T}\{F_\alpha(x)\} \underset{\text{i. m.}}{\to} \mathfrak{T}\{F(x)\}.$$

Man sieht sofort, daß die *Gauß-Transformation*

$$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \Phi(\xi)\, d\xi \equiv \mathfrak{G}_{(t)}\{\Phi\} \quad (t > 0)$$

eine in L^2 *stetige* Transformation ist. Denn aus $\Phi_\alpha(x) \underset{\text{i. m.}}{\to} \Phi(x)$, d. h.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_\alpha - \Phi|^2\, dx \to 0$$

folgt wegen der Parsevalschen Gleichung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_\alpha - \varphi|^2\, dy \to 0,$$

also nach (9):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2ty^2} |f_\alpha - f|^2\, dy \to 0.$$

mithin wegen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_\alpha - f|^2\, dy \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2ty^2} |f_\alpha - f|^2\, dy$$

auch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_\alpha - f|^2\, dy \to 0.$$

Das ist aber nach Parseval gleichbedeutend mit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F_\alpha - F|^2\, dx \to 0, \quad \text{d. h.} \quad F_\alpha(x) \underset{\text{i. m.}}{\to} F(x).$$

Da die Wärmeleitung ein Ausgleichsvorgang ist, so ist diese Eigenschaft der Gauß-Transformation sehr einleuchtend. Die Transformation wirkt konvergenzverstärkend, denn offenbar ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F_\alpha - F|^2\, dx \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_\alpha - \Phi|^2\, dx.$$

Dagegen ist die durch die Formel (15), bzw. (16) ausgedrückte *Umkehrung der Gauß-Transformation* $\Phi(x) = \mathfrak{G}_{(t)}^{-1}\{F(x)\}$ *nicht stetig*, wie man an folgendem Beispiel sieht:

Wir betrachten die Schar von Fourier-Transformierten:

$$f_\alpha(y) = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha \leqq y \leqq \alpha + \frac{1}{\alpha} \quad (\alpha > 0), \\ 0 & \text{an allen anderen Stellen.} \end{cases}$$

Da $f_\alpha(y)$ zu L^2 gehört, so gibt es dazu ein $F_\alpha(x)$ aus L^2, das, da das Fourier-Integral existiert, folgendermaßen gewonnen werden kann:

$$F_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} f_\alpha(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\frac{1}{\alpha}} e^{ixy}\, dy = \frac{e^{i\alpha x}}{2\pi i x}\left(e^{\frac{i}{\alpha}x} - 1\right).$$

Die $F_\alpha(x)$ gehören offensichtlich zu L^2 und sind überdies stetig und beschränkt. Da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_\alpha(y)|^2\, dy = \frac{1}{\alpha},$$

also nach Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F_\alpha(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi\alpha}$$

ist, strebt die Schar $F_\alpha(x)$ für $\alpha \to \infty$ im Sinne der Mittelkonvergenz gegen $F(x) \equiv 0$. Überdies strebt $F_\alpha(x)$ auch im üblichen Sinn an jeder Stelle gegen 0, in jedem endlichen Intervall gleichmäßig. Da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2ty^2} |f_\alpha(y)|^2\, dy = \int_{\alpha}^{\alpha+\frac{1}{\alpha}} e^{2ty^2}\, dy$$

für jedes t konvergiert, so sind alle $F_\alpha(x)$ ebenso wie $F(x)$ beliebig weit zurückverfolgbar. Die Anfangszustände sind

$$\Phi(x) \equiv 0, \qquad \Phi_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\frac{1}{\alpha}} e^{ixy} e^{ty^2}\, dy.$$

Aber die $\Phi_\alpha(x)$ streben für $\alpha \to \infty$ nicht gegen $\Phi(x)$, denn

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_\alpha(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2ty^2} |f_\alpha(y)|^2\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\frac{1}{\alpha}} e^{2ty^2}\, dy > \frac{1}{2\pi\alpha} e^{2t\alpha^2} \to \infty.$$

Die Unstetigkeit von $\mathfrak{G}^{-1}$ ist wieder leicht aus der physikalischen Deutung von $\mathfrak{G}$ als Ausgleichsvorgang verständlich: Zwei stark verschiedene Anfangszustände können durch Temperaturausgleich nach einer gewissen Zeit sehr ähnlich geworden sein. Das wirkt sich bei physikalischen Anwendungen von $\mathfrak{G}^{-1}$ insofern verhängnisvoll aus, als eine kleine Un-

genauigkeit in der „beobachteten" Temperaturverteilung $F(x)$ eine grobe Ungenauigkeit der „erschlossenen" Anfangstemperatur $\Phi(x)$ hervorrufen kann. Es läßt sich nun aber zeigen, daß $\mathfrak{G}^{-1}$ in einem gewissen eingeschränkten Sinn stetig ist, nämlich wenn man aus der „Umgebung" von $F(x)$ diejenigen Funktionsfolgen ausschließt, bei denen die Distanz (Φ_α, Φ) über alle Grenzen wächst.

Stetigkeitssatz: *Die Schar $F_\alpha(x)$ gehöre zu L^2, und es sei $F_\alpha(x) \underset{\text{i. m.}}{\to} F(x)$ (dann gehört $F(x)$ eo ipso zu L^2). $F(x)$ und alle $F_\alpha(x)$ mögen sich um $t_0 > 0$ zurückverfolgen lassen, d. h.*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t_0y^2} |f|^2 dy \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t_0y^2} |f_\alpha|^2 dy$$

konvergieren. Die Distanzen der um t_0 zurückliegenden Anfangszustände[20] *$\Phi_\alpha(x, t_0)$ der $F_\alpha(x)$ von dem Anfangszustand $\Phi(x, t_0)$ des $F(x)$ seien beschränkt:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_\alpha(x, t_0) - \Phi(x, t_0)|^2 dx < M.$$

(Nach der Dreiecksrelation ist das damit gleichbedeutend, daß die Distanzen vom Nullpunkt beschränkt sind.) Dann gilt für jeden Zeitpunkt $t < t_0$:

$$\Phi_\alpha(x, t) \underset{\text{i. m.}}{\to} \Phi(x, t).$$

Dieser Satz besagt: Die den Zustand $F(x)$ annähernden Scharen zerfallen in zwei Klassen. Die einen entfernen sich bei Zurückverfolgung sofort beliebig weit von den zu $F(x)$ gehörigen Anfangszuständen; die anderen, die das nicht tun, bleiben sicher eine gewisse Zeitlang konvergent.

Zum Beweis des Satzes wenden wir den Parsevalschen Satz und die Schwarzsche Ungleichung an:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\Phi_\alpha\left(x, \tfrac{t_0}{2}\right) - \Phi\left(x, \tfrac{t_0}{2}\right)\right|^2 dx\right)^2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_0y^2} |f_\alpha(y) - f(y)|^2 dy\right)^2$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t_0y^2} |f_\alpha(y) - f(y)|^2 dy \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_\alpha(y) - f(y)|^2 dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_\alpha(x, t_0) - \Phi(x, t_0)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |F_\alpha(x) - F(x)|^2 dx$$

$$\leqq M \int_{-\infty}^{+\infty} |F_\alpha(x) - F(x)|^2 dx \to 0,$$

---

[20]) Wir bringen jetzt der Deutlichkeit halber in der Bezeichnung der Anfangszustände den Zeitabschnitt, dem sie entsprechen, zum Ausdruck.

d. h.

$$\Phi_\alpha\left(x, \tfrac{t_0}{2}\right) \underset{\text{i. m.}}{\to} \Phi\left(x, \tfrac{t_0}{2}\right).$$

Damit ist zunächst für den einen Zeitpunkt $\frac{t_0}{2}$ die Konvergenz erwiesen. Da jedoch die der Zeitspanne $0 < t < \frac{t_0}{2}$ entsprechenden $\Phi_\alpha(x,t)$, $\Phi(x,t)$ aus $\Phi_\alpha\left(x, \frac{t_0}{2}\right)$, $\Phi\left(x, \frac{t_0}{2}\right)$ durch die stetige Transformation $\mathfrak{G}$ erhalten werden können, so gilt für alle $0 < t \leqq \frac{t_0}{2}$:

$$\Phi_\alpha(x,t) \underset{\text{i. m.}}{\to} \Phi(x,t).$$

Nun können wir aber auf die Zeitspanne $\frac{t_0}{2} \leqq t \leqq t_0$ denselben Schluß anwenden: Am Anfang $t = \frac{t_0}{2}$ haben wir Konvergenz, am Ende $t = t_0$ Beschränktheit, also bis zur Mitte $t = \frac{t_0}{2} + \frac{t_0}{4}$ Konvergenz:

$$\Phi_\alpha(x,t) \underset{\text{i. m.}}{\to} \Phi(x,t) \quad \text{für} \quad \tfrac{t_0}{2} \leqq t \leqq \tfrac{3}{4} t_0.$$

Auf diese Weise fortfahrend kann man jeden Zeitpunkt $t < t_0$ erreichen.

§ 4.

Die Invarianten (Eigenfunktionen) der Gauß-Transformation.

Wir kommen noch einmal auf die durch Gleichung (8) dargestellte Entwicklung von $F(x)$ und auf das Analogon beim Leiter von endlicher Länge $0 \leqq x \leqq l$ zurück. Bei diesem lautet der der Formel (2) entsprechende Ausdruck für die Temperatur zur Zeit t, wenn die Randtemperaturen (bei $x = 0$ und $x = l$) verschwinden und die Anfangstemperatur gleich $\Phi(x)$ ist:

$$F(x) = \int_0^l \Gamma(x, \xi; t)\, \Phi(\xi)\, d\xi \tag{20}$$

mit

$$\Gamma(x, \xi; t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \frac{t}{l^2}} \sin n\pi \frac{x}{l} \sin n\pi \frac{\xi}{l}. \tag{21}$$

Der symmetrische Kern $\Gamma(x, \xi; t)$ hat die (einzigen) normierten Eigenfunktionen

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin n\pi \frac{x}{l} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

zu den Eigenwerten

$$\lambda_n = e^{n^2 \pi^2 \frac{t}{l^2}},$$

d. h.

$$e^{-n^2\pi^2\frac{t}{l^2}}\sin n\pi\frac{x}{l}=\int_0^l \Gamma(x,\xi;t)\sin n\pi\frac{\xi}{l}\,d\xi, \tag{22}$$

was man auch so ausdrücken kann: Die durch (20) dargestellte Funktional-Transformation $F=\mathfrak{W}\{\Phi\}$ hat die Funktionen $\sin n\pi\frac{x}{l}$ zu einzigen „*Invarianten*", d. h. diese und nur diese Funktionen reproduzieren sich bei Anwendung der Transformation bis auf einen konstanten „Abklingungsfaktor" (sie erleiden nur eine Kompression in der Ordinatenrichtung).

Der Hilbert-Schmidtsche Entwicklungssatz liefert das Resultat, daß die $\mathfrak{W}$-Transformierte $F(x)$ in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe nach den Invarianten $\sin n\pi\frac{x}{l}$, also in eine Fourier-Reihe entwickelbar ist:

$$\int_0^l \Gamma(x,\xi;t)\,\Phi(\xi)\,d\xi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(x)}{\lambda_n}\int_0^l \Phi(\xi)\,\psi_n(\xi)\,d\xi. \tag{23}$$

Wir wollen nun die entsprechenden Begriffe bei der $\mathfrak{G}$-Transformation aufsuchen. Die Analogie tritt noch schärfer hervor, wenn man das Intervall $0\leqq x\leqq l$ durch das dem beiderseits unendlichen Leiter besser entsprechende Intervall $-l\leqq x\leqq +l$ und (20) durch den Ausdruck[21])

$$F(x)=\int_{-l}^{+l} K(x-\xi,t)\,\Phi(\xi)\,d\xi \tag{24}$$

mit

$$K(x,t)=\frac{1}{2l}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2\frac{\pi^2}{l^2}t+in\frac{\pi}{l}x} \tag{25}$$

ersetzt. Die Invarianten sind hier die Funktionen $e^{in\frac{\pi}{l}x}$ $(n=0,\pm 1,\ldots)$.

Da wir bei der $\mathfrak{G}$-Transformation die Entwickelbarkeit der $\mathfrak{G}$-Transformierten F in ein absolut und gleichmäßig konvergentes Fourier-Integral der Gestalt (8) aus dem Satz 3 von § 1 erschlossen, so wird man in diesem ein Analogon für das unendliche Intervall zum Hilbert-Schmidtschen Entwicklungssatz vermuten. In der Tat zeigt zunächst die aus $f_1(y)=\mathfrak{F}\{F_1\}$, d. h.

$$f_1(y)=\operatorname*{l.i.m.}_{\alpha\to\infty}\int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-iyu}F_1(u)\,du$$

---

[21]) Siehe G. Doetsch, Integration von Differentialgleichungen vermittels der endlichen Fourier-Transformation. Math. Annalen **112** (1935), S. 52—68 [S. 63]. Wie dort (S. 68) erwähnt, entspricht das Γ von Formel (21) einem in $-l<x<+l$ ungeraden Φ, während die analoge cos-Reihe zu einem geraden Φ gehört.

durch die Substitution $u = x - \xi$ folgende Gleichung

$$e^{iyx} = \frac{1}{f_1(y)} \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha \to \infty} \int_{-\alpha}^{+\alpha} F_1(x-\xi)\, e^{iy\xi}\, d\xi, \tag{26}$$

daß für jedes $F_1(x)$ aus L^2 die Funktionen e^{iyx} Eigenfunktionen des Kernes $F_1(x-\xi)$ zu den Eigenwerten $\frac{1}{f_1(y)}$ sind (wenn man diese Aussage in dem durch (26) angegebenen Sinn versteht). Und die Aussage des Satzes 3, die in der Gestalt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x-\xi)\, F_2(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixy}}{f_1^{-1}(y)} \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha \to \infty} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-iy\xi}\, F_2(\xi)\, d\xi \tag{27}$$

geschrieben werden kann, stellt somit eine zu (23) völlig analoge Entwicklung dar. Die aus $F_1(x) = \mathfrak{F}^{-1}\{f_1\}$ folgende Gleichung

$$F_1(x-\xi) = \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{e^{iyx}\, e^{-iy\xi}}{f_1^{-1}(y)}\, dy \tag{28}$$

kann man übrigens als die Entwicklung des Kerns nach seinen Eigenfunktionen deuten.

In unserem Spezialfall

$$F_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad f_1(y) = e^{-ty^2}$$

besagt die Gleichung (26), die man hier durch ein absolut konvergentes Fourier-Integral ersetzen kann:

$$e^{iyx} = e^{iy^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, e^{iy\xi}\, d\xi,$$

daß die Funktionen e^{iyx} Eigenfunktionen des Kernes $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}$ zu den Eigenwerten e^{iy^2}, mit anderen Worten Invarianten der $\mathfrak{G}$-Transformation mit dem Abklingungsfaktor e^{-ty^2} sind:

$$\mathfrak{G}\{e^{iyx}\} = e^{-ty^2}\, e^{iyx}. \tag{29}$$

Zu einem Eigenwert e^{iy^2} gehören zwei Eigenfunktionen: e^{iyx} und e^{-iyx}. Statt dessen kann man auch die reellen Funktionen $\cos yx$ und $\sin yx$ nehmen. Die Gleichung (28)

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iyx}\, e^{-iy\xi}}{e^{ty^2}}\, dy$$

ist das Analogon zu der für $x - \xi$ statt x hingeschriebenen Gleichung (25), und (27) liefert die Entwicklung (8), die das Analogon für die $\mathfrak{G}$-Trans-

formation zu der Entwicklung der $\mathfrak{W}$-Transformierten in eine Fourier-Reihe, bzw. der durch (24) gegebenen Transformierten in eine Reihe nach $e^{i n \frac{\pi}{l} x}$ darstellt.

Wir sahen vorhin, daß für jedes zu L^2 gehörige $F_1(x)$ der Kern $F_1(x-\xi)$ die kontinuierlich vielen Eigenfunktionen e^{iyx} $(-\infty < y < +\infty)$ besitzt, wenn man diesen Begriff im Sinne von (26) versteht. Gehört $F(x)$ zu L^{12}, so kann man (26) durch

$$e^{iyx} = f_1^{-1}(y) \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x-\xi)\, e^{iy\xi}\, d\xi$$

ersetzen, d. h. e^{iyx} ist auch Eigenfunktion im üblichen Sinne. Der zugehörige reziproke Eigenwert wird in diesem Fall durch

$$f_1(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx} F_1(x)\, dx$$

gegeben.

Diese Bemerkungen treffen auf unseren speziellen Kern $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}$ zu. Es erhebt sich nun die Frage, ob mit den e^{iyx} alle Eigenfunktionen erschöpft sind. Offenbar nicht, denn wenn man sich die wärmetheoretische Bedeutung der Gauß-Transformation vergegenwärtigt, so wird man sich daran erinnern, daß es doch stationäre Temperaturverteilungen, also absolute Invarianten (mit dem Abklingungsfaktor 1) der $\mathfrak{G}$-Transformation gibt, nämlich die Funktionen x und 1 und damit auch alle linearen Verbindungen $ax+b$. Die Funktion 1 ist unter den e^{iyx} für $y=0$ enthalten, die Funktion x aber nicht. Wir behaupten nun:

Außer x und e^{iyx} $(-\infty < y < +\infty)$ gibt es keine weiteren Invarianten $\Phi(x)$ der Gauß-Transformation, die der Bedingung

$$\Phi(x) = O(|x|^{\mu}) \quad \text{für} \quad |x| \to \infty \tag{30}$$

mit beliebig großem positiven μ genügen. (Die e^{iyx} sind also die einzigen beschränkten Invarianten.)

Dies ergibt sich aus folgendem Satz von Erh. Schmidt[22]): Die für Funktionen der Klasse (30) definierte Funktional-Transformation $\mathfrak{T}\{\Phi\}$ besitze die Eigenschaften:

---

[22]) Erh. Schmidt, Über eine Klasse linearer funktionaler Differentialgleichungen. Math. Annalen **70** (1910), S. 499—524 [§ 4]. Der Satz wird hier nur für gewisse Differentialoperatoren $\mathfrak{T}$ ausgesprochen, der Beweis macht aber nur von den obigen allgemeinen Eigenschaften von $\mathfrak{T}$ Gebrauch, vgl. l. c., § 1. Der obige Satz gestattet unmittelbar, alle der Bedingung (30) genügenden Eigenfunktionen eines beliebigen Kernes $K(x-\xi)$ mit $K(x) = O(e^{-\beta|x|})$ festzustellen, siehe S. Bochner, Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen. Sitz.-Ber. Berl. Akad. 1930, S. 403—411.

1. Sie ist distributiv:

$$\mathfrak{T}\{c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2\} = c_1\mathfrak{T}\{\Phi_1\} + c_2\mathfrak{T}\{\Phi_2\}.$$

2. Sie ist mit der Ableitung vertauschbar, d. h.

$$\mathfrak{T}\left\{\frac{d\Phi}{dx}\right\} = \frac{d}{dx}\mathfrak{T}\{\Phi\}.$$

3. Es gibt eine ganze transzendente Funktion $L(y)$, so daß

$$\mathfrak{T}\{e^{iyx}\} = L(y)\,e^{iyx}.$$

4. $$\mathfrak{T}\left\{\frac{d^m}{dy^m}e^{iyx}\right\} = \frac{d^m}{dy^m}\mathfrak{T}\{e^{iyx}\}, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Hat $L(y)$ keine reellen Nullstellen, so hat die Funktionalgleichung

$$\mathfrak{T}\{\Phi\} = 0$$

nur die triviale Lösung $\Phi \equiv 0$. Hat $L(y)$ endlich viele reelle Nullstellen y_q mit den Vielfachheiten $l_q + 1$ $(q = 1, \ldots, n)$, so wird die Gesamtheit aller Lösungen, die der Bedingung (30) genügen, durch

$$\sum_{q=1}^{n} e^{iy_q x} \sum_{p=0}^{l_q} C_{pq}\, x^p$$

mit beliebigen C_{pq} gegeben.

Die Transformation

$$\mathfrak{T}\{\Phi\} \equiv \Phi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \Phi(\xi)\, d\xi$$

erfüllt offenbar alle Voraussetzungen dieses Satzes, bei ihr ist wegen (29)

$$L(y) = 1 - \lambda e^{-ty^2}.$$

Bei festem λ hat diese Funktion die Nullstellen

$$y_1 = \sqrt{\frac{\log\lambda}{t}}, \qquad y_2 = -\sqrt{\frac{\log\lambda}{t}}.$$

Sie sind für $t > 0$ nur dann reell, wenn λ reell und $\lambda \geqq 1$ ist. Für $\lambda = 1$ liegt eine Doppelwurzel $y_1 = 0$ vor, die Lösungen von $\mathfrak{T}\{\Phi\} = 0$ bestehen also aus den linearen Kombinationen von 1 und x. Für $\lambda > 1$ liegen zwei einfache Wurzeln vor, die Lösungen sind also die linearen Kombinationen von

$$e^{i\sqrt{\frac{\log\lambda}{t}}x} \quad \text{und} \quad e^{-i\sqrt{\frac{\log\lambda}{t}}x}.$$

Setzt man, was für $\lambda > 1$ möglich ist, $\sqrt{\frac{\log\lambda}{t}} = y$, also $\lambda = e^{ty^2}$, so nehmen die Eigenfunktionen die Gestalt $e^{\pm iyx}$ an. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Das Auftreten der unbeschränkten Invariante x ist sehr bemerkenswert, da sie bei der $\mathfrak{W}$-Transformation, d. h. beim Wärmeleiter endlicher Länge kein Analogon besitzt.

§ 5.

Eine Umkehrung der Laplace-Transformation.

Tricomi[1]) hat die Idee gehabt, die zweiseitige Laplace-Transformation

$$g(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sz} G(z)\, dz \equiv \mathfrak{L}_{II}\{G\} \tag{31}$$

in die Gestalt einer Gauß-Transformation zu setzen:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{4t}} g\left(-\frac{x}{\sqrt{2t}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} e^{\frac{\xi^2}{4t}} G\left(\frac{\xi}{\sqrt{2t}}\right) d\xi$$

und die Umkehrformel (18) anzuwenden, wodurch sich eine (im Gegensatz zu der üblichen Formel) von komplexen Größen freie Umkehrung der Laplace-Transformation ergibt:

$$G(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi^3}} \int_0^{\infty} e^{\frac{y^2}{2}} du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} g(s) \cos y(z+s)\, ds. \tag{32}$$

Wie nicht anders zu erwarten, kommt t in dem Resultat nicht vor, so daß wir von vornherein etwa $t = \frac{1}{2}$ nehmen und in der Gauß-Transformation

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} g(-x), \qquad \Phi(x) = e^{\frac{x^2}{2}} G(x)$$

setzen können. Die von Tricomi angegebenen Gültigkeitsbedingungen sind etwas unbequem und nur hinreichend, nicht notwendig. Auf Grund unseres Ergebnisses in § 2 können wir exakte Gültigkeitsgrenzen angeben.

Gehen wir von solchen $G(z)$ aus, für die

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{z^2} |G(z)|^2\, dz$$

konvergiert, so existiert $F(x)$ für alle reellen x und damit $g(s)$ für alle reellen s und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} |g(s)|^2\, ds$$

konvergiert. (Dies klärt auch auf, wieso die Formel (32) nur dann anwendbar ist, wenn $g(s)$ für $-\infty < s < +\infty$ vorhanden ist, während im allgemeinen eine $\mathfrak{L}_{II}$-Transformierte lediglich in einem endlichen Inter-

vall — im Komplexen in einem vertikalen Streifen — existiert.) Die Umkehrbarkeit hängt von der Größe Q ab, die darin vorkommende Funktion hat hier die Gestalt

$$\gamma(y) = e^{\frac{1}{2}y^2} f(y) = e^{\frac{1}{2}y^2} \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha\to\infty} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-iyx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} g(-x)\,dx$$

$$= \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{\frac{(y+is)^2}{2}} g(s)\,ds.$$

Also können wir mit Hilfe des Resultates in § 2 folgenden Satz formulieren:

Damit eine Funktion $g(s)$ die $\mathfrak{L}_{II}$-Transformierte einer Funktion $G(z)$ ist, für die

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{z^2} |G(z)|^2\,dz$$

konvergiert, ist notwendig und hinreichend, daß $g(s)$ stetig ist und daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} |g(s)|^2\,ds \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^2(y)\,dy$$

mit

$$\gamma(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha\to\infty} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{\frac{(y+is)^2}{2}} g(s)\,ds$$

konvergieren. Man erhält $G(z)$ aus $g(s)$ durch die Formel:

$$(33)\quad G(z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{z^2}{2}} \operatorname*{l.i.m.}_{\beta\to\infty} \int_{-\beta}^{+\beta} e^{izy} e^{\frac{y^2}{2}}\,dy \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha\to\infty} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{iys} e^{-\frac{s^2}{2}} g(s)\,ds$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{2}} \operatorname*{l.i.m.}_{\beta\to\infty} \int_{-\beta}^{+\beta} e^{izy} \gamma(y)\,dy$$

oder in reeller Gestalt:

$$(34)\quad G(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \operatorname*{l.i.m.}_{\beta\to\infty} \int_{0}^{\beta} e^{\frac{y^2}{2}}\,dy \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha\to\infty} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-\frac{s^2}{2}} g(s) \cos y(z+s)\,ds.$$

Wenn die Integrale im gewöhnlichen Sinne existieren, insbesondere wenn

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} |g(s)|\,ds \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma(y)|\,dy$$

konvergieren, kann man hierfür die Formel (32) setzen.

Zweiter Abschnitt.

Punkt- und Streckenspektrum.

Wir schreiben jetzt die Gauß-Transformation in Gestalt eines Stieltjes-Integrals

$$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\Psi(\xi) \tag{4}$$

und stellen dabei an Ψ die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung üblichen Anforderungen, daß Ψ eine „*Verteilungsfunktion*", d. h. beschränkt, monoton und normiert:

$$\Psi(x) = \tfrac{1}{2}[\Psi(x+0) + \Psi(x-0)]$$

ist. Bekanntlich[23]) kann man $\Psi(x)$ in drei Bestandteile zerlegen:

$$\Psi(x) = \Psi_1(x) + \Psi_2(x) + \Psi_3(x),$$

wo $\Psi_1(x)$ eine Treppenfunktion, nämlich gleich der Summe der Sprünge von $\Psi(x)$ in $-\infty < \xi \leqq x$, $\Psi_2(x)$ totalstetig, also fast überall mit einer Ableitung $\Phi(x)$ versehen, und $\Psi_3(x)$ stetig und fast überall mit der Ableitung 0 versehen ist. Von den drei entsprechenden Bestandteilen von $F(x)$ stellt also der erste eine (endliche oder abzählbar unendliche) Summe von einzelnen Gaußschen Fehlerkurven und der zweite ein Integral von der im ersten Abschnitt studierten Beschaffenheit dar. Diese Form der Gauß-Transformation ist sowohl für die Wärmetheorie (wenn der Anfangszustand einzelne Wärmepole enthält) als auch besonders für die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik wichtig, worauf wir im dritten Abschnitt zurückkommen.

Die Integralgleichung (4) für $\Psi(x)$ behandeln wir vermittels einer entsprechenden Abänderung der Fourier-Transformation[24]):

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyx} dG(x) \equiv \mathfrak{B}\{G\}.$$

Ist G in $-\infty < x < +\infty$ von beschränkter Variation[25]), so existiert g

---

[23]) Siehe z. B. C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen. Leipzig und Berlin 1918, S. 577.

[24]) Diese Transformation ist zuerst von P. Lévy, Calcul des probabilités. Paris 1925, II. Teil von Kap. II an, ausführlicher behandelt worden. Siehe auch Bochner, l. c. [8]), 4. Kap.

[25]) Wir müssen solche Funktionen und nicht bloß die monotonen zulassen, weil die Kernfunktion $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ nicht monoton ist.

für $-\infty < y < +\infty$. Sind G_1 und G_2 von beschränkter Variation, so gilt derselbe für ihre Faltung

$$G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(x-\xi)\, dG_2(\xi),$$

und es ist:

$$\mathfrak{B}\{G\} = \mathfrak{B}\{G_1\} \cdot \mathfrak{B}\{G_2\}$$

(Faltungssatz). Ist $g = \mathfrak{B}\{G\}$, so ist umgekehrt

$$G(x) - G(0) = \lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{+\omega} \frac{e^{-ixy} - 1}{-iy}\, g(y)\, dy.$$

Aus diesen Sätzen folgt: Wenn die Gleichung (4) eine Verteilungsfunktion $\Psi(x)$ als Lösung besitzt, so ist $F(x)$ notwendig in $-\infty < x < +\infty$ von beschränkter Variation, und es gilt:

$$\mathfrak{B}\{F\} = \mathfrak{B}\left\{\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right\} \cdot \mathfrak{B}\{\Psi\},$$

so daß wegen

$$\mathfrak{B}\left\{\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyx}\, d\left\{\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right\} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\, d\{e^{iyx}\}$$

$$= -iy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyx} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\, dx = -iy e^{-ty^2}$$

die Gleichung besteht:

$$\mathfrak{B}\{\Psi\} = \frac{i}{y} e^{t y^2}\, \mathfrak{B}\{F\}.$$

Wenn die rechtsstehende Funktion die $\mathfrak{B}$-Transformierte einer Verteilungsfunktion ist, so existiert Ψ und erfüllt auf Grund des Faltungssatzes die Gleichung (4). Wir ziehen nun folgenden Satz von Mathias[26]) heran: Damit eine Funktion $g(y)$ die $\mathfrak{B}$-Transformierte einer Verteilungsfunktion ist, ist notwendig und hinreichend, daß g eine positiv definite Funktion ist, d. h. daß sie folgende Bedingungen erfüllt:

a) sie ist überall stetig und in $-\infty < y < +\infty$ beschränkt,

b) sie ist hermitesch, d. h. $\overline{g(-y)} = g(y)$,

c) für beliebige reelle $y_1, \ldots, y_n$ und komplexe $z_1, \ldots, z_n$ ist

$$\sum_{\mu,\, \nu=1}^{n} g(y_\mu - y_\nu)\, z_\mu\, \bar{z}_\nu \geqq 0.$$

Damit erhalten wir das Resultat:

---

[26]) M. Mathias, Über positive Fourier-Integrale. Math. Zeitschr. 16 (1923), S. 103—125; vervollständigt von Bochner, l. c. [8]), S. 76.

Dafür, daß es zu gegebenem $F(x)$ eine Verteilungsfunktion $\Psi(x)$ gibt, die die Gleichung (4) *befriedigt, d. h. daß die Umkehrung der als Stieltjes-Integral geschriebenen Gauß-Transformation durch eine monotone Funktion $\Psi(x)$ möglich ist, ist notwendig und hinreichend, daß $F(x)$ in $-\infty < x < +\infty$ von beschränkter Variation ist und daß die hiernach existierende Funktion*

$$\delta(y,t) = \frac{i}{y} e^{t y^2} \mathfrak{B}\{F\}$$

positiv definit ausfällt. Die Lösung Ψ (die naturgemäß nur bis auf eine Konstante bestimmt ist) ergibt sich durch die Formel

$$\Psi(x) - \Psi(0) = \lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{+\omega} \frac{1 - e^{-ixy}}{y^2} e^{t y^2} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy\xi} dF(\xi). \tag{35}$$

Man sieht leicht ein, daß, wenn F die Gestalt (4) mit monotonem, beschränkten Ψ hat, notwendig $F(+\infty) = F(-\infty) = 0$ und daher

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy\xi} dF(\xi) = -iy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy\xi} F(\xi) d\xi$$

ist. (Hieraus folgt übrigens, daß die Funktion $\delta(y,t)$ in der Gestalt

$$\delta(y,t) = e^{t y^2} \mathfrak{B}\{\int_{-\infty}^{x} F(\xi) d\xi\}$$

geschrieben werden kann. Hierbei ist wegen $F(\xi) \geqq 0$ das Integral monoton und daher $\mathfrak{B}\{\int_{-\infty}^{x} F(\xi) d\xi\}$ eine positiv definite Funktion.) Die Lösung läßt sich also auf die Form

$$\Psi(x) - \Psi(0) = \lim_{\omega \to \infty} \frac{i}{2\pi} \int_{-\omega}^{+\omega} \frac{e^{-ixy} - 1}{y} e^{t y^2} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy\xi} F(\xi) d\xi$$

$$= \lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{+\omega} \frac{e^{ixy} - 1}{iy} e^{t y^2} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy\xi} F(\xi) d\xi \tag{36}$$

bringen, der man auch die *reelle Gestalt*

$$\Psi(x) - \Psi(0) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{e^{t y^2}}{y} dy \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) (\sin y(x-\xi) + \sin y\xi) d\xi \tag{37}$$

geben kann. — Man sieht, wie diese Formeln mit denen im ersten Abschnitt, § 2, formal durch Differenzieren und Integrieren zusammenhängen.

Denkt man sich den *Parameter t variabel*, so lassen sich analoge Erörterungen wie im ersten Abschnitt anstellen. Ist die Funktion

$$\delta(y, t) = \frac{i}{y} e^{t y^2} \mathfrak{P}\{F\} = \mathfrak{B}\{\Psi(x, t)\}$$

für ein $t_2 > 0$ in y positiv definit, so gilt das auch für jedes t_1 mit $0 < t_1 < t_2$. Denn es ist

$$\delta(y, t_1) = \delta(y, t_2) \cdot e^{-(t_2 - t_1) y^2}$$

und, wenn

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} d\xi = E(x, t)$$

gesetzt wird,

$$\mathfrak{B}\{E(x, t)\} = e^{-t y^2},$$

also nach dem Faltungssatz

$$\Psi(x, t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x - \xi, t_2 - t_1)\, d\Psi(\xi, t_2).$$

$E(x, t_2 - t_1)$ und $\Psi(x, t_2)$ sind Verteilungsfunktionen, ihre Faltung $\Psi(x, t_1)$ also auch (wie man ganz leicht einsieht), mithin ist die zugehörige $\mathfrak{B}$-Transformierte $\delta(y, t_1)$ positiv-definit[27]).

Läßt sich also, wärmetheoretisch gesprochen, $F(x)$ um $t_2 > 0$ zurückverfolgen, so erst recht um $t_1 < t_2$. Es gibt folglich auch hier eine Schnittzahl T, die als obere Grenze der t definiert ist, für die $\delta(y, t)$ positiv definit ist. Für $0 < t < T$ ist die Zurückverfolgung möglich, für $t > T$ nicht. Damit ist das Problem gelöst, festzustellen, *wie lange eine positive Temperaturverteilung bei zeitlicher Zurückverfolgung positiv bleibt*, denn einem monotonen $\Psi(x)$ entspricht in der Schreibweise des ersten Abschnitts ein positives $\Phi(x)$.

Bemerkung: Der hier behandelte Fall, daß $\Psi(x)$ monoton ist, daß also sozusagen die als Komponenten von $F(x)$ auftretenden Gaußschen Kurven sämtlich positive Koeffizienten haben, ist der einzige in allen Anwendungen wirklich auftretende. Man könnte ganz analog den Fall behandeln, daß $\Psi(x)$ *von beschränkter Variation* ist, nur müßte man statt des Satzes von Mathias Kriterien dafür benutzen, daß eine Funktion die $\mathfrak{B}$-Transformierte einer Funktion von beschränkter Variation ist[28]).

---

[27]) Mit derselben Methode ergibt sich, daß das Produkt zweier positiv definiten Funktionen wieder positiv definit ist.

[28]) Derartige Kriterien sind unlängst angegeben worden: S. Bochner, A theorem on Fourier-Stieltjes integrals. Bull. A. M. S. 40 (1934), S. 271—276; I. J. Schoenberg, A remark on the preceding note by Bochner. Ibid., S. 277—278.

Dritter Abschnitt.

Endlich viele Komponenten.

So wichtig das Problem der Darstellung einer Funktion als kontinuierliche Summe von Fehlerkurven in der Gestalt (1) oder (2) in der reinen Mathematik und in der Wärmetheorie ist, so bedeutungslos ist es für die Statistik. Denn da man jede in weiten Grenzen beliebige Funktion in dieser Weise aufbauen kann, so liegt in der Tatsache der Zerlegbarkeit kein statistisches Charakteristikum. Dagegen sind die Funktionen, die sich aus *endlich* vielen Termen der Gestalt

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 (x-x_0)^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}, \qquad h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \tag{38}$$

(h = Präzisionsmaß, σ = Streuung = quadratisches Mittel der Fehler = mittlerer Fehler) zusammensetzen, von großer Bedeutung in der ökonomischen und biologischen *Statistik* und vielen Teilen der *Physik*, und wir wollen die Zerlegung solcher Funktionen in ihre Komponenten daher hier nicht nur theoretisch, sondern auch vom Standpunkt der Praxis aus behandeln. Häufigkeitskurven dieser Art, bei denen die Streuungen der einzelnen Komponenten auch verschieden sein können:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_i)^2}{2\sigma_i^2}}, \tag{39}$$

treten dann auf, wenn das statistische Material nicht homogen ist, sondern aus mehreren Typen besteht, von denen jeder einzelne dem Gaußschen Fehlergesetz gehorcht, also z. B. bei Messungen an einer Familie von Tieren, die in Wahrheit aus mehreren Familien besteht. Ein Beispiel aus der Physik ist die spektroskopisch aufgenommene Intensitätskurve einer Lichtquelle: Jede Spektrallinie wird durch den Einfluß des Dopplereffekts auf die in Wärmebewegung befindlichen emittierenden Atome — ein statistischer Vorgang — zu einer Gaußkurve auseinandergezogen, die beobachtete Intensitätskurve ist also eine Überlagerung von derartigen Kurven [29]).

Liegen die Komponenten weit auseinander, d. h. sind die x_i stark verschieden oder ist die Streuung sehr gering, d. h. sind die einzelnen Glockenkurven schlank, so macht die „Gaußsche Analyse" praktisch gar keine Schwierigkeit, da wegen des raschen Abklingens der Exponentialkurven die Überlagerung ganz geringfügig ist; die x_i werden mit praktisch

[29]) Näheres siehe in § 1 der unter [2]) zitierten Arbeit.

ausreichender Genauigkeit durch die Stellen der Maxima gegeben, die a_i sind die Flächeninhalte der einzelnen Glocken, da

$$\frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_i)^2}{2\sigma_i^2}}\,dx = 1$$

ist, und die σ_i erhält man dann aus den Höhen $\frac{a_i}{\sigma_i\sqrt{2\pi}}$ der Glockenmaxima. Zur Kontrolle kann man noch bei jeder einzelnen Kurve die Stelle $\bar{x}_i$ aufsuchen, wo die Ordinate auf den r-ten Teil des Maximums gesunken ist (für $r = 2$ z. B. ist $2\,|\bar{x}_i - x_i|$ die sogenannte Halbwertbreite); dann ist

$$\frac{a_i}{\sigma_i\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(\bar{x}_i - x_i)^2}{2\sigma_i^2}} = \frac{1}{r}\,\frac{a_i}{\sigma_i\sqrt{2\pi}},$$

also

$$\sigma_i^2 = \frac{(\bar{x}_i - x_i)^2}{2\log r}. \tag{40}$$

Wenn dagegen die x_i nahe beieinanderliegen oder die Streuung groß ist, so wandern nicht bloß die Maxima aus den Stellen x_i heraus, sondern es kann sogar vorkommen, daß mehrere sich zu einem einzigen vereinigen, so daß die Gestalt von $F(x)$ weder Anzahl noch Anordnung der Komponenten erkennen läßt.

Sehr deutlich kann man das an der Superposition zweier Komponenten mit gleich großer Streuung verfolgen:

$$F(x) = \frac{a_1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-x_1)^2}{2\sigma^2}} + \frac{a_2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-x_2)^2}{2\sigma^2}}.$$

Es sei $x_1 < x_2$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. Die Extrema liegen an den Stellen, wo

$$-\sigma^3\sqrt{2\pi}\,F'(x) = a_1(x-x_1)\,e^{-\frac{(x-x_1)^2}{2\sigma^2}} + a_2(x-x_2)\,e^{-\frac{(x-x_2)^2}{2\sigma^2}} = 0$$

oder

$$\frac{a_1(x-x_1)}{a_2(x_2-x)} = e^{\frac{x_2-x_1}{2\sigma^2}(2x-(x_1+x_2))}$$

ist. Da die rechte Seite positiv ist, müssen die Differenzen $x - x_1$ und $x_2 - x$ gleiches Vorzeichen haben, die fraglichen x liegen also zwischen x_1 und x_2, d. h. die Maxima rücken bei Superposition zusammen. Zur weiteren Diskussion logarithmieren wir:

$$\log\frac{a_1(x-x_1)}{a_2(x_2-x)} = \frac{x_2-x_1}{2\sigma^2}\,(2x-(x_1+x_2)).$$

Die Kurve

$$y = \log\frac{a_1(x-x_1)}{a_2(x_2-x)} \qquad (x_1 < x < x_2)$$

hat die Geraden $x = x_1$, $x = x_2$ zu Asymptoten und schneidet die x-Achse in

$$\xi_1 = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2}{a_1 + a_2};$$

sie wächst monoton wegen

$$y' = \frac{x_2 - x_1}{(x - x_1)(x_2 - x)} > 0$$

und hat, wie sich aus

$$y'' = \frac{(x_2 - x_1)(2x - (x_1 + x_2))}{[(x - x_1)(x_2 - x)]^2}$$

ergibt, einen einzigen Wendepunkt und zwar bei

$$\xi_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Mit der Geraden

$$\eta = \frac{x_2 - x_1}{2\sigma^2}(2x - (x_1 + x_2)),$$

die die x-Achse im Punkte ξ_2 schneidet, hat sie demnach für $\xi_1 \neq \xi_2$, d. h. $a_1 \neq a_2$ entweder einen Schnittpunkt oder einen Schnittpunkt und einen Berührungspunkt oder drei Schnittpunkte gemein. Die drei Schnittpunkte entsprechen den zwei Maxima und dem dazwischenliegenden Minimum in dem Fall, daß die Superpositionskurve F noch zwei getrennte Gipfel und dazwischen einen Sattel besitzt. Liegt nur ein Schnittpunkt vor, so sind die beiden ursprünglichen Gipfel zu einem verschmolzen. Bei einem Schnittpunkt und einem Berührungspunkt kommt zwischen den zwei Gipfeln kein Sattel mehr zustande, der kleinere geht horizontal verschleifend in den größeren über. — Für $a_1 = a_2$, wo die Kurve y symmetrisch ist, ergeben sich außer dem sicher vorhandenen Schnittpunkt $\xi_1 = \xi_2$ entweder noch zwei zu ξ_1 symmetrisch liegende Schnittpunkte, wo die gleich hohen Maxima von $F(x)$ liegen, oder aber überhaupt kein weiterer Schnittpunkt. Zwei kongruente Glockenkurven können sich also sogar zu einer eingipfligen symmetrischen Kurve vereinigen, wodurch das Vorhandensein von nur einer Komponente vorgetäuscht wird.

Die Lehrbücher der mathematischen Statistik weisen wohl teilweise auf die Bedeutung des Zerlegungsproblems hin, bringen aber keine Methode[30]), weshalb sich die Statistiker, Biologen und Physiker immer mit einem ziemlich vagen Probieren behelfen.

Es gibt nun drei Wege, wie man die Zerlegung einer Kurve vom Typus (39) in ihre Komponenten vornehmen kann:

[30]) Die sonst sehr inhaltreichen Bücher von H. L. Rietz (Mathematical Statistics, 1927, und Handbuch der mathematischen Statistik, deutsche Ausgabe von F. Baur, 1930) erwähnen die Zerlegung in Gaußkurven überhaupt nicht. R. de Montessus de Ballore (Probabilités et Statistiques, 1931, Chap. XIII) betont, daß das Studium des Problems „fera faire à la statistique mathématique des progrès d'une haute importance", beschränkt sich aber auf die Durchführung einer ziemlich willkürlichen Zerlegung bei einem zahlenmäßigen Beispiel mit zwei Komponenten. C. V. L. Charlier (Vorles. üb. d. Grundzüge der math. Statistik, 1931) weist ganz kurz auf die weiter unten erwähnte Untersuchung von Pearson hin, stellt aber die Methode nicht dar.

1. Eine *ganz allgemeine* und *theoretisch völlig exakte Methode* ergibt sich auf Grund der Resultate im zweiten Abschnitt. Um den Anschluß an die dort gebrauchte Terminologie der Wärmeleitung zu gewinnen, setzen wir

$$\sigma_i^2 = 2\,t_i$$

und denken uns die σ_i und damit die t_i der Größe nach geordnet:

$$0 < t_1 \leqq t_2 \leqq \ldots \leqq t_n.$$

Die Zurückverfolgung des Temperaturzustandes

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2\sqrt{\pi\, t_i}}\, e^{-\frac{(x-x_i)^2}{4\,t_i}}, \tag{41}$$

der dem Effekt von Wärmepolen an den Stellen x_i, die aber zu verschiedenen Zeiten, nämlich jeweils vor t_i Sekunden, aufgetaucht sind, entspricht, um die Zeitspanne t liefert natürlich

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2\sqrt{\pi\,(t_i - t)}}\, e^{-\frac{(x-x_i)^2}{4\,(t_i-t)}}$$

und ist nur für $t < t_1$ möglich. Die obere Grenze derjenigen t, für die

$$\delta(y, t) = \frac{i}{y}\, e^{t\,y^2}\, \mathfrak{B}\{F\}$$

positiv definit ausfällt, ist also gleich t_1. Rechnet man die zu $t = t_1$ gehörige Funktion $\Psi(x) = \Psi(x, t_1)$ nach einer der drei Formeln (35) bis (37) aus, so muß sie, wenn $t_1 = t_2 = \ldots = t_{\lambda_1}$ war, an den Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_{\lambda_1}$ (und nur dort) Sprünge von der Höhe bzw. $a_1, a_2, \ldots, a_{\lambda_1}$ haben. Damit sind also die Komponenten mit dem kleinsten t_i (d. h. σ_i) vollständig bestimmt (nämlich ihre a_i, x_i und σ_i bekannt), und man kann sie infolgedessen von $F(x)$ subtrahieren. Die Restfunktion läßt sich um t_{λ_1+1} zurückverfolgen, wodurch man die nächsten Komponenten gewinnt usw. — Hatten die Komponenten alle dieselbe Streuung, so erhält man sie in einem einzigen Schritt: Ist t_0 die obere Grenze der Werte t, für die $\delta(y, t)$ positiv definit ausfällt, so ist die mit $t = t_0$ berechnete Funktion $\Psi(x)$ eine einfache Treppenfunktion mit den Sprungstellen x_i und den Stufenhöhen a_i.

2. Ist die Funktion $F(x)$ nicht analytisch, sondern experimentell gegeben, so ist die Feststellung, wie weit $\delta(y, t)$ positiv definit ist, kaum durchführbar. Man wird dann mit einigen t-Werten probieren, wie lange man mit Formel (37) noch Konvergenz bekommt. Noch praktischer wird man sich die Ergebnisse des § 2 im ersten Abschnitt zunutze machen: Verfolgt man $F(x)$ vermittels Formel (18) mit von 0 an wachsendem t zurück, so werden die Streuungen aller Komponenten kleiner, die einzelnen

Glockenkurven werden also immer schlanker und höher und heben sich infolgedessen immer besser gegeneinander ab. Diejenige mit der kleinsten Streuung wird am ehesten zu einem vertikalen Strich ausarten; nach ihrer Elimination verfolgt man den Rest weiter usf. Man bekommt so ziemlich rasch die t_i und x_i und kann die a_i dann am einfachsten aus den linearen Gleichungen berechnen, die man durch Ablesen von $F(x)$ an n Stellen und Einsetzen dieser Werte in (39) erhält. Mit dieser Methode wurden in der unter [2]) zitierten Arbeit (§ 3 und § 4) bei zwei Beispielen aus der Spektroskopie gute Resultate erzielt. Da die Formeln für den unendlich langen Leiter aus den l. c. [4]) mitgeteilten für den endlichen Leiter durch Grenzübergang hervorgehen (vgl. l. c. [2]), S. 718 bis 720), so kann man in den Anwendungen, wo $F(x)$ nur in einem endlichen Intervall gegeben ist, außerhalb dessen es — praktisch gesprochen — verschwindet, die Lösung für den endlichen Leiter benutzen. Hier handelt es sich aber um Fourier-Reihen, und die Fourier-Koeffizienten bekommt man sehr rasch vermittels des harmonischen Analysators.

3. Für den Fall, daß man einen Anhaltspunkt über die Anzahl der Komponenten hat, habe ich in der unter [2]) zitierten Arbeit, § 2, noch eine Methode ausgearbeitet, die auf ganz anderen Prinzipien beruht und im Verhältnis zu den vorher genannten ziemlich elementar ist. Sie besteht darin, die (praktisch sehr leicht herzustellenden) *Momente*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, x^r\, dx = M_r$$

der Funktion (39) zu bilden, was vornehmlich im Falle konstanter Streuung $\sigma_i = \sigma$ zu Gleichungen einfacher Bauart führt, die in unserer gegenwärtigen Nomenklatur so aussehen[31]):

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i &= M_0 \\
\sum_{i=1}^{n} a_i x_i &= M_1 \\
\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 &= M_2 - M_0 \sigma^2 \\
\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^3 &= M_3 - 3 M_1 \sigma^2 \\
\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^4 &= M_4 - 6 M_2 \sigma^2 + 3 M_0 \sigma^4 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{42}$$

[31]) In den Formeln (11), l. c. [2]) S. 711, befindet sich ein Druckfehler: in der letzten Zeile muß es statt $-\frac{3 M_0 \alpha^3}{\sqrt{\pi}}$ heißen $+\frac{3 M_0 \alpha^3}{4\sqrt{\pi}}$.

Für die a_i, x_i und σ^2 braucht man $2n+1$ Gleichungen, die ganz besonders leicht zu lösen sind [32]), wenn man σ^2 vorab bestimmen kann, z. B. dadurch, daß man auf die Außenseite des am weitesten links oder rechts liegenden Wellenberges in $F(x)$, wo man es praktisch nur mit einer Glockenkurve zu tun hat, die Formel (40) anwendet. Wie ich inzwischen bemerkt habe, hat Pearson [33]) dieselbe Methode bereits 1894 für den Fall zweier Komponenten mit verschiedener Streuung entwickelt und auf zwei Beispiele aus der Biologie angewendet. Die von Pearson abgeleiteten Formeln sind jedoch so kompliziert (zuerst ist eine Gleichung neunten Grades für $x_1 \cdot x_2$ zu lösen, deren sämtliche reelle Lösungen in Betracht gezogen werden müssen), daß anscheinend niemand nach ihm die Energie aufgebracht hat, derartig ausgedehnte Rechnungen auszuführen [34]). Charlier [35]) hat die Methode ein wenig anders aufgezogen und einige Winke zu ihrer Vereinfachung gegeben, er hat aber nur ein Beispiel mit zwei Komponenten gleicher Streuung, wo eine Gleichung dritten Grades statt neunten Grades zu lösen ist, durchgerechnet. — Die obige, l. c. [2]), § 2, angegebene Methode hat sich außer an den dort durchgeführten Beispielen aus der Spektroskopie inzwischen bei astronomischen Problemen [36]) bewährt.

Da die Zerlegung einer Funktion der Form (39) eindeutig ist [37]), so muß man, wenn man mit einem hinreichend großen n arbeitet, die richtige

---

[32]) Siehe l. c. [2]), S. 712—713.

[33]) K. Pearson, Contributions to the mathematical theory of evolution. Phil. Transact. of the Royal Soc. of London (A) **185** (1894), S. 71—110. Hier sind auch frühere, aber erfolglose Versuche von R. Livi (1883) und O. Ammon (1893) erwähnt.

[34]) Pearson sagt selbst: the analytical difficulties, even for the case $n = 2$, are so considerable, that it may be questioned whether the general theory could ever be applied in practice to any numerical case.

[35]) C. V. L. Charlier, Researches into the theory of probability. Acta Universitatis Lundensis, Neue Folge, Abt. 2, Bd. I, No. 5, S. 33—38 und Fig. 18. Charlier entwickelt $F(x)$ zunächst in eine Brunssche Reihe und berechnet die Komponenten aus deren Koeffizienten.

[36]) B. Sticker, Untersuchungen über Sternfarben. II. Analyse der Farbenhäufigkeitsfunktion. Veröff. d. Univ.-Sternwarte zu Bonn, Nr. 23 (1930), S. 20—32. Hier ist die Theorie der Methode noch einmal in extenso dargestellt. — B. Sticker, Über die Farbenhäufigkeitsfunktion in Sternhaufen. Zeitschr. f. Astrophys. **1** (1930), S. 174—191. — Vgl. auch O. Schellenberg, Zur Analyse der ultravioletten Emissionen der Erdalkaliphosphore. Ann. d. Phys. (5) **13** (1932), S. 249—264. — Nach den Erfahrungen von Sticker erfordert die Trennung von zwei Komponenten etwa eine Stunde, von fünf Komponenten einen Tag für einen Rechner.

[37]) Dies folgt aus der unter 1. angegebenen Methode und wurde schon früher bewiesen von E. Lonn, Beweis der Eindeutigkeit der Zerlegung einer Intensitätskurve in ihre Komponenten. Zeitschr. f. Phys. **75** (1932), S. 348—349.

Zerlegung bekommen. Bei der praktischen Anwendung findet die Methode natürlich ihre Grenze in der Ungenauigkeit der höheren Momente.

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, daß später F. Bernstein[38]) für den Spezialfall gleicher Streuungen einen Weg angegeben hat, der auf der Umkehrung der unter **2.** genannten Methode beruht und sonst viel Ähnlichkeit mit **3.** hat. Verfolgt man die Funktion (41) im Spezialfall $t_i = \text{const} = t_0$ nicht rückwärts, sondern um t vorwärts, d. h. wendet man auf F die Gauß-Transformation mit dem Parameter t an, so geht sie offenbar über in

$$F(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t_0 + t)}} \sum_{i=1}^{n} a_i e^{-\frac{(x - x_i)^2}{4(t_0 + t)}}.$$

Kennt man nun t_0, so kann man c und $t = \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{2n}$ so wählen, daß $\frac{c}{t_0 + \tau_\lambda} = \lambda \, (\lambda = 1, \ldots, 2n)$ wird. Ist $\bar{x}$ ein fester Wert und $e^{-\frac{(\bar{x} - x_i)^2}{4c}} = u_i$, so erhält man für die $2n$ Unbekannten a_i, u_i die Gleichungen:

$$2\sqrt{\pi(t_0 + \tau_\lambda)}\, F(\bar{x}, \tau_\lambda) = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i^\lambda \quad (\lambda = 1, \ldots, 2n). \tag{43}$$

Diese Methode, bei der wir wie bei **3.** die Anzahl der Komponenten kennen müssen, hat den schwerwiegenden Nachteil, daß die Streuung $2t_0$ nicht berechnet werden kann, sondern im Gegenteil im voraus und zwar sehr genau bekannt sein muß[39]). Überdies ist zu bedenken, daß die (ziemlich umständlich zu berechnenden) „späteren" Zustände $F(x, t)$ nach den Ergebnissen in § 3 des ersten Abschnitts nur sehr unzuverlässige Auskunft über $F(x)$ geben.

---

[38]) F. Bernstein, Verallgemeinertes Galtonbrett zur Durchführung von Funktionaltransformationen. Zeitschr. f. Phys. 77 (1932), S. 104—113 [S. 109].

[39]) In diesem Falle haben die Gleichungen (42) dieselbe Form wie (43), jedoch sind die konstanten Glieder von (42) viel einfacher auszurechnen. Die Funktionen $F(x)\, x^\nu$ kann man bekanntlich sehr rasch graphisch finden, die Momente erhält man vermittels des Planimeters.

(Eingegangen am 10. Januar 1936.)

Über die Irreduzibilität gewisser ganzzahliger Polynome.

Von

Erik L. Petterson in Stockholm.

Ob ein numerisch gegebenes ganzzahliges Polynom $f(x)$ reduzibel ist oder nicht, kann immer nach der bekannten Methode, die von Kronecker stammt, festgestellt werden. Um die dabei auftretenden numerischen Berechnungen zu vereinfachen, benutzte Runge[1]) einige für einen Faktor $A(x)$ von $f(x)$ unmittelbar geltende Beziehungen, die folgendermaßen formuliert werden können

$$A(a) \mid f(a), \quad A(b) \mid f(b), \quad A(a) \equiv A(b) \pmod{a-b}$$

für alle verschiedenen ganzen Zahlen a und b. Es ist aber möglich, diese Beziehungen auch auf nicht numerisch gegebene Polynome anzuwenden und dadurch präzise Irreduzibilitätskriterien zu erhalten. Besonders gilt dieses für einige Polynome $f(x)$ der Form $f(x) = \prod_{\nu=1}^{n} (x - a_\nu) + b$. Polynome dieser und allgemeiner Art sind neulich mit anderen Methoden von A. Brauer und R. Brauer in ihrer Arbeit, „Über Irreduzibilitätskriterien von I. Schur und G. Pólya“ (Math. Zeitschr. **40** (1935), S. 242) behandelt worden, wo auch genaue Literaturangaben zu finden sind.

Eine wesentliche Verallgemeinerung des genannten Polynoms $f(x)$ ist auch das Polynom $F(x) = \prod_{\nu=1}^{n} g_\nu(x)^{m_\nu} + p^e M(x)$. In einer Arbeit „Über die Reduzibilität von algebraischen Gleichungen“ (Skr. norske Vid.-Akad., Oslo 1923) hat Ore unter anderem mit Hilfe der Idealtheorie die Faktoren modulo p^{e+1} von einem Polynom $F(x)$ (mit anderen Bezeichnungen) untersucht und dabei vorausgesetzt, daß alle $g_\nu(x)$ Primfunktionen modulo der Primzahl p sind, und daß $Gr(M(x)) < Gr(f(x))$ ist. In vorliegender Arbeit werde ich zuerst durch Heranziehen von Resultanten Faktoren modulo p^{e+1} von $F(x)$ mit allgemeinen Polynomen $g_\nu(x)$ untersuchen. Wichtig ist dann, daß in der Voraussetzung $Gr(M(x)) \leqq Gr(f(x))$ auch Gleichheit erlaubt ist, denn dadurch kann ein allgemeines Irreduzibilitätskriterium modulo $p^{e+1} q^{v+1}$ mit p und q als Primzahlen abgeleitet werden. Nachdem ein Kriterium nach der Methode von Runge aufgestellt worden

[1]) „Über die Zerlegung ganzer ganzzahliger Funktionen in irreduzible Faktoren“, Journ. f. Math. **99** (1886), S. 89.

ist, werden weitere Fälle von Irreduzibilität unter anderem als Folgerung allgemeiner Voraussetzungen der Form $g_\varrho(x) \equiv g_\varkappa(x) \pmod{a_\varrho - a_\varkappa}$ abgeleitet. Die Kongruenzbeziehungen, die ich hieraus ableite und dann benutze, sind wesentliche Erweiterungen der obigen Rungeschen Relationen. Nach den in dieser Arbeit angewandten Beziehungen und nach der Methode, die ich in einer Arbeit „Einige Bedingungen für die Anzahl und die Gradzahlen der Faktoren gewisser ganzzahliger Polynome“[2]) angegeben habe, folgt zuletzt eine Untersuchung des Polynoms

$$f(x) = \prod_{\nu=1}^{n} (g(x)^l + a_\nu N_\nu(x))^{m_\nu} - p^e b$$

mit $(a_1, a_2, \ldots, a_n) > 1$.

Unter $f(x)$, $g(x)$, $N(x)$ usw. werden im folgenden immer ganzzahlige Polynome verstanden. Die Buchstaben a, b, c usw. bezeichnen ganze Zahlen, und $Gr(f(x))$ bedeutet den Grad von $f(x)$.

Es sei $f(x)$ ein Polynom der Form

$$f(x) = b \prod_{\nu=1}^{n} g_\nu(x)^{m_\nu} + p^e M(x),$$

wo $g_\nu(x)$ normiert, $Gr(g_\nu(x)) = k_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, p eine Primzahl, $e \geqq 1$, $p \nmid b$ und $Gr(M(x)) \leqq \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu m_\nu$ ist. Die Resultanten von $g_\nu(x)$ und $M(x)$ werden mit R_ν bezeichnet, und es sei $p \nmid R_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Es wird vorausgesetzt, daß $A_r(x)$ ein Faktor modulo p^{e+1} des Grades r von $f(x)$ ist. Man hat also

$$b \prod_{\nu=1}^{n} g_\nu(x)^{m_\nu} + p^e M(x) \equiv A_r(x) B(x) \pmod{p^{e+1}}.$$

Es seien ξ_λ für $\lambda = 1, 2, \ldots, r$ und $\eta_\mu^{(\nu)}$ für $\mu = 1, 2, \ldots, k_\nu$ die Wurzeln von $A_r(x)$ bzw. $g_\nu(x)$. Der höchste Koeffizient von $A_r(x)$ wird mit w_0 bezeichnet. Aus den Voraussetzungen für $f(x)$ folgt, daß der höchste Koeffizient von $f(x)$ nicht durch p teilbar ist. Also muß auch gelten $p \nmid w_0$.

Nach einer bekannten Regel für Resultanten hat man

$$\prod_{\lambda=1}^{r} g_\nu(\xi_\lambda) = \pm \frac{1}{w_0^{k_\nu}} \prod_{\mu=1}^{k_\nu} A_r(\eta_\mu^{(\nu)}).$$

Die Reduzibilität von $f(x)$ modulo p^{e+1} gibt folgende Identität

$$b \prod_{\nu=1}^{n} g_\nu(x)^{m_\nu} + p^e M(x) = A_r(x) B(x) + p^{e+1} T(x),$$

---

[2]) Math. Zeitschr. 41 (1936), S. 200–212.

wo $T(x)$ von einem Grade $< \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu m_\nu$ angenommen werden darf. Wenn man $x = \xi_\lambda$ setzt und über alle ξ_λ für $\lambda = 1, 2, \ldots, r$ multipliziert, so folgt

$$p^{re} \prod_{\lambda=1}^{r} (M(\xi_\lambda) - p\,T(\xi_\lambda)) = \pm b^r \prod_{\nu=1}^{n} \prod_{\lambda=1}^{r} g_\nu(\xi_\lambda)^{m_\nu}.$$

Nach der obigen Relation für die Resultante $\prod_{\lambda=1}^{r} g_\nu(\xi_\lambda)$ wird dann abgeleitet:

$$p^{re}\, w_0^{\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu m_\nu} \prod_{\lambda=1}^{r} (M(\xi_\lambda) - p\,T(\xi_\lambda)) \equiv \pm b^r \prod_{\nu=1}^{n} \prod_{\mu=1}^{k_\nu} A_r(\eta_\mu^{(\nu)})^{m_\nu}.$$

Da jedes Polynom $g_\nu(x)$ normiert ist, so ist jede Resultante $\prod_{\mu=1}^{k_\nu} A_r(\eta_\mu^{(\nu)})$ ganz. Aus $Gr(M(x)) \leqq \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu m_\nu$ und $Gr(T(x)) < \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu m_\nu$ folgt, daß $w_0^{\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu m_\nu} \prod_{\lambda=1}^{r} (M(\xi_\lambda) + p\,T(\xi_\lambda))$ und $w_0^{\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu m_\nu} \prod_{\lambda=1}^{r} M(\xi_\lambda)$ ganz sind. Man hat also

$$p^{re}\, w_0^{\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu m_\nu} \prod_{\lambda=1}^{r} M(\xi_\lambda) \equiv b^r \prod_{\nu=1}^{n} \prod_{\mu=1}^{k_\nu} A_r(\eta_\mu^{(\nu)})^{m_\nu} \pmod{p^{e+1}}.$$

Früher wurde $p \nmid R_r$ vorausgesetzt, was bedeutet, daß $M(x)$ und $g_\nu(x)$ modulo p teilerfremd sind für alle $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Folglich kann $M(x)$ und $A_r(x)$ auch keinen gemeinsamen Faktor modulo p haben, d. h.

$$p \nmid w_0^{\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu m_\nu} \prod_{\lambda=1}^{r} M(\xi_\lambda).$$

Wenn $p^{\alpha_\nu} \mid \prod_{\mu=1}^{k_\nu} A_r(\eta_\mu^{(\nu)})$ und $p^{\alpha_\nu+1} \nmid \prod_{\mu=1}^{k_\nu} A_r(\eta_\mu^{(\nu)})$ ist mit $\alpha_\nu \geqq 0$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, so gilt also

$$re = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu m_\nu.$$

Für $x = \eta_\mu^{(\nu)}$ erhält man

$$p^e (M(\eta_\mu^{(\nu)}) - p\,T(\eta_\mu^{(\nu)})) = A_r(\eta_\mu^{(\nu)})\, B(\eta_\mu^{(\nu)})$$

und durch die Bildung des Produkts über $\eta_\mu^{(\nu)}$ für $\mu = 1, 2, \ldots, k_\nu$ folgt

$$p^{k_\nu e} R_\nu \equiv \prod_{\mu=1}^{k_\nu} A_r(\eta_\mu^{(\nu)}) \prod_{\mu=1}^{k_\nu} B(\eta_\mu^{(\nu)}) \pmod{p^{k_\nu e+1}}.$$

Aus der Voraussetzung $p \nmid R_\nu$ folgt dann $0 \leqq \alpha_\nu \leqq k_\nu e$. Wenn $f(x)$ einen Faktor $A_r(x)$ der Form

$$A_r(x) = Q_\nu(x)\, g_\nu(x) + p^{v_\nu} U_\nu(x)$$

enthält, wo $g_\nu(x)$ und $U_\nu(x)$ modulo p teilerfremd sind, so ergibt sich

$$\prod_{\mu=1}^{k_\nu} A_r(\eta_\mu^{(\nu)}) = p^{k_\nu v_\nu} \prod_{\mu=1}^{k_\nu} U_\nu(\eta_\mu^{(\nu)})$$

mit $p \nmid \prod_{\mu=1}^{k_\nu} U_\nu(\eta_\mu^{(\nu)})$. Für zugehöriges α_ν gilt dann

$$\alpha_\nu = k_\nu v_\nu.$$

Die abgeleiteten Beziehungen für die Gradzahlen der eventuellen Faktoren von $f(x)$ werden nun im folgenden Satz zusammengefaßt.

Satz 1. *Es sei $f(x)$ ein Polynom der Form*

$$f(x) = b \prod_{\nu=1}^{n} g_\nu(x)^{m_\nu} + p^e M(x)$$

in der p eine Primzahl bedeutet, $p \nmid b$, $e \geqq 1$, $g_\nu(x)$ normiert und vom Grade k_ν ist für $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Die Resultante von $g_\nu(x)$ und $M(x)$ soll mit R_ν bezeichnet werden, und es sei $p \nmid R_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ und auch $Gr(M(x)) \leqq \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu m_\nu$. Wenn $f(x)$ dann modulo p^{e+1} reduzibel und $A_r(x)$ irgendein Faktor des Grades r ist, so muß r von der Form

$$r = \frac{1}{e} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu m_\nu, \quad 0 \leqq \alpha_\nu \leqq k_\nu e$$

sein. Zwischen α_ν und der Resultante V_ν von $g_\nu(x)$ und $A_r(x)$ bestehen die Beziehungen $p^{\alpha_\nu} \mid V_\nu$, $p^{\alpha_\nu + 1} \nmid V_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Ist außerdem $A_r(x)$ von der Form

$$A_r(x) = Q_\nu(x)\, g_\nu(x) + p^{v_\nu} U_\nu(x), \quad v_\nu \geqq 0,$$

wo die Resultante von $g_\nu(x)$ und $U_\nu(x)$ nicht durch p teilbar ist, so muß für zugehöriges α_ν gelten:

$$\alpha_\nu = k_\nu v_\nu.$$

Bemerkung. Wenn alle $g_\nu(x)$ modulo p irreduzibel sind, so müssen, wegen der eindeutigen Zerlegung von $f(x)$ in Primfunktionen (mod p), jedem irreduziblen Faktor (mod p^{e+1}) von $f(x)$ n Zahlen v_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) entsprechen und zwar so, daß nur ein v_ν größer als 0 ist und alle übrigen v_ν gleich 0 sind.

Eine allgemeine Untersuchung dieses Falles kommt in der erwähnten Arbeit von Ore vor.

Da in der Voraussetzung $Gr(M(x)) \leqq \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu m_\nu$ auch Gleichheit vorkommen darf, so kann ein Irreduzibilitätskriterium folgendermaßen ab-

geleitet werden. Wenn man im obigen Satz $n = 1$ setzt, erhält man folgendes Polynom

$$f(x) = a\,g(x)^m + p^e\,M(x).$$

Die Gradzahl r eines beliebigen Faktors modulo p^{e+1} von $f(x)$ hat demnach die Form $r = \frac{\varkappa m}{e}$. Ist dann $(m, e) = 1$, so ergibt sich $r = j\,m$, $j \geqq 1$. Es sei nun

$$f(x) = a\,q^v\,g_k(x)^m + b\,p^e\,h_m(x)^k,$$

wo $Gr(g_k(x)) = k$ und $Gr(h_m(x)) = m$ ist und q und p verschiedene Primzahlen sind ($p \nmid a\,b$, $q \nmid a\,b$). Wenn die Gradzahlen jedes modulo p^{e+1} vorkommenden Faktors durch m teilbar sind, und die Gradzahlen jedes modulo q^{v+1} vorkommenden Faktors durch k teilbar sind, so muß für die Gradzahl r eines beliebigen Faktors modulo $p^{e+1}\,q^{v+1}$ gelten:

$$r = i\,\frac{m\,k}{(m, k)}, \quad i \geqq 1.$$

Da $Gr(f(x)) = m\,k$ ist, so folgt Irreduzibilität modulo $p^{e+1}\,q^{v+1}$ für $(m, k) = 1$. Aus Satz 1 ergibt sich also folgendes Irreduzibilitätskriterium:

Satz 2. *Es sei $f(x)$ ein Polynom der Form*

$$f(x) = a\,q^v\,g_k(x)^m + b\,p^e\,h_m(x)^k,$$

wo $Gr(g_k(x)) = k$, $Gr(h_m(x)) = m$ ist und p und q verschiedene Primzahlen sind. Es sei ferner R die Resultante von $g_k(x)$ und $h_m(x)$. Wenn dann $(m, e) = 1$, $(k, v) = 1$, $p \nmid a\,b\,R$, $q \nmid a\,b\,R$ und $(m, k) = 1$ ist, so ist $f(x)$ irreduzibel modulo $p^{e+1}\,q^{v+1}$ und das Polynom

$$F(x) = a\,q^v\,g_k(x)^m + b\,p^e\,h_m(x)^k + p^{e+1}\,q^{v+1}\,T(x)$$

mit $Gr(T(x)) \leqq m\,k$ also algebraisch irreduzibel.

Wenn ein Polynom

$$f(x) = g(x) \prod_{\nu=1}^{n} (x - a_\nu) + b$$

in zwei Faktoren $A_r(x)$ und $B(x)$ reduzibel ist, d. h.

$$g(x) \prod_{\nu=1}^{n} (x - a_\nu) + b = A_r(x)\,B(x),$$

so muß nach der Methode, die Runge für numerische Polynome ausgearbeitet hat, gelten

$$A_r(a_\nu) \mid b, \quad r = 1, 2, \ldots, n,$$

$$A_r(a_\varrho) \equiv A_r(a_\varkappa) \pmod{a_\varrho - a_\varkappa}$$

für alle ϱ und $\varkappa$ mit $\varrho \neq \varkappa$, $1 \leqq \varrho \leqq n$, $1 \leqq \varkappa \leqq n$. Sind diese Kongruenzen nur möglich, wenn $A_r(x)$ denselben Wert für alle a_ν annimmt, so folgt für den Fall, daß alle a_ν verschieden sind, $r \geqq n$. Man erhält demnach folgenden Satz.

Satz 3. *Es sei* $f(x)$ *ein Polynom der Form*

$$f(x) = g(x) \prod_{\nu=1}^{n} (x - a_\nu) + b$$

und die d_ν *seien für* $\nu = 1, 2, \ldots, n$ *Faktoren von* b, *die nicht alle gleich sind. Es seien auch alle* a_ν *verschieden. Wenn es dann keine Reihe* d_ν *mit* $d_\varrho \equiv d_\varkappa \pmod{a_\varrho - a_\varkappa}$ *für alle* $\varrho \neq \varkappa$, $1 \leqq \varrho \leqq n$, $1 \leqq \varkappa \leqq n$, *gibt, so kann* $f(x)$ *nur solche Faktoren enthalten, deren Gradzahlen* $\geqq n$ *sind. Ist* $Gr(g(x)) < n$, *so muß also* $f(x)$ *irreduzibel sein.*

Wenn V_1 und V_2 die Resultanten von $g(x) + a_1 N(x)$ und $A_r(x)$ bzw. $g(x) + a_2 N(x)$ und $A_r(x)$ sind, so folgt

$$V_1 \equiv V_2 \pmod{a_1 - a_2},$$

Diese Relation ist eine wesentliche Verallgemeinerung der im Beweis des obigen Satzes benutzten Beziehung $A_r(a_1) \equiv A_r(a_2) \pmod{a_1 - a_2}$ und wird im folgenden Anwendung finden.

Das Polynom $f(x)$ soll nun von der Form

$$f(x) = \prod_{\nu=1}^{n} g_\nu(x)^{m_\nu} + p^e M(x)$$

sein, wo p eine Primzahl und $M(x)$ mit jedem $g_\nu(x)$ modulo p teilerfremd ist. Es sei ferner $g_\nu(x)$ normiert, $Gr(g_\nu(x)) = k$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ und $Gr(M(x)) < k \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu$. Es ist also $f(x)$ normiert. Enthält nun $f(x)$ algebraisch einen Faktor $A_r(x)$ vom Grade r, so hat man

$$\prod_{\nu=1}^{n} g_\nu(x)^{m_\nu} + p^e M(x) = A_r(x) B(x).$$

Nach früher eingeführten Bezeichnungen (S. 321) gilt nun sogar

$$p^{k e} R_\nu = \prod_{\mu=1}^{k} A_r(\eta_\mu^{(\nu)}) \prod_{\mu=1}^{k} B(\eta_\mu^{(\nu)}),$$

wo also $R_\nu = \prod_{\mu=1}^{k} M(\eta_\mu^{(\nu)})$ ist. Wenn man $\prod_{\mu=1}^{k} A_r(\eta_\mu^{(\nu)}) = V_\nu$ setzt, so gilt folglich

$$V_\nu \mid p^{k e} R_\nu.$$

Als Folgerung einer früher gezeigten Relation (S. 321) gilt aber auch

$$p^{r e} \prod_{\lambda=1}^{r} M(\xi_\lambda) = \pm \prod_{\nu=1}^{n} V_\nu^{m_\nu}.$$

Wegen der Voraussetzungen für $f(x)$ sind alle obigen Resultanten ganze Zahlen, und da $M(x)$ mit jedem $g_\nu(x)$ modulo p teilerfremd sein soll, so folgt $p \nmid R_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, und auch $p \nmid \prod_{\lambda=1}^{r} M(\xi_\lambda)$. Wenn $p^{\alpha_\nu} \mid V_\nu$ und $p^{\alpha_\nu + 1} \nmid V_\nu$ ist, so ergibt sich also wie früher

$$r e = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu m_\nu.$$

Es soll nun angenommen werden, daß die a_ν für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ eine Reihe gleicher oder verschiedener ganzer Zahlen sind, und daß man identisch

$$g_\varrho(x) \equiv g_\varkappa(x) \pmod{a_\varrho - a_\varkappa}$$

hat für alle oder einige ϱ und $\varkappa$ aus dem Intervall $1 \leqq \varrho \leqq n$, $1 \leqq \varkappa \leqq n$ mit $\varrho \neq \varkappa$. Da $\eta_\mu^{(\nu)}$ für $\mu = 1, 2, \ldots, k$ die Wurzeln von $g_\nu(x)$ sind, so folgt

$$V_\varrho \equiv V_\varkappa \pmod{a_\varrho - a_\varkappa}.$$

Die abgeleiteten Eigenschaften für V_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ zeigen, daß, wenn $f(x)$ einen Faktor $A_r(x)$ enthält, so muß dem $A_r(x)$ eine Reihe d_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ mit folgenden Bedingungen entsprechen

$$d_\nu \mid p^{ke} R_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

$$d_\varrho \equiv d_\varkappa \pmod{a_\varrho - a_\varkappa}$$

für alle ϱ und $\varkappa$, für welche $g_\varrho(x) \equiv g_\varkappa(x) \pmod{a_\varrho - a_\varkappa}$ ist,

$$p^{\alpha_\nu} \mid d_\nu, \quad p^{\alpha_\nu + 1} \nmid d_\nu$$

und

$$re = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu m_\nu.$$

Es sei nun vorausgesetzt, daß es nur solche Reihen d_ν gibt, die unter sich gleiche Exponenten α_ν haben. Für die obige Reihe d_ν muß dann gelten

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \alpha$$

und man erhält

$$re = \alpha \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu.$$

Wenn das Polynom $f(x)$ einen Faktor $A_r(x)$ der Form

$$A_r(x) = Q(x)\, g_1(x) + p^v U(x)$$

enthält, wo $U(x)$ und $g_1(x)$ modulo p teilerfremd sind, so findet man

$$V_1 = \prod_{\mu=1}^{k} A_r(\eta_\mu^{(1)}) = p^{kv} \prod_{\mu=1}^{k} U(\eta_\mu^{(1)})$$

mit $p \nmid \prod_{\mu=1}^{k} U(\eta_\mu^{(1)})$. Hieraus ergibt sich dann $\alpha = kv$ und also

$$re = kv \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu.$$

Ist $g_1(x)$ modulo p irreduzibel, so muß $f(x)$, falls es reduzibel ist, wenigstens durch einen Faktor $A_r(x)$ von der genannten Form $Q(x)\, g_1(x) + p^v U(x)$ algebraisch teilbar sein. Das Newtonsche Polygon (mod p, $g_1(x)$) ist eine Gerade und nach den Untersuchungen von Ore wird abgeleitet

$$v = i \frac{e}{(m_1, e)}, \quad i \geqq 1.$$

Es ist demnach hier hinreichend, die Voraussetzung $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$ nur solchen Reihen d_ν aufzuerlegen, die α_1 mit der Eigenschaft $\frac{ke}{(m_1, e)} \mid \alpha_1$ haben. Für die Gradzahl r ist dann gezeigt

$$re = i \frac{ke \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu}{(m_1, e)},$$

und also

$$r = i \frac{k \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu}{(m_1, e)}.$$

Wenn $(m_1, e, k \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu) = 1$ ist, so erhält man sogar

$$r = jk \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu, \quad j \geqq 1.$$

Aus $Gr(f(x)) = k \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu$ folgt dann, daß $f(x)$ irreduzibel sein muß. Folgender Satz ist damit bewiesen:

Satz 4. *Es sei $f(x)$ ein normiertes Polynom der Form*

$$f(x) = \prod_{\nu=1}^{n} g_\nu(x)^{m_\nu} + p^e M(x),$$

in der p eine Primzahl, $e \geqq 1$ bedeutet und alle $g_\nu(x)$ normiert und von demselben Grad k sind. Die Resultante von $g_\nu(x)$ und $M(x)$ sei R_ν mit $p \nmid R_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Es seien ferner a_ν für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ verschiedene oder gleiche ganze Zahlen und identisch

$$g_\varrho(x) \equiv g_\varkappa(x) \pmod{a_\varrho - a_\varkappa}$$

für alle oder einige ϱ und $\varkappa$ mit $\varrho \neq \varkappa$, $1 \leqq \varrho \leqq n$, $1 \leqq \varkappa \leqq n$. Wenn $f(x)$ algebraisch reduzibel ist, so muß dann jedem Faktor von $f(x)$ eine Reihe d_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, mit folgenden Eigenschaften entsprechen:

$$d_\nu \mid p^{ke} R_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$
$$d_\varrho \equiv d_\varkappa \pmod{a_\varrho - a_\varkappa}$$

mit allen ϱ und $\varkappa$, für welche $g_\varrho(x) \equiv g_\varkappa(x) \pmod{a_\varrho - a_\varkappa}$ ist. Die Gradzahl r des betreffenden Faktors muß von den d_ν derart bestimmt sein, daß, wenn

$$p^{\alpha_\nu} \mid d_\nu, \quad p^{\alpha_\nu + 1} \nmid d_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

ist, $r = \frac{1}{e} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu m_\nu$ ist. Ist ferner $g_1(x)$ irreduzibel modulo p und zu den übrigen $g_\nu(x)$ inkongruent modulo p

$$(m_1, e, k \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu) = 1 \qquad \text{und} \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$$

für alle möglichen Reihen d_ν mit $\frac{ke}{(m_1, e)} \mid \alpha_1$, so ist $f(x)$ algebraisch irreduzibel.

Um ein einfaches Beispiel zu geben, wird für $M(x)$ ein konstanter Wert ± 1 eingeführt und $e = 1$ gesetzt. Wenn ferner $q_1(x) = g(x)$ und $g_\nu(x) = g(x) + a_\nu N_1(x)$, $\nu = 2, 3, \ldots, n$, gesetzt wird, so hat man

$$f(x) = g(x)^{m_1} \prod_{\nu=2}^{n} (g(x) + a_\nu N_\nu(x))^{m_\nu} \pm p$$

und $R_\nu = \pm 1$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Nach obigem Satz folgt dann folgendes Irreduzibilitätskriterium.

Satz 5. *Es sei $f(x)$ ein normiertes Polynom der Form*

$$f(x) = g(x)^{m_1} \prod_{\nu=2}^{n} (g(x) + a_\nu N_\nu(x))^{m_\nu} \pm p,$$

wo $g(x)$ normiert, vom Grade k, und modulo der Primzahl p irreduzibel ist. Es sei weiter s_ν Minimalexponent der Kongruenz $p^{s_\nu} \equiv \pm 1 \pmod{a_\nu}$, $\nu = 2, 3, \ldots, n$, mit positivem Vorzeichen nur, wenn das negative nicht möglich ist. Ist dann $s_\nu > k$ für alle $\nu = 2, 3, \ldots, n$, so ist $f(x)$ irreduzibel.

Nach Untersuchungen in meiner früher genannten Arbeit läßt sich folgendes ableiten:

Es sei

$$f(x) = g(x)^M + E\,M(x)\,g(x) - p^e b$$

mit $Gr(g(x)) = k$, $Gr(M(x)) < M k - k$ und $(p^e b)^s \equiv 1 \pmod{E}$. Für alle d mit $d \mid (p^e b)^k$, $d^{M^s} \equiv 1 \pmod{E}$, $p^\beta \mid d$, $p^{\beta+1} \nmid d$, $\beta \geqq 0$ wird $e \mid \beta$ vorausgesetzt. Wenn $f(x)$ dann einen Faktor $A(x)$ enthält und die Resultante von $g(x)$ und $A(x)$ gerade durch p^α, $\alpha \geqq 0$ teilbar ist, so muß e ein Teiler von α sein.

Dem Polynom $f(x)$ wird nun die Form

$$f(x) = \prod_{\nu=1}^{n} (g(x)^l + E\,a_\nu N_\nu(x))^{m_\nu} - p^e b$$

gegeben, wo $Gr(g(x)) = k$, $Gr(N_\nu(x)) < l k$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, $a_1 = 0$, $p \nmid b$ und $(p^e b)^s \equiv 1 \pmod{E}$. Für alle positiven oder negativen Faktoren d von $(p^e b)^k$ mit

$$d^{s l \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu} \equiv 1 \pmod{E},\ p^\beta \mid d,\ p^{\beta+1} \nmid d,\ \beta \geqq 0$$

soll $e \mid \beta$ gelten.

Man hat $f(x)$ auch von der Form

$$f(x) = g(x)^{l \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu} + E\,M(x)\,g(x) - p^e b$$

und daraus folgt dann, daß, wenn $f(x)$ einen Faktor $A_r(x)$ enthält, so muß für die Resultante V_1' von $g(x)$ und $A_r(x)$ gelten

$$p^{ie} \mid V_1',\ p^{ie+1} \nmid V_1',\ i \geqq 0.$$

Es ist dann sogar möglich, $A_r(x)$ so zu wählen, daß $i \geqq 1$ wird.

Für die Resultanten V_ν von $g(x)^l + E a_\nu N_\nu(x)$ und $A(x)$ gilt wegen $a_1 = 0$

$$V_\nu \equiv V_1 \pmod{E a_\nu}, \quad \nu = 2, 3, \ldots, n.$$

Die Resultanten von jedem Polynom $g(x)^l + a_\nu N_\nu(x)$ und $p^e b$ sind $(p^e b)^{lk}$. Für alle V_ν ergibt sich dann

$$V_\nu \mid (p^e b)^{lk}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Es wird angenommen, daß alle positiven oder negativen Faktoren u_1 und u_2 von $(p^e b)^{lk}$ mit der Eigenschaft $u_1 \equiv u_2 \pmod{E a_\varrho}$ für wenigstens ein ϱ aus dem Intervall $2 \leqq \varrho \leqq n$ gerade durch dieselbe Potenz von p teilbar sind. Zwischen V_1 und V_1' besteht die Relation $V_1 = V_1'^l$. Aus $p^{ie} \mid V_1'$ und $p^{ie+1} \nmid V_1'$ folgt dann

$$p^{ile} \mid V_\nu, \quad p^{ile+1} \nmid V_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \quad i \geqq 1.$$

Nach früher angegebenen Beziehungen (S. 324) gilt

$$p^{re} b^r = \pm \prod_{\nu=1}^{n} V_\nu^{m_\nu},$$

woraus folgt

$$re = ile \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu,$$

und demnach

$$r = il \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu, \quad i \geqq 1.$$

Ist $g(x) = x$, so ist $Gr(f(x)) = l \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu$ und $f(x)$ dann irreduzibel. Folgender Satz ist damit bewiesen:

Satz 6. *Es sei $f(x)$ ein normiertes Polynom der Form*

$$f(x) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(g(x)^l + E a_\nu N_\nu(x)\right)^{m_\nu} - p^e b$$

mit $Gr(g(x)) = k$, $Gr(N_\nu(x)) < lk$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ $a_1 = 0$, $p \nmid b$ und $(p^e b)^s \equiv 1 \pmod{E}$. Für alle positiven und negativen Faktoren d von $(p^e b)^k$ mit $d^{sl\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu} \equiv 1 \pmod{E}$, $p^\beta \mid d$, $p^{\beta+1} \nmid d$ $(\beta \geqq 0)$ soll $e \mid \beta$ gelten. Alle positiven oder negativen Faktoren u_1 und u_2 von $(p^e b)^{lk}$ mit der Eigenschaft $u_1 \equiv u_2 \pmod{E a_\varrho}$ für wenigstens ein ϱ aus dem Intervall $2 \leqq \varrho \leqq n$ sollen gerade durch dieselbe Potenz von p teilbar sein. Dann muß $f(x)$ wenigstens einen Faktor enthalten, dessen Grad r ein Vielfaches von $l \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu$ ist, d. h.

$$r = il \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu, \quad i \geqq 1.$$

Für $g(x) = x$ *folgt demnach, daß das Polynom*

$$f(x) = \prod_{\nu=1}^{n} (x^l + E a_\nu N_\nu(x))^{m_\nu} - p^e b$$

irreduzibel ist.

Bemerkung. Wenn $N_\varrho(x) = N_\varkappa(x)$ ist für wenigstens ein Zahlpaar verschiedener ϱ und $\varkappa$, so können die Faktoren u_1 und u_2 im obigen Satz mit ihren vorgeschriebenen Eigenschaften folgendermaßen durch weitere Relationen ersetzt werden:

Es sei u_ν für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ eine Reihe, wo $u_\nu \mid (p^e b)^{lk}$, $u_\nu \equiv u_1 \pmod{E a_\nu}$ und $u_\varrho \equiv u_\varkappa \pmod{E a_\varrho - E a_\varkappa}$ ist mit allen ϱ und $\varkappa$ für welche $N_\varrho(x) = N_\varkappa(x)$ ist. Für jede solche Reihe soll dann vorausgesetzt werden, daß die zugehörigen u_ν gerade durch dieselbe Potenz von p teilbar sind.

Nach Untersuchungen in meiner früher erwähnten Arbeit folgt aus obigem Satz für $b = \pm 1$ beispielsweise folgendes Irreduzibilitätskriterium.

Satz 7. *Es seien* te *und* s_ν *Minimalexponenten der Kongruenzen* $p^{te} \equiv 1 \pmod{E}$ *und* $p^{s_\nu} \equiv \pm 1 \pmod{E a_\nu}$, *mit positivem Vorzeichen nur dann, wenn das negative nicht möglich ist und* $s_\nu > le$, $\nu = 2, 3, \ldots, n$. *Wenn dann erstens* $(2l \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu, e) = 1$ *oder zweitens* $2 \mid t$ *und* $(l \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu, e) = 1$ *ist, so ist das normierte Polynom*

$$f(x) = x^{l m_1} \prod_{\nu=2}^{n} (x^l + E a_\nu N_\nu(x))^{m_\nu} \pm p^e$$

in jedem der beiden Fälle 1 *und* 2 *mit beiden Vorzeichen von* p^e *irreduzibel.*

(Eingegangen am 24. September 1935.)

Eine Bedingung für vollständige Reduzibilität von Darstellungen gewöhnlicher und infinitesimaler Gruppen.

Von

Richard Brauer in Toronto (Canada).

Die Untersuchung der Frage, ob alle Darstellungen einer gegebenen Gruppe $\mathfrak{G}$ durch lineare Transformationen vollständig reduzibel sind, führt häufig auf Schwierigkeiten. Das Ziel der folgenden Arbeit ist es, die Behandlung dieser Frage etwas zu erleichtern.

Es ist bekannt, daß es für den Nachweis der vollen Reduzibilität aller Darstellungen von $\mathfrak{G}$ genügt, die vollständige Reduzibilität der Darstellungen $\mathfrak{H}$ mit nur zwei irreduziblen Bestandteilen

$$\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & 0 \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{pmatrix}, \qquad (\mathfrak{A}, \mathfrak{D} \text{ irreduzibel}) \tag{1}$$

zu beweisen. Wir beschränken uns im folgenden auf Darstellungen mit von Null verschiedener Determinante. Im § 1 wird gezeigt, daß es genügt, den Fall zu betrachten, daß $\mathfrak{D}$ in (1) die Hauptdarstellung $\mathfrak{E}$ ist; dies ist die Darstellung ersten Grades, bei der jedem Element von $\mathfrak{G}$ die Zahl 1 entspricht. Sind alle derartigen $\mathfrak{H}$ vollständig reduzibel, so ist jede Darstellung von $\mathfrak{G}$ vollständig reduzibel. Die Methode ergibt auch im Fall, daß nicht alle Darstellungen von $\mathfrak{G}$ vollständig reduzibel sind, hinreichende Bedingungen für die volle Reduzibilität einer gegebenen Darstellung von $\mathfrak{G}$.

Im § 2 werden die Ergebnisse auf den Fall der Darstellungen infinitesimaler Gruppen übertragen.

Vor kurzem haben Casimir und van der Waerden[1]) einen Beweis für die volle Reduzibilität der Darstellungen der halbeinfachen infinitesimalen Gruppen gegeben, der ausschließlich im „infinitesimalen" operiert. Unter Verwendung des Resultats von § 2 kann man einen Beweis für diesen Satz mit Hilfe desselben Grundgedankens führen, der keine Fallunterscheidung erfordert und sich fast unmittelbar aus der Grundeigenschaft des Casimiroperators und bekannten Formeln aus der Strukturtheorie halbeinfacher infinitesimaler Gruppen ergibt. Dies wird im § 3 durchgeführt.

[1]) Math. Annalen 111 (1935), S. 1.

§ 1.

Es sei $\mathfrak{G}$ eine Halbgruppe, d. h. ein System von Elementen, für die eine assoziative Multiplikation definiert ist. Es sei $\mathfrak{R}$ eine Darstellung von $\mathfrak{G}$ durch Matrizen mit Koeffizienten aus einem fest gewählten algebraisch abgeschlossenen Körper K. Jede Darstellung $\mathfrak{R}$ ist einer Darstellung

$$\widetilde{\mathfrak{R}} = \begin{pmatrix} \mathfrak{R}_1 & & & \\ \mathfrak{R}_{21} & \mathfrak{R}_2 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \mathfrak{R}_{k1} & \mathfrak{R}_{k2} & \cdots & \mathfrak{R}_k \end{pmatrix} \tag{2}$$

in K ähnlich, wo $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_k$ irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{G}$, die irreduziblen Bestandteile von $\mathfrak{R}$, sind. Über der Hauptdiagonale in (2) sind Nullen zu ergänzen. Bekanntlich sind $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_k$ abgesehen von Ähnlichkeitstransformation und abgesehen von der Reihenfolge eindeutig bestimmt. Man ist aber im allgemeinen nicht in der Lage, $\widetilde{\mathfrak{R}}$ so zu wählen, daß ein beliebiger irreduzibler Bestandteil in (2) an Stelle von $\mathfrak{R}_1$ steht. Diejenigen irreduziblen Bestandteile von $\mathfrak{R}$, die in einem geeigneten $\widetilde{\mathfrak{R}}$ den Platz links oben einnehmen können, sollen als *Anfangsbestandteile* von $\mathfrak{R}$ bezeichnet werden. Kann $\widetilde{\mathfrak{R}}$ so gewählt werden, daß

$$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2 = \ldots = \mathfrak{R}_l; \quad \mathfrak{R}_{\varkappa\lambda} = 0 \quad \text{für} \quad \lambda < \varkappa \leqq l$$

ist, so soll $\mathfrak{R}_1$ ein (mindestens) *l-facher Anfangsbestandteil* von $\mathfrak{R}$ heißen.

Sind $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ zwei Darstellungen von $\mathfrak{G}$ der Grade m und n mit Koeffizienten aus demselben Körper

$$\mathfrak{R}: \quad g \to R_g; \qquad \mathfrak{S}: \quad g \to S_g \qquad (g \text{ in } \mathfrak{G}),$$

so heißen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ *verkettet*[2]), wenn es eine Matrix $T \neq 0$ mit m Zeilen und n Spalten gibt, für die

$$R_g T = T S_g \qquad \text{für alle } g \text{ in } \mathfrak{G} \tag{3}$$

gilt. Gibt es q linear unabhängige Matrizen $T_1, T_2, \ldots, T_q$, die an Stelle von T die Gleichung (3) befriedigen, so heißen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ (mindestens) *q-fach verkettet*. Dieser Grad der Verkettung wird nicht geändert, wenn man $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{S}$ durch ähnliche Darstellungen ersetzt.

Wir beschränken uns im folgenden auf Darstellungen mit von Null verschiedener Determinante. Entspricht bei der Darstellung $\mathfrak{R}$ wieder dem Element g in $\mathfrak{G}$ die Matrix R_g, so ergibt die Zuordnung der kontragredienten Matrix $R_g'^{-1}$ zu g eine neue Darstellung, *die kontragrediente Darstellung* $\mathfrak{R}^*$. Ist $\mathfrak{S}$ eine weitere Darstellung von $\mathfrak{G}$, bei der g durch S_g dargestellt wird, so erhält man durch Zuordnung des Kroneckerschen

[2]) Vgl. I. Schur, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissenschaften 1905, S. 406.

Produktes $R_g \times S_g$ zu g eine Darstellung $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$. Es sind $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S} \times \mathfrak{R}$ ähnlich, $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S} \sim \mathfrak{S} \times \mathfrak{R}$.

Hilfssatz: *Dann und nur dann besitzt das Produkt $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$ zweier Darstellungen die Hauptdarstellung $\mathfrak{E}$ als l-fachen Anfangsbestandteil, wenn die kontragrediente Darstellung $\mathfrak{R}^*$ von $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{S}$ l-fach verkettet ist. Ist $\mathfrak{R}$ irreduzibel, so ist dann und nur dann $l > 0$, wenn $\mathfrak{R}^*$ Anfangsbestandteil von $\mathfrak{S}$ ist.*

Beweis: Die Tatsache, daß eine Darstellung $\mathfrak{Z}$ die Hauptdarstellung $\mathfrak{E}$ als l-fachen Anfangsbestandteil besitzt, ist gleichbedeutend damit, daß l linear unabhängige lineare Invarianten für $\mathfrak{Z}$ existieren. Man sieht dies unmittelbar, wenn man die l Invarianten als l erste Koordinaten wählt.

Es sei nun

$$x' = R_g(x); \qquad y' = S_g(y), \tag{4}$$

wo $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ und $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ Reihen von Unbestimmten sind. Bezeichnet man die Reihe der mn Produkte $x_\mu \cdot y_\nu$ in einer ein- für allemal festen Anordnung mit $x \times y$, so gilt

$$x' \times y' = (R_g \times S_g) \quad (x \times y).$$

Die Existenz einer linearen Invariante bei $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$ ist dann gleichbedeutend mit der Existenz einer Bilinearform $\sum_{\varkappa=1}^{m} \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\varkappa\lambda}\, x_\varkappa\, y_\lambda$, die für alle g in $\mathfrak{G}$ bei (4) invariant bleibt. Ist T die Matrix $(a_{\varkappa\lambda})$, so ist $R_g' T S_g = T$ die Bedingung für Invarianz, d. h.

$$R_g'^{-1} T = T S_g.$$

Die Existenz von l linear unabhängigen Invarianten von $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$ hat die Existenz von l linear unabhängigen Matrizen T zur Folge, so daß $\mathfrak{R}^*$ und $\mathfrak{S}$ l-fach verkettet sind. Alle diese Schlüsse sind umkehrbar.

Ist $l > 0$ und $\mathfrak{R}$ irreduzibel, so zeigt der Beweis des Schurschen Lemmas[2]), daß $\mathfrak{R}^*$ Anfangsbestandteil von $\mathfrak{S}$ ist, und daß in diesem letzteren Fall auch umgekehrt $\mathfrak{R}^*$ und $\mathfrak{S}$ verkettet sind.

Wir nehmen jetzt an, daß alle Darstellungen von $\mathfrak{G}$ von der Form

$$g \to H_g = \begin{pmatrix} A_g & 0 \\ C_g & 1 \end{pmatrix}, \quad A_g \text{ irreduzibel}, \tag{5}$$

vollständig reduzibel sind; der zweite Bestandteil von H_g soll also $\mathfrak{E}$ sein. Transformiert M alle H_g in vollständig reduzible Form und ist

$$M = \begin{pmatrix} P & Q \\ U & V \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_g & 0 \\ C_g & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & Q \\ U & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & Q \\ U & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so ergibt sich

$$A_g P = P A_g, \qquad A_g Q = Q,$$
$$C_g P + U = U A_g, \qquad C_g Q + V = V.$$

Nach dem Schurschen Lemma ist $Q = 0$, außer wenn A_g selbst die Hauptdarstellung ist, und Q eine Matrix ersten Grades ist. Ist $Q = 0$, so ist P ein von 0 verschiedenes Multiplum der Einheitsmatrix E; man darf annehmen $P = E$. Dann ist $F = U$ eine Lösung von

$$F A_g - F = C_g \qquad \text{für alle } g \text{ in } \mathfrak{G}. \tag{6}$$

Ist $Q \neq 0$, so hat man $C_g = 0$; man kann $F = 0$ setzen. Wir ersetzen jetzt M durch die Matrix

$$M_0 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ F & 1 \end{pmatrix},$$

wo E die Einheitsmatrix des Grades von A_g bedeutet. Ähnlichkeitstransformation von H_g mit M_0 kommt auf Addition der links mit $-F$ multiplizierten ersten Zeile von H_g zur zweiten Zeile und gleichzeitige Addition der rechts mit F multiplizierten zweiten Spalte zur ersten Spalte heraus. Wegen (6) transformiert M_0 dann H_g in vollständig reduzible Form.

Wir betrachten jetzt eine Darstellung $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$, die $\mathfrak{E}$ als Bestandteil besitzt. Wir wollen zeigen, daß, wenn alle Darstellungen der Form (5) von $\mathfrak{G}$ vollständig reduzibel sind, $\mathfrak{E}$ ein *Anfangs*bestandteil von $\mathfrak{R}$ ist.

Es sei etwa in (2) $\mathfrak{R}_\varkappa = \mathfrak{E}$ und $\varkappa > 1$. Man setze $\mathfrak{R}_{\varkappa-1} = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{R}_{\varkappa,\varkappa-1} = \mathfrak{C}$ und bestimme dann F aus (6). Addition der links mit $-F$ multiplizierten $(\varkappa-1)$-ten Zeile zur $\varkappa$-ten Zeile in (2) und gleichzeitige Addition der rechts mit F multiplizierten $\varkappa$-ten Spalte zur $(\varkappa-1)$-ten Spalte kommt auf eine Ähnlichkeitstransformation von $\widetilde{\mathfrak{R}}$ heraus. Die Form (2) von $\widetilde{\mathfrak{R}}$ wird dabei nicht zerstört, und die irreduziblen Bestandteile bleiben alle ungeändert. An Stelle von $\mathfrak{R}_{\varkappa,\varkappa-1}$ tritt aber 0. Danach vertauschen wir die $(\varkappa-1)$-te Zeile mit der $\varkappa$-ten Zeile, die $(\varkappa-1)$-te Spalte mit der $\varkappa$-ten Spalte. Dies ist wieder eine Ähnlichkeitstransformation. Die so entstehende Darstellung ist wieder von der Form (2). Doch steht jetzt der Bestandteil $\mathfrak{E}$ an der $(\varkappa-1)$-ten Stelle. Durch Wiederholung des Verfahrens kann man schließlich $\mathfrak{E}$ an die erste Stelle bringen. Genau so sieht man, daß unter unserer Voraussetzung über die Darstellungen (5) jede Darstellung $\mathfrak{R}$, die $\mathfrak{E}$ zweimal als Bestandteil enthält, $\mathfrak{E}$ als zweifachen *Anfangs*bestandteil besitzt.

Wir betrachten jetzt eine Darstellung $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$, die aus zwei irreduziblen Bestandteilen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ zusammengesetzt ist

$$g \to S_g = \begin{pmatrix} U_g & 0 \\ Z_g & V_g \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Dann gilt für $\mathfrak{S} \times \mathfrak{V}^* \sim \mathfrak{V}^* \times \mathfrak{S}$

$$g \to S_g \times V_g'^{-1} = \begin{pmatrix} U_g \times V_g'^{-1} & 0 \\ Z_g \times V_g'^{-1} & V_g \times V_g'^{-1} \end{pmatrix}.$$

Aus dem Hilfssatz folgt, daß $\mathfrak{E}$ ein Bestandteil von $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}^*$ und daher auch von $\mathfrak{S} \times \mathfrak{B}^*$ ist. Sind $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$ ähnlich, so tritt $\mathfrak{E}$ sogar zweimal in $\mathfrak{S} \times \mathfrak{B}^*$ auf.

Unter unserer Annahme, daß alle Darstellungen (5) vollständig reduzibel sind, folgt dann, daß $\mathfrak{E}$ ein Anfangsbestandteil von $\mathfrak{S} \times \mathfrak{B}^*$ ist, im Falle $\mathfrak{U} \sim \mathfrak{B}$ sogar ein zweifacher Anfangsbestandteil. Aus dem Hilfssatz ergibt sich dann die Existenz einer Matrix $T \neq 0$, die $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{S}$ verkettet

$$V_g T = T S_g \qquad \text{für alle } g \text{ in } \mathfrak{G}, \tag{8}$$

im Falle $\mathfrak{U} \sim \mathfrak{B}$ gibt es zwei linear unabhängige derartige Matrizen T. Faßt man die Spalten in T entsprechend wie in S_g in (7) zusammen, $T = (P, Q)$, so folgt aus (7) und (8)

$$V_g P = P U_g + Q Z_g, \quad V_g Q = Q V_g. \tag{9}$$

Nach dem Schurschen Lemma ist daher Q ein Vielfaches qE der Einheitsmatrix.

Erster Fall: $q \neq 0$. Man darf annehmen $q = 1$. Addiert man in (7) die links mit P multiplizierte erste Zeile zur zweiten und die rechts mit $-P$ multiplizierte Spalte zur zweiten, so tritt nach (9) 0 an Stelle von Z_g. Daher ist $\mathfrak{S}$ vollständig reduzibel.

Zweiter Fall: $q = 0$. Dann ist $P \neq 0$. Aus (9) folgt nach dem Schurschen Lemma, daß $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$ ähnlich sind; die allgemeinste $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{S}$ verkettende Matrix mit $q = 0$ ist $(cP, 0)$, wo c eine beliebige Zahl ist. Nun gibt es im Falle $\mathfrak{U} \sim \mathfrak{B}$ zwei linear unabhängige $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{S}$ verkettende Matrizen T. Unter den eben konstruierten Matrizen T mit $q = 0$ kommt nur eine linear unabhängige vor. Daher muß es T mit $q \neq 0$ geben. Man kommt auf den ersten Fall.

Alle Darstellungen $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$ mit nur zwei irreduziblen Bestandteilen sind also vollständig reduzibel. Daraus folgt bekanntlich[3]), daß alle Darstellungen von $\mathfrak{G}$ vollständig reduzibel sind.

---

[3]) Im Fall einer vollständig reduziblen Darstellung $\begin{pmatrix} \mathfrak{A} & 0 \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{pmatrix}$, ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$ irreduzibel) kann man die Darstellung durch Ähnlichkeitstransformation mit einer Matrix $\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ F & E_2 \end{pmatrix}$ in vollständig reduzible Form bringen, wo E_1 und E_2 die Einheitsmatrizen der betreffenden Grade sind. Dies ergibt sich entweder direkt aus dem Schurschen Hilfssatz ähnlich wie oben im Fall $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$ oder in unserem Falle auch aus dem vorangehenden Beweis. Durch Ähnlichkeitstransformationen der Gestalt: Addition der mit einer geeigneten Matrix F links multiplizierten $\varkappa$-ten Zeile zur λ-ten und gleichzeitige Addition der rechts mit $-F$ multiplizierten λ-ten Spalte zur $\varkappa$-ten Spalte, ($\varkappa < \lambda$) kann man dann in (2) sukzessive von oben anfangend alle $\mathfrak{R}_{\lambda\varkappa}$ zu 0 machen.

Satz 1. *Sind alle Darstellungen der Form*

$$g \to \begin{pmatrix} A_g & 0 \\ C_g & 1 \end{pmatrix} \qquad (A_g \text{ irreduzibel})$$

einer gegebenen Halbgruppe $\mathfrak{G}$ *vollständig reduzibel, so sind alle Darstellungen von* $\mathfrak{G}$ *vollständig reduzibel.*

Dasselbe Verfahren liefert

Satz 2. *Eine hinreichende Bedingung für die volle Reduzibilität einer Darstellung*

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} \mathfrak{R}_1 & & & \\ \mathfrak{R}_2, & \mathfrak{R}_2 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \mathfrak{R}_{k1} & \mathfrak{R}_{k2} & \cdots & \mathfrak{R}_k \end{pmatrix} \qquad (, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_k \text{ irreduzibel})$$

einer Halbgruppe $\mathfrak{G}$ *ist, daß alle Darstellungen von* $\mathfrak{G}$ *von der Form*

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{A} & 0 \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{E} \end{pmatrix}$$

vollständig reduzibel sind, wo $\mathfrak{A}$ *ein beliebiger irreduzibler Bestandteil von* $\mathfrak{R}_\varkappa \times \mathfrak{R}_\lambda^*$, $\varkappa < \lambda$ *ist.*

§ 2.

Wir betrachten jetzt eine infinitesimale Gruppe $\mathfrak{g}$. Darunter versteht man einen Vektorraum $\mathfrak{g}$, in dem ein Produkt $[a, b]$ für je zwei Vektoren aus $\mathfrak{g}$ definiert ist, $[a, b]$ soll selbst ein Element von $\mathfrak{g}$ sein und es sollen die Bedingungen gelten

$$\lambda\,[a, b] = [\lambda\, a, b] \quad \text{für skalares } \lambda; \quad [a, b] = -\,[b, a];$$
$$[a, b + c] = [a, b] + [a, c];$$
$$\big[a; [b, c]\big] + \big[b, [c, a]\big] + \big[c, [a, b]\big] = 0.$$

Eine Darstellung $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{g}$ vom Grade n liegt vor, wenn jedem g in $\mathfrak{g}$ eine Matrix R_g vom Grade n mit Koeffizienten in K zugeordet ist, derart, daß für alle g, h in $\mathfrak{g}$ und alle λ in K gilt

$$R_{\lambda g} = \lambda\, R_g, \quad R_{g+h} = R_g + R_h; \quad R_{[g,h]} = R_g R_h - R_h R_g.$$

Wir lassen hier auch zu, daß die Determinanten der R_g verschwinden.

Die Begriffe: ähnliche Darstellungen, Anfangsbestandteil, verkettete Darstellungen, vollreduzible Darstellung bedürfen keiner Erklärung.

Die *Hauptdarstellung* $\mathfrak{E}$ ist hier dadurch definiert, daß jedem g in $\mathfrak{g}$ die Zahl 0 zugeordnet ist. Ist $g \to R_g$ eine Darstellung $\mathfrak{R}$, so erhält man in der Form $g \to -\,R_g'$[4]) eine zweite Darstellung $\mathfrak{R}^*$, die *kontragrediente*

[4]) Es bedeutet R_g' die transponierte Matrix zu R_g.

Darstellung. Sind $\mathfrak{R}$: $g \to R_g$ und $\mathfrak{S}$: $g \to S_g$ zwei Darstellungen der Grade m bzw. n und sind E_m bzw. E_n die Einheitsmatrizen dieser Grade, so liefert

$$g \to R_g \times E_n + E_m \times S_g \tag{10}$$

eine Darstellung vom Grad mn, die als das *direkte Produkt* $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$ bezeichnet wird. Es ist $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S} \sim \mathfrak{S} \times \mathfrak{R}$.

Der Hilfssatz aus § 1 *gilt dann auch in unserem Fall.* Man sieht dies folgendermaßen ein: Es sei

$$z' = (R_g \times E_n + E_m \times S_g)(z). \tag{11}$$

Die Vielfachheit von $\mathfrak{E}$, $(g \to 0)$, als Anfangsbestandteil von $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$ ist offenbar gleich der Anzahl der linear unabhängigen Linearformen $A(z) = \sum_{\varkappa=1}^{mn} a_\varkappa z_\varkappa$, für die für alle g in $\mathfrak{g}$ gilt: $A(z') = \sum a_\varkappa z' = 0$. Sind $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ und $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ Reihen von unabhängigen Unbestimmten, und setzt man wie in (4)

$$x' = R_g(x), \quad y' = S_g(y), \tag{12}$$

so ist (11) erfüllt, wenn man

$$z = x \times y, \quad u = x' \times y, \quad v = x \times y', \quad z' = u + v \tag{13}$$

setzt. Da diese speziellen mn Größen z linear unabhängig sind, genügt es solche spezielle Größenreihen z zu betrachten. Verschwindet eine Linearform A für die zugehörigen z', so verschwindet sie auch für die zu beliebigen z gehörigen z'.

Für spezielle z geht $A(z)$ in eine Bilinearform $\sum a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa y_\lambda$ über, die zugehörige Matrix sei T. Dann ist nach (13)

$$A(u) = \sum a_{\varkappa\lambda} x'_\varkappa y_\lambda, \quad A(v) = \sum a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa y'_\lambda.$$

Aus (12) folgt dann, daß $A(u)$ und $A(v)$ Bilinearformen in x, y mit den Matrizen $R'_g T$ bzw. $T S_g$ sind. Die Bedingung $A(z') = 0$ oder $A(u) + A(v) = 0$ ist daher mit

$$-R'_g T = T S_g$$

identisch. Die Anzahl der linear unabhängigen Linearformen $A(z)$ mit $A(z') = 0$ ist also gleich dem Grad der Verkettung von $\mathfrak{R}^*$ mit $\mathfrak{T}$. Dies liefert die erste Hälfte des Hilfssatzes in § 1. Die zweite Hälfte ergibt sich dann unmittelbar aus dem Schurschen Lemma wie in § 1.

Jetzt kann man auch die weiteren Überlegungen aus § 1 übertragen. Wir nehmen an, daß alle Darstellungen

$$\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & 0 \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{E} \end{pmatrix}$$

einer infinitesimalen Gruppe $\mathfrak{g}$ vollständig reduzibel sind. Dann kann man $\mathfrak{H}$ wieder durch eine Transformation der Gestalt $\begin{pmatrix} E & 0 \\ F & 1 \end{pmatrix}$ in vollständig reduzible Gestalt bringen (vgl. [3]).

Es folgt dann, daß man in einer beliebigen Darstellung $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{g}$ die etwa auftretenden Bestandteile $\mathfrak{E}$ immer als Anfangsbestandteile nehmen kann. Ist

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} \mathfrak{U} & 0 \\ \mathfrak{Z} & \mathfrak{V} \end{pmatrix}, \quad (\mathfrak{U}, \mathfrak{V} \text{ irreduzibel}),$$

eine Darstellung, so enthält $\mathfrak{V}^* \times \mathfrak{S}$ den Bestandteil $\mathfrak{E}$ nach dem Hilfssatz, im Fall $\mathfrak{U} \sim \mathfrak{V}$ sogar zweifach. Dann folgt aber aus dem Hilfssatz, daß $\mathfrak{V}$ mit $\mathfrak{S}$ einfach, bzw. zweifach verkettet ist. Wie in § 1 ergibt sich daraus die volle Reduzibilität von $\mathfrak{S}$ und dann auch von jeder anderen Darstellung von $\mathfrak{g}$.

Satz 3. *Alle Darstellungen einer infinitesimalen Gruppe* $\mathfrak{g}$ *sind voll reduzibel, falls alle Darstellungen der Form*

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{A} & 0 \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{E} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A} \text{ irreduzibel}, \ \mathfrak{E} \text{ die Hauptdarstellung } g \to 0 \tag{14}$$

voll reduzibel sind.

Auch die Übertragung von Satz 2 ist ohne Schwierigkeit möglich.

§ 3.

Es sei jetzt K der Körper der komplexen Zahlen. Unser Ziel ist:

Satz 4 [5]). *Alle Darstellungen einer halbeinfachen infinitesimalen Gruppe* $\mathfrak{g}$ *sind voll reduzibel.*

Beweis [6]). Es sei $e_1, e_2, \ldots, e_r$ eine Basis von $\mathfrak{g}$, also

$$g = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \ldots + \mu_r e_r$$

---

[5]) Der erste Beweis dieses Satzes stammt von H. Weyl, Math. Zeitschr. 24 (1925), S. 377. Dabei wird die Hurwitzsche Integrationsmethode verwendet, die schon vorher von I. Schur im Fall der Darstellungen der Drehungsgruppe angewendet worden war (Sitzungsberichte der Preuß. Akademie 1924, S. 338). Einen nur infinitesimale Hilfsmittel verwendenden Beweis gaben H. Casimir und B. L. van der Waerden, a. a. O. [1]).

[6]) Für die im folgenden verwendeten Tatsachen aus der Theorie der halbeinfachen Gruppen vgl. man die Thèse von E. Cartan (Paris 1894) oder H. Weyl, Math. Zeitschr. 24 (1925), S. 328. Ich zitiere die letztere Arbeit im folgenden mit W.

das allgemeine Element von $\mathfrak{g}$. Es sei G die g in der adjungierten Darstellung von $\mathfrak{g}$ entsprechende Matrix. Die Spur von G^2 ist dann eine quadratische Form φ in den Parametern $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$

$$\varphi = \text{Spur}\,(G^2) = \sum a_{ik}\mu_i\mu_k. \tag{15}$$

Nach einem fundamentalen Resultat von E. Cartan ist φ nicht entartet.

In einer Darstellung $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{g}$ sei J_i die zu e_i zugeordnete Matrix. Ist (α_{ik}) die zu (a_{ik}) inverse Matrix, so ist nach H. Casimir[7]) die Matrix

$$V_{\mathfrak{R}} = \sum \alpha_{ik} J_i J_k \tag{16}$$

mit allen Elementen von $\mathfrak{R}$ vertauschbar.

Es genügt nun, die volle Reduzibilität für Darstellungen der Form (14) zu beweisen. Den Fall $\mathfrak{A} = \mathfrak{E}$ kann man dabei außer Acht lassen; denn wäre in diesem Fall $\mathfrak{C} \neq 0$, so würden die Matrizen der Darstellung (14) eine Abelsche Gruppe vom Rang 1 bilden; eine derartige Darstellung kann es aber im Falle einer halbeinfachen Gruppe nicht geben.

Im Fall einer Gruppe der Form (14) hat die Casimir-Matrix (16) offenbar die Gestalt

$$V_{\mathfrak{R}} = \begin{pmatrix} V_{\mathfrak{A}} & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

wo $V_{\mathfrak{A}}$ die zu $\mathfrak{A}$ gehörige Casimir-Matrix ist. Wir werden nun zeigen

Hilfssatz: Im Fall einer irreduziblen Darstellung $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{E}$ ist die Casimir-Matrix $V_{\mathfrak{A}}$ von Null verschieden.

Dabei ist übrigens nach dem Schurschen Hilfssatz $V_{\mathfrak{A}}$ ein skalares Multiplum der Einheitsmatrix. Aus der Vertauschbarkeit von (17) mit allen Elementen von (14) ergibt sich in bekannter Weise die volle Reduzibilität von (14) und damit der Beweis von Satz 4.

Beweis des Hilfssatzes: Die ersten l Basiselemente $e_1 = h_1$, $e_2 = h_2, \ldots, e_l = h_l$ in $\mathfrak{g}$ seien jetzt so gewählt, daß sie die Basis einer maximalen auflösbaren Untergruppe $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$ bilden. Ist

$$h = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \ldots + \lambda_l h_l$$

das allgemeine Element von $\mathfrak{h}$ und H die in der adjungierten Darstellung entsprechende Matrix, so hat H eine l-fache charakteristische Wurzel 0. Die übrigen $r - l$ charakteristischen Wurzeln sind untereinander verschiedene lineare Formen in $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$, die „*Wurzeln*" von $\mathfrak{g}$. Bei geeigneter Wahl der Basiselemente haben sie reelle Koeffizienten. Mit einer Linearform α kommt auch $-\alpha$ unter den Wurzeln vor.

---

[7]) Proc. Kon. Acad. Amsterdam **34** (1931), S. 144.

Man kann dann jeder Wurzel α ein Element e_α von $\mathfrak{g}$ so zuordnen, daß diese $r - l$ Elemente zusammen mit $h_1, h_2, \ldots, h_l$ eine Basis von $\mathfrak{g}$ bilden, daß also das allgemeine Element g von $\mathfrak{g}$ in der Form

$$g = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \ldots + \lambda_l h_l + \sum_\alpha \tau_\alpha e_\alpha$$

geschrieben werden kann, und daß ferner bei dieser Wahl der Parameter die Form φ in (15) die Gestalt annimmt

$$\varphi = Q(\lambda) - \sum_\alpha \tau_\alpha \tau_{-\alpha}\,^{8}). \tag{18}$$

Für $\tau_\alpha = 0$ für alle α wird dabei $\varphi = Q(\lambda)$ die Summe aller Quadrate von charakteristischen Wurzeln von H, also eine reelle positiv-definite quadratische Form in den λ_i, die man ohne Einschränkung in der Gestalt

$$Q(\lambda) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_l^2 \tag{19}$$

annehmen kann.

Die Matrix der Form φ ist dann zu sich selbst invers. Entspricht in der Darstellung $\mathfrak{A}$ dem Element h_i die Matrix H_i, dem Element e_α die Matrix E_α, so ergibt sich für die Casimir-Matrix nach Definition unter Verwendung von (18) und (19)

$$V_{\mathfrak{A}} = \sum_i H_i^2 - \sum_\alpha E_\alpha E_{-\alpha}. \tag{20}$$

Die charakteristischen Wurzeln von $\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \ldots + \lambda_l H_l$ sind ebenfalls Linearformen in $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ mit reellen Koeffizienten, die „*Gewichte*" der Darstellung; nicht alle verschwinden identisch. Daher sind die charakteristischen Wurzeln von H_i reell, die von H_i^2 sind nichtnegativ und sie können nicht für alle i sämtlich verschwinden. Daher ist

$$\sum_i \text{Spur}\,(H_i^2) > 0.$$

Andererseits ist[9]) Spur $(E_\alpha E_{-\alpha}) \leqq 0$. Daraus ergibt sich, daß die Spur von $V_{\mathfrak{A}}$ in (20) von Null verschieden ist, also $V_{\mathfrak{A}} \neq 0$ ist, w. z. b. w.

Department of Mathematics, University of Toronto.

---

[8]) Vgl. W., (24) auf S. 369.

[9]) Vgl. W., (11) auf S. 361 zusammen mit der Bemerkung, daß $\alpha_\alpha < 0$ ist, W. S. 369 unten.

(Eingegangen am 17. Dezember 1935.)

Über Potenzsummen ganzer rationaler Zahlen.

Von

Alfred Moessner in Nürnberg und Werner Schulz in Berlin.

§ 1.

Einleitung.

Es sollen folgende Bezeichnungen gelten:

(1) $$[a_1, \ldots, a_m] \overset{k}{=} [b_1, \ldots, b_n]$$

bedeute, daß

$$a_1^k + \ldots + a_m^k = b_1^k + \ldots + b_n^k$$

ist.

$$(m) \overset{k}{=} (n)$$

bedeute, daß es positive ganze Zahlen $a_1, \ldots, a_m$ und $b_1, \ldots, b_n$ so gibt, daß (1) mit

(2) $$(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) = 1,$$

(3) $$a_\mu \neq b_\nu \qquad (\mu = 1, \ldots, m;\ \nu = 1, \ldots, n)$$

gilt[1]). Ferner soll

$$(m) \overset{k}{=} (n) \qquad (k = k_1, k_2, \ldots)$$

angeben, daß (1) mit den Nebenbedingungen (2) und (3) gleichzeitig für $k = k_1, k_2, \ldots$ besteht.

Die kleinste Zahl β, für die

$$(\alpha) \overset{k}{=} (\beta) \qquad \text{mit } \alpha < \beta$$

gilt, heiße $\beta(k)$.

$r_{k,s}(N)$ sei die Anzahl der verschiedenen primitiven Darstellungen einer positiven ganzen Zahl N als Summe von k positiven k-ten Potenzen. Dabei sollen Darstellungen, die sich nur durch die Reihenfolge ihrer Glieder unterscheiden, als gleich angesehen werden.

Für $n \leqq 7$ ist bekannt, daß auf unendlich viele Arten

(4) $$(n+1) \overset{k}{=} (n+1) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

[1]) Vgl. I. Chowla, Some problems of Waring's type. Math. Zeitschr. 40 (1935). S. 506—508. Dort ist weitere Literatur angegeben.

möglich ist[2]). Dagegen weiß man nicht, ob (4) auch für $n > 7$ gilt[3]). Wir zeigen nun:

Satz 1. *Es gilt auf unendlich viele Arten*

$$\begin{aligned}
(10) &\overset{k}{=} (10) && (k \leqq 8),\\
(14) &\overset{k}{=} (14) && (k \leqq 9),\\
(14) &\overset{k}{=} (14) && (k \leqq 10),\\
(18) &\overset{k}{=} (18) && (k \leqq 11),\\
(24) &\overset{k}{=} (24) && (k \leqq 12),\\
(32) &\overset{k}{=} (32) && (k \leqq 13),\\
(33) &\overset{k}{=} (33) && (k \leqq 14).
\end{aligned}$$

Weiter beweisen wir:

Satz 2. *Es gilt*

$$\begin{aligned}
(4) &\overset{k}{=} (6) && (k \leqq 7, \text{ ungerade}),\\
(7) &\overset{k}{=} (7) && (k \leqq 8, \text{ gerade }),\\
(7) &\overset{k}{=} (7) && (k \leqq 9, \text{ ungerade}),\\
(9) &\overset{k}{=} (9) && (k \leqq 10, \text{ gerade }),\\
(11) &\overset{k}{=} (13) && (k \leqq 11, \text{ ungerade}),\\
(16) &\overset{k}{=} (16) && (k \leqq 12, \text{ gerade }),\\
(15) &\overset{k}{=} (18) && (k \leqq 13, \text{ ungerade}).
\end{aligned}$$

Den Sätzen 1 und 2 kann man folgende Abschätzungen entnehmen:

Satz 3. *Es ist*

$$\beta(10) \leqq 14, \quad \beta(12) \leqq 24, \quad \beta(14) \leqq 33; \tag{5}$$

$$\beta(11) \leqq 13, \quad \beta(13) \leqq 18. \tag{6}$$

Satz 4. *Für $k = 8, 9, 10$ gibt es unendlich viele N mit*

$$r_{k,k}(N) \geqq 2.$$

Für die Bedeutung dieser letzten Ungleichung vergleiche man die Untersuchungen von Hardy und Littlewood zum Waringschen Problem[4]).

Alle Aussagen lassen sich aus einer gemeinsamen Quelle herleiten, nämlich der von Tarry gefundenen Identität[5])

$$[1, 5, 10, 24, 28, 42, 47, 51] \overset{k}{=} [2, 3, 12, 21, 31, 40, 49, 50] \quad (k \leqq 7). \tag{7}$$

---

[2]) Für Beispiele und Literaturangaben vgl. L. E. Dickson, History of the Theory of Numbers, Bd. II (Washington, 1920), S. 705—713.

[3]) Das Bestehen von (4) ist auch von Bedeutung für die Frage nach der Reduzibilität gewisser Polynome; vgl. H. L. Dorwart, Concerning certain reducible polynomials. Duke Math. Journ. 1 (1935), S. 70—73.

[4]) Insbesondere Math. Zeitschr. 23 (1925), S. 4, Hypothesis *K*.

[5]) A. a. O. [2]), S. 710.

§ 2.

Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Aus*

$$[a_1, \ldots, a_m] \overset{k}{=} [b_1, \ldots, b_m] \qquad (k = 1, 2, \ldots, l)$$

folgt für beliebiges h bekanntlich[6])

$$[a_1, \ldots, a_m, b_1 + h, \ldots, b_m + h] \overset{k}{=} [b_1, \ldots, b_m, a_1 + h, \ldots, a_m + h] \qquad (k = 1, 2, \ldots, l+1).$$

Hilfssatz 2. *Aus*

$$[a_1, \ldots, a_{2m}] \overset{k}{=} [b_1, \ldots, b_{2m}] \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2l+1) \tag{8}$$

mit

$$a_\nu + a_{2m-\nu+1} = b_\nu + b_{2m-\nu+1} = K \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m) \tag{9}$$

folgt

$$\left[\frac{K}{2} - a_1, \ldots, \frac{K}{2} - a_m\right] \overset{k}{=} \left[\frac{K}{2} - b_1, \ldots, \frac{K}{2} - b_m\right] \quad (k = 2, 4, \ldots, 2l). \tag{10}$$

Beweis. Aus (8) folgt

$$\left[\frac{K}{2} - a_1, \ldots, \frac{K}{2} - a_{2m}\right] \overset{k}{=} \left[\frac{K}{2} - b_1, \ldots, \frac{K}{2} - b_{2m}\right] \quad (k = 1, 2, \ldots, 2l+1)$$

und, da auf beiden Seiten wegen (9) jedes Glied sowohl mit dem positiven als auch mit dem negativen Vorzeichen auftritt, so ergibt sich (10).

Hilfssatz 3. *Aus*

$$[a_1, \ldots, a_m] \overset{k}{=} [b_1, \ldots, b_m] \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2l) \tag{11}$$

mit

$$a_\nu + b_{m-\nu+1} = K \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m) \tag{12}$$

folgt

$$\left[\frac{K}{2} - a_1, \ldots, \frac{K}{2} - a_m\right] \overset{k}{=} [0] \quad (k = 1, 3, \ldots, 2l-1). \tag{13}$$

Beweis. Aus (11) folgt

$$\left[\frac{K}{2} - a_1, \ldots, \frac{K}{2} - a_m\right] \overset{k}{=} \left[\frac{K}{2} - b_1, \ldots, \frac{K}{2} - b_m\right] \quad (k = 1, 2, \ldots, 2l)$$

und, da die Glieder der rechten Seite sich von denen der linken Seite wegen (12) nur um das Vorzeichen unterscheiden, so ergibt sich (13).

§ 3.

Beweis der Sätze.

Man wende, ausgehend von (7), fortgesetzt Hilfssatz 1 an. Es ergibt sich für

$h = 9$:

$$[1, 5, 11, 24, 28, 30, 42, 47, 58, 59]$$
$$\overset{k}{=} [2, 3, 14, 19, 31, 33, 37, 50, 56, 60] \qquad (k \leqq 8);$$

[6]) A. a. O. [2]), S. 710.

$h = 19$:

$$[1, 5, 11, 21, 22, 28, 38, 42, 52, 58, 59, 69, 75, 79]$$
$$\overset{k}{=} [2, 3, 14, 19, 20, 31, 37, 43, 49, 60, 61, 66, 77, 78] \quad (k \leqq 9);$$

$h = 17$:

$$[1, 5, 11, 21, 36, 42, 48, 52, 54, 58, 79, 83, 94, 95]$$
$$\overset{k}{=} [2, 3, 14, 18, 39, 43, 45, 49, 55, 61, 76, 86, 92, 96] \quad (k \leqq 10);$$

$h = 6$:

$$[1, 5, 8, 9, 20, 21, 24, 36, 51, 52, 67, 79, 82, 83, 94, 95, 98, 102]$$
$$\overset{k}{=} [2, 3, 7, 14, 17, 18, 27, 39, 43, 60, 64, 76, 85, 86, 89, 96, 100, 101] \quad (k \leqq 11);$$

$h = 4$:

$$[1, 6, 8, 11, 20, 21, 21, 22, 31, 36, 47, 51, 52, 67, 68, 79, 80, 82, 90, 93, 94, 95, 104, 105]$$
$$\overset{k}{=} [2, 3, 12, 13, 14, 17, 25, 27, 28, 39, 40, 55, 56, 60, 71, 76, 85, 86, 86, 87, 96, 99, 101, 106] \quad (k \leqq 12);$$

$h = 15$[7]:

$$[1, 6, 8, 11, 18, 20, 21, 22, 29, 31, 32, 42, 43, 47, 52, 54, 68, 70, 75, 79, 80, 90, 91, 93, 100, 101, 102, 104, 111, 114, 116, 121]$$
$$\overset{k}{=} [2, 3, 12, 13, 14, 16, 23, 25, 26, 35, 36, 37, 39, 46, 56, 60, 62, 66, 76, 83, 85, 86, 87, 96, 97, 99, 106, 108, 109, 110, 119, 120] \quad (k \leqq 13);$$

$h = 10$:

$$[1, 6, 8, 20, 22, 22, 24, 29, 33, 43, 45, 47, 47, 49, 54, 68, 70, 70, 72, 75, 79, 91, 93, 93, 95, 102, 104, 107, 116, 116, 118, 129, 130]$$
$$\overset{k}{=} [2, 3, 14, 16, 16, 25, 28, 30, 37, 39, 39, 41, 53, 57, 60, 62, 62, 64, 78, 83, 85, 85, 87, 89, 99, 103, 108, 110, 110, 112, 124, 126, 131] \quad (k \leqq 14).$$

Wenn nun

$$[a_1, \ldots, a_m] \overset{k}{=} [b_1, \ldots, b_m] \qquad (k = 1, 2, \ldots, l)$$

ist, so gilt für beliebiges t auch[8])

$$[a_1 + t, \ldots, a_m + t] \overset{k}{=} [b_1 + t, \ldots, b_m + t] \qquad (k = 1, 2, \ldots, l).$$

Somit beweisen die vorstehenden Beispiele den Satz 1. Setzt man $t = -1$, so erkennt man die Gültigkeit der Ungleichungen (5).

---

[7]) Für $h = 1$ erhält man

$$[1, 4, 6, 8, 11, 15, 18, 20, 21, 26, 29, 31, 36, 41, 47, 51, 57, 61, 67, 72, 77, 79, 82, 87, 88, 90, 93, 97, 100, 102, 104, 107]$$
$$\overset{k}{=} [2, 2, 7, 9, 12, 12, 17, 22, 23, 25, 27, 32, 37, 39, 48, 53, 55, 60, 69, 71, 76, 81, 83, 85, 86, 91, 96, 96, 99, 101, 106, 106] \quad (k \leqq 13).$$

Wendet man hierauf Hilfssatz 1 mit $h = 5$ an, so ergibt sich ein Beispiel für (34) $\overset{k}{=}$ (34) $\quad (k \leqq 14)$.

[8]) A. a. O. [2]), S. 706.

Die Anwendung der Hilfssätze 2 bzw. 3 auf die obigen Formeln liefert

$$[23, 33, 55, 57] \overset{k}{=} [1, 5, 13, 39, 51, 59] \qquad (k \leqq 7, \text{ ungerade});$$

$$[2, 12, 18, 19, 29, 35, 39] \overset{k}{=} [3, 9, 20, 21, 26, 37, 38] \qquad (k \leqq 8, \text{ gerade});$$

$$[1, 13, 25, 55, 75, 87, 95] \overset{k}{=} [7, 11, 19, 61, 69, 91, 93] \qquad (k \leqq 9, \text{ ungerade});$$

$$[1, 31, 55, 61, 63, 85, 87, 93, 101] \overset{k}{=} [17, 25, 49, 67, 69, 75, 89, 97, 99] \qquad (k \leqq 10, \text{ gerade})^{9});$$

$$[27, 29, 51, 53, 57, 73, 79, 81, 83, 101, 103] \overset{k}{=} [3, 5, 13, 35, 45, 63, 65, 65, 67, 85, 91, 95, 105] \qquad (k \leqq 11, \text{ ungerade}):$$

$$[1, 5, 15, 22, 24, 25, 26, 35, 36, 38, 45, 47, 48, 49, 58, 59] \overset{k}{=} [7, 9, 14, 18, 19, 29, 30, 32, 39, 40, 41, 43, 50, 53, 55, 60]$$
$$(k \leqq 12, \text{ gerade})^{10});$$

$$[12, 17, 19, 19, 21, 23, 33, 37, 42, 44, 44, 46, 58, 60, 65] \overset{k}{=} [2, 4, 4, 6, 9, 13, 25, 27, 27, 29, 36, 38, 41, 50, 50, 52, 63, 64]$$
$$(k \leqq 13, \text{ ungerade})^{11}).$$

Hieraus erkennt man die Richtigkeit des Satzes 2 und der Ungleichungen (6)[12].

Ferner folgt für beliebiges x und y

$$[2, 12, 18, 19, 29, 35, 39, x] \overset{8}{=} [3, 9, 20, 21, 26, 37, 38, x],$$
$$[1, 13, 25, 55, 75, 87, 95, x, y] \overset{9}{=} [7, 11, 19, 61, 69, 91, 93, x, y],$$
$$[1, 31, 55, 61, 63, 85, 87, 93, 101, x] \overset{10}{=} [17, 25, 49, 67, 69, 75, 89, 97, 99, x],$$

woraus sich Satz 4 ergibt[13]).

---

[9]) Daß diese Beziehung für $k = 10$ besteht, haben schon S. Chowla und S. Sastry angegeben: Note on Hypothesis K of Hardy and Littlewood. Math. Zeitschr. **40** (1935), S. 348.

[10]) Aus [7]) ergibt sich ein Beispiel mit kleineren Zahlen:

$$[1, 6, 15, 17, 22, 27, 29, 31, 32, 37, 42, 42, 45, 47, 52, 52] \overset{k}{=} [3, 7, 13, 18, 23, 25, 28, 33, 34, 36, 39, 43, 46, 48, 50, 53] \qquad (k \leq 12, \text{ gerade}).$$

[11]) Das in [7]) genannte Beispiel für (34) $\overset{k}{=}$ (34) ($k \leqq 14$) führt auf ein Beispiel für (16) $\overset{k}{=}$ (18) ($k \leqq 13$, ungerade).

[12]) Aus der ersten Formel erhält man

$$\beta(7) \leqq 6.$$

Diese Ungleichung ist auch bei K. Subba Rao bewiesen, der zwei Beispiele für (5) $\overset{7}{=}$ (6) angibt: On sums of like powers. Math. Zeitschr. **40** (1935), S. 321—325 und Math. Student **3** (1935), S. 23.

[13]) Der Fall $k = 8$ ist auf anderem Wege erledigt bei S. Sastry, On sums of powers. Journ. London Math. Soc. **9** (1934), S. 242—246. Für $k = 10$ vgl. a. a. O. [9]).

(Eingegangen am 5. Januar 1936.)

Über einige Taubersche Sätze, deren Asymptotik von Exponentialcharakter ist. I.

Von

V. Avakumović und J. Karamata in Beograd.

Die meisten Sätze Tauberscher Art im Gebiete der Laplaceschen Transformation

$$J(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \int_0^\infty e^{-\sigma t} d\{A(t)\}$$

beziehen sich auf eine Asymptotik vom Typus

$$J(\sigma) \sim x^\alpha L(x), \qquad \sigma = 1/x \to 0,$$

wo $L(x)$ im gewissen Sinne langsam wächst [1]). Weniger bearbeitet wurden die Inversionssätze, bei denen sich die Asymptotik des Laplaceschen Integrals auf Funktionen vom Exponentialcharakter bezieht, wie z. B.

$$J(\sigma) \sim A x^k e^x \tag{1}$$

oder

$$J(\sigma) = e^{x^\alpha L(x)(1 + o(1))}, \tag{2}$$

wo $L(x)$, wie oben, eine langsam wachsende Funktion ist.

Sätze solcher Art wurden zuerst von G. H. Hardy und S. Ramanujan [2]) für Dirichletsche Reihen gegeben und, soweit uns bekannt ist, für Potenzreihen nur noch von K. Knopp und J. Schur [3]) betrachtet.

Was die Problemstellung betrifft, so kann sie auf mehrere Arten gestellt werden, je nach dem, was über das asymptotische Verhalten von $J(\sigma)$ vorausgesetzt und von $A(t)$ gefordert wird. In dieser Note werden wir nur zeigen (in § 1), daß man aus (1) verhältnismäßig einfach die Asymptotik von $\log A(t)$, nämlich

$$\log A(t) \sim 2\sqrt{t}, \quad t \to \infty,$$

---

[1]) In dem Sinne, daß $L(cx) \sim L(x)$, $x \to \infty$, für jedes $c > 0$ ist, so daß $x^\varepsilon L(x) \to \infty$ und $x^{-\varepsilon} L(x) \to 0$ für jedes $\varepsilon > 0$ gilt. Siehe z. B. J. Karamata, Sur un mode de croissance régulière. Bull. Soc. Math. de France, T. 61 (1933), S. 55—62.

[2]) G. H. Hardy and S. Ramanujan, Asymptotic formulae for the distribution of integers of various types. Proc. London Math. Soc. **16** (1916), S. 112—132, Asymptotic formulae in combinatory analysis, ibid. **17**, 75—115 (1917).

[3]) K. Knopp und I. Schur, Elementarer Beweis einiger asymptotischer Formeln der additiven Zahlentheorie, Math. Zeitschr. **24** (1925), S. 559—574. K. Knopp, Asymptotische Formeln der additiven Zahlentheorie, Schriften d. Königsberger Gel. Gesellsch. **2** (Heft 3) (1925), S. 45—74.

oder sogar die schärfere Abschätzung

$$e^{2\sqrt{t}-\alpha\sqrt[4]{t}\sqrt{\log t}} < A(t) < M t^{\frac{k-1}{2}} e^{2\sqrt{t}}, \quad \alpha > 2, \tag{3}$$

d. h.

$$\log A(t) = 2\sqrt{t} + O(\sqrt[4]{t}\sqrt{\log t})$$

erhalten kann.

Dies wird hergeleitet unter der Voraussetzung, daß $A(t)$ monoton wächst, oder allgemeiner (in § 3), daß $A(t)$ positiv sei und einer Bedingung der Form

$$\min_{x \leqq x' \leq x + \varepsilon\sqrt{x}} \{A(x') - A(x)\} > -w e^{\alpha\sqrt{x}}, \quad \alpha < 2, \ \varepsilon > 0, \ w > 0, \tag{4}$$

genüge leistet. Dieselben Ergebnisse werden sogar aus der schwächeren Voraussetzung

$$J(\sigma) \asymp x^k e^x, \quad \frac{1}{\sigma} = x \to \infty \text{ [4])}, \tag{5}$$

abgeleitet und es wird (in § 2) durch Beispiele gezeigt, daß dann die Abschätzungen (3) in gewissem Sinne die bestmöglichen sind.

Diese Sätze entsprechen also ihrem Charakter nach [wegen (4) und (5)] den O-Inversionssätzen. Es wäre also zu erwarten, daß man unter der engeren Voraussetzung (1) die Ungleichungen (3) verschärfen könnte, und zwar immer unter derselben Bedingung (4). Doch ist diese eventuelle Verschärfung der Abschätzung (3) verhältnismäßig gering, wie dies aus den Beispielen des § 2 hervorgeht.

Möchte man aber aus (1) das asymptotische Verhalten von $A(t)$ selbst, d. h.

$$A(t) \sim \frac{A}{2\sqrt{\pi}} t^{\frac{2k-3}{4}} e^{2\sqrt{t}},$$

erzielen (also einen o-Inversionssatz erhalten), so muß die Konvergenzbedingung (4) durch die viel schärfere

$$\liminf_{x=\infty} \min_{x \leqq x' \leq x + \varepsilon x^{3/4}} \{x'^{\frac{3-2k}{4}} e^{-2\sqrt{x'}} A(x') - x^{\frac{3-2k}{4}} e^{-2\sqrt{x}} A(x)\} > -w(\varepsilon) \to 0,$$
$$0 < \varepsilon \to 0,$$

ersetzt werden; diese Bedingung enthält aber die Monotonie der Funktion $A(t)$ nicht mehr als Spezialfall.

Die Inversion von (2), wo es sich nur um das asymptotische Verhalten von $\log A(t)$ handelt, werden wir in einer zweiten Abhandlung betrachten.

---

[4]) Nach Hardy (Orders of infinity, Cambridge Tracts in Math. and Math. Phys. Nr. 12, 1924) wird mit $f(x) \asymp g(x)$, $x \to \infty$, $[g(x) > 0]$ die Existenz zweier Konstanten $0 < \delta < \Delta < \infty$ behauptet, derart, daß $\delta < f(x)/g(x) < \Delta$ sei für $x > x_0$.

Die hier angewandte Beweisanordnung ist prinzipiell diejenige von G. H. Hardy und S. Ramanujan (von der die Knopp-Schursche Methode vollständig abweicht), aber infolge der schärferen Voraussetzung (5) einfacher, und zugleich sind unsere Ergebnisse schärfer.

§ 1.

Satz 1. *Sei* $A(t) \geqq 0$, *nicht abnehmend für* $t \geqq 0$, *und es konvergiere das Integral*

$$J(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma t} A(t)\, dt \quad \text{für} \quad \sigma > 0.$$

Aus

$$J(\sigma) \asymp x^k e^x, \qquad \frac{1}{\sigma} = x \to \infty, \tag{6}$$

folgt

$$e^{2\sqrt{t} - (2+\varepsilon)\sqrt[4]{t}\sqrt{\log t}} < A(t) < M t^{\frac{k-1}{2}} e^{2\sqrt{t}}. \tag{7}$$

Beweis. a) Nach (6) und den Voraussetzungen über $A(t)$ ist

$$M x^k e^x > \int_0^\infty e^{-t/x} A(t)\, dt > \int_T^\infty e^{-t/x} A(t)\, dt > A(T)\, x e^{-T/x}.$$

Wird hier $x = \sqrt{T}$ gesetzt, so folgt

$$A(T) < M x^{k-1} e^{\frac{T}{x} + x} = M T^{\frac{k-1}{2}} e^{2\sqrt{T}}. \tag{8}$$

b) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $A(t) = 0$ für $0 \leqq t < c$ gesetzt werden (was nur im Falle, wenn $\frac{k-1}{2} \leqq -1$ nötig ist). Der Beweis der linken Seite von (7) wird dann durch Dreiteilung des Integrals $J(\sigma)$ wie folgt erledigt.

Nach (6) ist

$$m < x^{-k} e^{-x} \int_c^\infty e^{-t/x} A(t)\, dt = x^{-k} e^{-x} \left\{ \int_c^{T_1} + \int_{T_1}^{T} + \int_T^\infty \right\} = J_1 + J_2 + J_3. \tag{9}$$

Durch Anwendung von (8) können die Integrale J_1 und J_3 wie folgt abgeschätzt werden:

$$J_1 = x^{-k} e^{-x} \int_c^{T_1} e^{-t/x} A(t)\, dt < M x^{-k} e^{-x} \int_c^{T_1} e^{-\frac{t}{x} + 2\sqrt{t}} t^{\frac{k-1}{2}}\, dt = I_1$$

und

$$J_3 = x^{-k} e^{-x} \int_T^\infty e^{-t/x} A(t)\, dt < M x^{-k} e^{-x} \int_T^\infty e^{-\frac{t}{x} + 2\sqrt{t}} t^{\frac{k-1}{2}}\, dt = I_3.$$

Wird nun in I_1 und I_3

$$\sqrt{\frac{t}{x}} - \sqrt{x} = \eta,$$

$$\sqrt{\frac{T_1}{x}} - \sqrt{x} = -\varphi(x) \tag{10}$$

und

$$\sqrt{\frac{T}{x}} - \sqrt{x} = +\varphi(x) \tag{11}$$

gesetzt, so kann $\varphi(x)$ immer so gewählt werden, daß

$$I_1 = 2M\sqrt{x}\int_{\sqrt{\frac{c}{x}}-\sqrt{x}}^{-\varphi(x)} \cdot e^{-\eta^2}\left(1+\frac{\eta}{\sqrt{x}}\right)^k d\eta = o(1)$$

und

$$I_3 = 2M\sqrt{x}\int_{\varphi(x)}^{\infty} e^{-\eta^2}\left(1+\frac{\eta}{\sqrt{x}}\right)^k d\eta = o(1), \quad x \to \infty,$$

sei. Also folgt aus (9)

$$m - o(1) < x^{-k}e^{-x}\int_{T_1}^{T} e^{-t/x}A(t)\,dt < A(T)x^{1-k}e^{-x}(e^{-T_1/x} - e^{-T/x}) < A(T)\,x^{1-k}e^{-\frac{T_1}{x}-x},$$

d. h.

$$A(T) > m' e^{\frac{T_1}{x}-x-(1-k)\log x} \quad \text{mit} \quad 0 < m' < m. \tag{12}$$

Es handelt sich nun darum, die Funktion $\varphi(x)$ derart zu wählen, daß (12) die linke Abschätzung (7) liefert[5]), was schon für

$$\varphi(x) = \sqrt{\tfrac{1}{2}\log x}$$

erreicht wird. Es ist erstens

$$I_1 < 2M\sqrt{x}\int_{\varphi(x)}^{\sqrt{x}-\sqrt{\frac{c}{x}}} e^{-\eta^2+\eta}\frac{d(\eta^2-\eta)}{e^{\eta}\left(1-\frac{\eta}{\sqrt{x}}\right)^{|k|}(2\eta-1)}$$

$$< \frac{2M\sqrt{x}}{e^{\varphi(x)}\left(1-\frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}}\right)^{|k|}(2\varphi(x)-1)}\int_{\varphi(x)}^{\sqrt{x}-\sqrt{\frac{c}{x}}} e^{-(\eta^2-\eta)}\,d(\eta^2-\eta)$$

$$< \frac{2M}{\left(1-\frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}}\right)^{|k|}(2\varphi(x)-1)} \to 0, \quad x \to \infty,$$

---

[5]) Wenn z. B. nur $\log A(t) \sim 2\sqrt{t}$ gefordert wird, so genügt es schon $\varphi(x) = \Theta\sqrt{x}$, mit $0 < \Theta < 1$, zu setzen. Die bestmögliche Abschätzung erzielt man aber, wenn

$$\varphi(x) = \sqrt{\tfrac{1}{2}\log x - \tfrac{1}{2}\log\log x + a}$$

gesetzt wird. In diesem Falle kann $\limsup I_1$ und $\limsup I_3$, für genügend großes a, beliebig klein gemacht werden, womit für die untere Grenze von $A(t)$ eine Abschätzung von der Größenordnung $e^{2\sqrt{t}-2\sqrt[4]{t}\sqrt{\log t}+t^{1/4}-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, erreicht wird.

da die Funktion $e^{-\eta}\left(1-\frac{\eta}{\sqrt{x}}\right)^{-|k|}(2\eta-1)^{-1}$ im Intervalle $\left(\varphi(x), \sqrt{x}-\sqrt{\frac{c}{x}}\right)$ ihren größten Wert für $\eta=\varphi(x)$ erreicht; zweitens folgt auf dieselbe Weise, daß

$$I_3 = o(1), \quad x \to \infty,$$

wenn man beachtet, daß die Funktion $e^{-\eta}\left(1+\frac{\eta}{\sqrt{x}}\right)^{|k|}(2\eta-1)^{-1}$ für $\eta > \frac{1}{2}$ beständig abnimmt.

Greifen wir endlich auf (12) zurück, so ergibt sich daraus die Behauptung (7), da wegen (11)

$$\sqrt{x} = \sqrt{\sqrt{T} + \left(\frac{\varphi(x)}{2}\right)^2} - \frac{\varphi(x)}{2} < \sqrt[4]{T}$$

und wegen (10) und (11)

$$\begin{aligned}\frac{T_1}{x} + x - (1-k)\log x &= 2\sqrt{T} - 4\varphi(x)\sqrt{x} + \varphi^2(x) - (1-k)\log x \\ &> 2\sqrt{T} - 2\sqrt[4]{T}\sqrt{\log T} - (1-k-\tfrac{1}{2})\log x \\ &> 2\sqrt{T} - (2+\varepsilon)\sqrt[4]{T}\sqrt{\log T} \quad \text{für} \quad T > T(\varepsilon)\end{aligned}$$

ist.

§ 2.

Um durch Beispiele zu prüfen, inwiefern die Schranken von (7) erreicht werden können, beschränken wir uns nur auf den Spezialfall $k=1$. Es wird sich ergeben, daß dann die obere Schranke von $A(t)$ effektiv, die untere aber in unserem Beispiel nur bis auf $e^{2\sqrt{t}-4\sqrt[4]{t}}$ erreicht wird.

a) Von der Funktion $A^*(t) = e^{2\sqrt{t}}$ ausgehend, konstruieren wir $A(t)$ wie folgt:

$$A(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leqq t < 1 \\ A^*(n^4) & \text{für} \quad n^4 \leqq t < (n+1)^4, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Man sieht dann leicht ein, daß

$$\limsup_{t=\infty} e^{-2\sqrt{t}} A(t) = 1$$

und

$$\liminf_{t=\infty} e^{-2\sqrt{t}+4\sqrt[4]{t}} A(t) = e^3$$

ist. Nun behaupten wir:

$$(13) \qquad \begin{cases} \limsup\limits_{x=\infty} \dfrac{e^{-x}}{x} \displaystyle\int_0^\infty e^{-t/x} A(t)\,dt = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} e^{-(2\nu)^2}, \\ \liminf\limits_{x=\infty} \dfrac{e^{-x}}{x} \displaystyle\int_0^\infty e^{-t/x} A(t)\,dt = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-(2\nu-1)^2}. \end{cases}$$

Beweis von a). Es ist

$$\frac{e^{-x}}{x}\int_0^\infty e^{-t/x}A(t)\,dt = \frac{e^{-x}}{x}\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{\nu^4}^{(\nu+1)^4} e^{-\frac{t}{x}+2\nu^2}\,dt$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{2\nu^2-\frac{\nu^4}{x}-x} - \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{2\nu^2-\frac{(\nu+1)^4}{x}-x}$$

$$\sim \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{2\nu^2-\frac{\nu^4}{x}-x}, \quad x\to\infty,$$

weil

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{2\nu^2-\frac{(\nu+1)^4}{x}-x}}{\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{2\nu^2-\frac{\nu^4}{x}-x}} = \frac{\sum_{\nu=2}^{\infty} e^{2(\nu-1)^2}e^{-\frac{\nu^4}{x}}}{\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{2\nu^2}e^{-\frac{\nu^4}{x}}} = o(1), \quad x\to\infty,$$

ist.

Wird nun

$$x = n^2 + na, \quad \nu = n+\mu$$

und

$$h_n(\mu) = \frac{\nu^4}{x} - 2\nu^2 + x = \frac{\left(2\mu - a + \frac{\mu^2}{n}\right)^2}{1+\frac{a}{n}}$$

gesetzt, dann ist

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{2\nu^2-\frac{\nu^4}{x}-x} = \sum_{\nu=-n+1}^{\infty} e^{-h_n(\mu)} = \sum_{\mu=-n+1}^{-k-1} + \sum_{\mu=-k}^{+k} + \sum_{\mu=k+1}^{\infty}.$$

Es ist aber, erstens, für $k > 2a \geqq 0$,

$$\sum_{\mu=-n+1}^{-k-1} + \sum_{\mu=k+1}^{\infty} < 2\sum_{\mu=k+1}^{\infty} e^{-\mu^2} = \varepsilon(k) \to 0, \quad k\to\infty,$$

weil

$$h_n(\mu) > \tfrac{1}{2}(2\mu - a)^2 > \mu^2 \quad \text{für} \quad |\mu| > 2a$$

ist; zweitens,

$$\sum_{\mu=-k}^{+k} \to \sum_{\mu=-k}^{+k} e^{-(2\mu-a)^2}, \quad n\to\infty,$$

weil

$$h_n(\mu) \to (2\mu - a)^2, \quad n\to\infty.$$

Daraus folgt also

$$\limsup_{n=\infty} \left| \sum_{\mu=-n+1}^{\infty} e^{-h_n(\mu)} - \sum_{\mu=-k}^{+k} e^{-(2\mu-a)^2} \right| < \varepsilon(k) \to 0, \quad k\to\infty,$$

woraus sich ergibt, daß für $x = n^2 + na$

$$\frac{e^{-x}}{x}\int_0^\infty e^{-t/x}A(t)\,dt \to \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} e^{-(2\nu-a)^2} = \Phi(a), \quad n\to\infty, \tag{14}$$

und zwar gleichmäßig in a.

Da aber x alle Werte zwischen n^2 und $(n+1)^2$ annimmt, wenn a stetig zwischen 0 und $2+\varepsilon$ variiert, so folgt aus (14), daß der $\limsup_{x=\infty}$ bzw. $\liminf_{x=\infty}$ von $\frac{e^{-x}}{x}\int_0^\infty e^{-t/x}A(t)\,dt$ gleich dem Max bzw. dem Min der Funktion $\Phi(a)$ ist, welche Werte für $a=0$ (oder $=2$) bzw. für $a=1$ erreicht werden[6]), wie dies in (13) behauptet war.

b) Das hier angewendete Verfahren versagt aber, wenn man mit der oberen zugleich die untere Grenze von (7) erreichen will. Denn wird $A(t)$ durch

$$A(t)=\begin{cases}0 & \text{für } 0\leqq t<1\\ A^*(\lambda_n) & \text{für } \lambda_n\leqq t<\lambda_{n+1},\ \lambda_0=1,\ \lambda_n=n^4\log^2 n,\ n=1,2,3,\ldots,\end{cases}$$

festgesetzt, mit $A^*(t)=e^{2\sqrt{t}}$, so ist sogar

$$\lim_{t=\infty} e^{-2\sqrt{t}+\alpha\sqrt[4]{t}\sqrt{\log t}}A(t)=\infty \quad \text{für} \quad \alpha\geqq 2 \tag{15}$$

und

$$\limsup_{x=\infty}\frac{e^{-x}}{x}\int_0^\infty e^{-t/x}A(t)\,dt=1 \tag{16}$$

aber

$$\liminf_{x=\infty}\frac{e^{-x}}{x}\int_0^\infty e^{-t/x}A(t)\,dt=0. \tag{17}$$

c) Es ergibt sich noch viel mehr. Wie langsam auch die Funktion $L(x)$ gegen Unendlich strebt, wofern sie nur den Bedingungen
$L(x+k)\geqq L(x)$ und $L(x+k)/L(x)=1+o(1/x)$, k beliebig, $x\to\infty$, genügt, so sind, wenn $A(t)$ durch

$$A(t)=\begin{cases}0 & \text{für} \quad 0\leqq t<1\\ A^*\{n^4L^4(n)\} & \text{für } n^4L^4(n)\leqq t<(n+1)^4L^4(n+1),\ n=1,2,\ldots\end{cases}$$

festgesetzt wird, (15), (16) und (17) noch immer erfüllt.

---

[6]) Vom Faktor $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ abgesehen, ist $\Phi(2v)$ gleich der Jakobischen Thetafunktion

$$\vartheta_3(v)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}q^{k^2}e^{-2\pi kvi} \quad \text{mit} \quad q=e^{-\frac{\pi^2}{4}},$$

da

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-(2k-a)^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-\left(\frac{\pi}{2}k\right)^2}e^{-\pi kai}$$

ist.

d) Wird aber die Funktion $L(x)$ durch eine beliebig langsam gegen Null monoton abfallende Funktion $l(x)$ ersetzt, die der Bedingung

$$l(x+k)/l(x) = 1 + o(1/x) \text{ für beliebiges } k, \quad x \to \infty,$$

genügt, so läßt sich beweisen, daß (15) erfüllt ist, daß aber

$$\limsup_{x=\infty} \frac{1}{x} e^{-x} \int_0^\infty e^{-t/x} A(t)\, dt = \infty. \tag{18}$$

Man sieht zuerst leicht ein, daß in beiden Fällen c) und d) (15) erfüllt ist, wenn dabei im Falle c) $L^2(n)$ schwächer als $\log n$ wächst, weil dann $A(t)$ schwächer wächst als die entsprechende Funktion $A(t)$ von b).

Beweis von c). Durch dieselbe Überlegung wie im Beispiele a) sieht man leicht ein, daß

$$\frac{1}{x} e^{-x} \int_0^\infty e^{-t/x} A(t)\, dt \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-h_x(\nu)},$$

wo

$$h_x(\nu) = 2\nu^2 L^2(\nu) - x - \nu^4 L^4(\nu)/x$$

ist. Wird hier x durch

$$x = (n^2 + a\,n) L^2(n) \quad \text{mit} \quad 0 \leqq a \leqq 2 + \varepsilon$$

festgesetzt, so ist

$$-h_x(n+k) = -\Big\{n \frac{L^2(n+k)}{L(n)} + 2k \frac{L^2(n+k)}{L(n)} + \frac{k}{n} \frac{L^2(n+k)}{L(n)} - n L(n) - a L(n)\Big\}^2 \sim -(2k-a)^2 L^2(n), \quad n \to \infty,$$

und durch das in a) verwendete Beweisverfahren ergibt sich (16) falls $a = 0$ oder $a = 2$, und (17), falls $a \neq 0$ oder $a \neq 2$ ist.

Beweis von d). Wird

$$h_x(\nu) = 2\nu^2 l^2(\nu) - x - \nu^4 l^4(\nu)/x$$

und

$$x = (n^2 + a\,n) l^2(n), \quad 0 \leqq a \leqq 2 + \varepsilon,$$

gesetzt, also

$$-h_x(n+k) = -\Big\{n \frac{l^2(n+k)}{l(n)} + 2k \frac{l^2(n+k)}{l(n)} + \frac{k}{n} \frac{l^2(n+k)}{l(n)} - n l(n) - a l(n)\Big\}^2,$$

so folgt wie oben

$$\frac{1}{x} e^{-x} \int_0^\infty e^{-t/x} A(t)\, dt \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-h_x(\nu)} > \sum_{\nu=1}^{k} e^{-h_x(n+\nu)}.$$

Da aber

$$\sqrt{h_x(n+k)} = n \frac{l^2(n) - l^2(n+k)}{l(n)} + o(1) = o(1), \quad n \to \infty,$$

weil nach der Voraussetzung $l(n) - l(n+k) = o\left(\frac{l(n)}{n}\right)$ ist, so ist

$$\lim_{n=\infty} \inf \frac{1}{x} e^{-x} \int_0^\infty e^{-t/x} A(t)\, dt > k.$$

Daraus folgt (18), da k beliebig groß gewählt werden kann.

e) In der Einleitung haben wir erwähnt, daß man unter den Voraussetzungen (1) und „$A(t)$ *nicht abnehmend*" die Ungleichungen (7) wahrscheinlich verschärfen konnte. Hier möchten wir noch zeigen, daß diese Ungleichungen dann höchstens bis auf

$$e^{2\sqrt{t} - \sqrt[4]{t}\, l_1(t)} < A(t) < e^{2\sqrt{t}}/L_2(t)$$

herabgedrückt werden können, wo $L_1(t)$ und $L_2(t)$ langsam wachsende Funktionen bedeuten. Dazu verwenden wir dasselbe Konstruktionsverfahren wie oben und gehen von der Funktion

$$A^*(t) = e^{2\sqrt{t}} t^{-\frac{2-\gamma}{4\gamma}} \qquad \text{mit} \qquad 1 < \gamma < 2$$

aus. Wird dann $A(t)$ durch

$$A(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leqq t < 1 \\ A^*(n^{2\gamma}) & \text{für} \quad n^{2\gamma} \leqq t < (n+1)^{2\gamma}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

festgesetzt, so ist

$$\lim_{t=\infty} \sup e^{-2\sqrt{t}} t^{\frac{2-\gamma}{4\gamma}} A(t) = 1,$$

$$\lim_{t=\infty} \inf e^{-2\sqrt{t} + 2\gamma t^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}} t^{\frac{2-\gamma}{2\gamma}} A(t) = 1,$$

und wir beweisen, daß

$$\int_0^\infty e^{-t/x} A(t)\, dt \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma} x e^x, \quad x \to \infty. \tag{19}$$

Beweis von e). Wie im vorstehenden Beispiele folgt leicht, daß

$$\frac{e^{-x}}{x} \int_0^\infty e^{-t/x} A(t)\, dt \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\frac{\gamma}{2}-1} e^{-\frac{(\nu^\gamma - x)^2}{x}}, \quad x \to \infty. \tag{20}$$

Da die Funktion

$$u_x(t) = t^{\frac{\gamma}{2}-1} e^{-\frac{(t^\gamma - x)^2}{x}}$$

von

$$t_1 = \left\{\frac{x - \sqrt{x^2 - 2\alpha x}}{2}\right\}^{1/\gamma} \to \alpha^{1/\gamma}, \quad x \to \infty, \quad \alpha = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{2} < \frac{1}{2},$$

bis

$$t_2 = \left\{\frac{x + \sqrt{x^2 - 2\alpha x}}{2}\right\}^{1/\gamma} \to \infty, \quad x \to \infty$$

zunimmt und von t_2 bis ∞ abnimmt, so wird für genügend großes x

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\frac{\gamma}{2}-1} e^{-\frac{(\nu^\gamma - x)^2}{x}} = \sum_{\nu=1}^{[t_2]} u_x(\nu) + \sum_{[t_2]+1}^{\infty} u_x(\nu) > \int_1^{[t_2]} u_x(t)\,dt + \int_{[t_2]+1}^{\infty} u_x(t)\,dt \doteq$$

$$> \int_0^{\infty} - \int_0^1 - \int_{[t_2]}^{[t_2]+1} = \int_0^{\infty} u_x(t)\,dt + o(1), \quad x \to \infty$$

und

$$\sum_{\nu=1}^{[t_2]} u_x(\nu) + \sum_{[t_2]+1}^{\infty} u_x(\nu) < \int_0^{[t_2]+1} u_x(t)\,dt + \int_{[t_2]}^{\infty} u_x(t)\,dt = \int_0^{\infty} u_x(t)\,dt + o(1),$$

d. h.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} u_x(\nu) = \int_0^{\infty} u_x(t)\,dt + o(1), \quad x \to \infty.$$

Wird hier $t^\gamma - x = \sqrt{x}\,\eta$ gesetzt, so ist

$$\int_0^{\infty} u_x(t)\,dt = \int_0^{\infty} t^{\frac{\gamma}{2}-1} e^{-\frac{(t^\gamma - x)^2}{x}}\,dt = \frac{1}{\gamma} \int_{-\sqrt{x}}^{\infty} e^{-\eta^2} \left(1 + \frac{\eta}{\sqrt{x}}\right)^{-1/2} d\eta \to \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma},$$

woraus also wegen (20) die Behauptung (19) folgt.

§ 3.

Satz 2. *Die für $t \geqq 0$ positive Funktion $A(t)$ genüge der Bedingung*

$$\text{(21)} \qquad \operatorname*{Min}_{t \leqq t' \leqq t + \varepsilon\sqrt{t}} \{A(t') - A(t)\} > -w\,e^{a\sqrt{t}}, \quad \varepsilon > 0, \quad a < 2,$$

und es konvergiere das Integral

$$J(\sigma) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} A(t)\,dt \quad \textit{für} \quad \sigma > 0.$$

Aus

$$\text{(22)} \qquad J(\sigma) \asymp x^k e^x, \quad \frac{1}{\sigma} = x \to \infty,$$

folgt dann

$$\text{(23)} \qquad e^{2\sqrt{t} - \alpha \sqrt[4]{t}\sqrt{\log t}} < A(t) < M\,t^{\frac{k-1}{2}} e^{2\sqrt{t}}, \quad \alpha > 2.$$

Für den Beweis dieses Satzes benutzen wir die der Bedingung (21) äquivalente Bedingung

$$\text{(24)} \qquad A(y) - A(x) > -w'\,e^{a\sqrt{y}} \quad \text{für} \quad y \geqq x.$$

Um zu zeigen, daß (24) aus (21) folgt, sei $\alpha(t) = e^{\sqrt{t}}$ gesetzt und mit $\tau(t)$ die inverse Funktion von $\alpha(t)$ bezeichnet. Es existiert dann für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\lambda > 1$, derart daß

$$t + \varepsilon\sqrt{t} > \tau\{\lambda\,\alpha(t)\} = t + 2\log\lambda\sqrt{t} + \log^2\lambda$$

wird. Aus der Ungleichung (21) folgt dann

$$\operatorname*{Min}_{t \leqq t' \leqq \tau\{\lambda\alpha(t)\}} \{A(t') - A(t)\} > -w e^{a\sqrt{t}}.$$

Wird nun

$$x = x_0, \quad x_\nu = \tau\{\lambda\alpha(x_{\nu-1})\} = \tau\{\lambda^\nu \alpha(x_0)\}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n,$$

gesetzt und n durch

$$x_n \leqq y < \tau\{\lambda\alpha(x_n)\},$$

d. h. durch

$$\sqrt{x} + n\log\lambda \leqq \sqrt{y} < \sqrt{x} + (n+1)\log\lambda,$$

bestimmt, dann folgt aus der vorstehenden Ungleichung, daß

$$A(y) - A(x) > -w \sum_{\nu=0}^{n} e^{a\sqrt{x_\nu}}$$

ist. Da aber

$$\sum_{\nu=0}^{n} e^{a\sqrt{x_\nu}} = \sum_{\nu=0}^{n} e^{a(\sqrt{x}+\nu\log\lambda)} = e^{a\sqrt{x}} \sum_{\nu=0}^{n} \lambda^{a\nu} \leqq \frac{\lambda^a}{\lambda^a - 1} e^{a\sqrt{x} + n a \log\lambda} \leqq$$

$$\leqq \frac{\lambda^a}{\lambda^a - 1} e^{a\sqrt{y}}$$

ist, so ergibt sich die Behauptung (24) mit $w' = w/(1 - \lambda^{-a})$.

Umgekehrt folgt (21) aus (24), da

$$\operatorname*{Min}_{x \leqq \eta \leqq x + \varepsilon\sqrt{x}} \{A(y) - A(x)\} \geqq -w' e^{a\sqrt{x+\varepsilon\sqrt{x}}} \geqq -w' e^{\frac{a\varepsilon}{2}} e^{a\sqrt{x}}$$

ist.

Beweis des Satzes 2. a) Nach den Voraussetzungen dieses Satzes ist, wegen (24),

$$M' x^k e^x > \int_T^\infty e^{-t/x} A(t)\, dt > A(T)\, x e^{-T/x} - w' \int_T^\infty e^{-t/x + a\sqrt{t}}\, dt$$

$$= A(T)\, x e^{-T/x} - J_1.$$

Für $x = \sqrt{T}$ ist aber

$$J_1 = w' e^x \int_{x^2}^\infty e^{-\left(\sqrt{\frac{t}{x}} - \sqrt{x}\right)^2 - (2-a)\sqrt{t}}\, dt < w' e^{(a-1)x} \int_{x^2}^\infty e^{-\left(\sqrt{\frac{t}{x}} - \sqrt{x}\right)^2} dt =$$

$$< 2 w' e^{(a-1)x} x^{3/2} \int_0^\infty e^{-\eta^2}\left(1 + \frac{\eta}{\sqrt{x}}\right) d\eta = o(x^R e^x) = o(T^{R/2} e^{\sqrt{T}}), \quad T \to \infty,$$

so daß

$$A(T) < M x^{k-1} e^{x + T/x} = M T^{\frac{k-1}{2}} e^{2\sqrt{T}}, \quad M' < M. \tag{25}$$

b) J_1, J_2, J_3 und $\varphi(t)$, T, T_1 und x haben dieselbe Bedeutung wie im Teile b) des Beweises des Satzes 1. Nach (22) ist dann

$$m < J_1 + J_2 + J_3 = J_2 + o(1).$$

Werden nun die Hilfsrechnungen am Ende von § 2 und die Bedingung (24) berücksichtigt, so folgt

$$J_2 < A(T)\, x^{-k} e^{-x} \int_{T_1}^{T} e^{-t/x}\, dt + w'\, x^{-k} e^{-x} \int_{T_1}^{T} e^{-\frac{t}{x} - a\sqrt{t}}\, dt <$$

$$< A(T)\, x^{1-k} e^{-x - \frac{T_1}{x}} + w'\, x^{1-k} e^{-x - \frac{T_1}{x} + a\sqrt{T}} =$$

$$< A(T)\, e^{-2\sqrt{T} + 4\varphi(x)\sqrt{x} - \varphi^2(x) + (1-k)\log x}$$

$$+ w'\, x^{1-k} e^{-(2-a)\sqrt{T} + 4\varphi(x)x - \varphi^2(x)} =$$

$$< A(T)\, e^{-2\sqrt{T} + (2+\varepsilon)\sqrt[4]{T}\sqrt{\log T}} + o(1), \quad T \to \infty.$$

Also ist

$$A(T) > \{m - o(1)\}\, e^{2\sqrt{T} - (2+\varepsilon)\sqrt[4]{T}\sqrt{\log T}} >$$

$$> e^{2\sqrt{T} - \alpha\sqrt[4]{T}\sqrt{\log T}} \quad \text{für} \quad T > T(\varepsilon), \quad \alpha > 2,$$

was zusammen mit (25) die Behauptung (23) ergibt.

(Eingegangen am 14. Januar 1936.)

Die Widerspruchsfreiheit der Stufenlogik.

Von

Gerhard Gentzen in Göttingen.

Für das Folgende setze ich die Kenntnis der Grundtatsachen der mathematischen Logik, und zwar der Aussagen-, Prädikaten- und Stufenlogik voraus[1])

Die Widerspruchsfreiheit der *Aussagenlogik* pflegt man durch die Ausrechnung der Wahrheitswerte[2]) zu beweisen. Die Widerspruchsfreiheit der *Prädikatenlogik*[3]) läßt sich durch eine einfache Erweiterung dieses Verfahrens nachweisen[4]). Der Grundgedanke hierbei ist, den Gegenstandsbereich so zu spezialisieren, daß er nur ein einziges Element enthält.

Im folgenden soll von dem gleichen Grundgedanken aus die Widerspruchsfreiheit der *Stufenlogik* auf einfache Weise bewiesen werden. Als „Stufenlogik" bezeichne ich den „erweiterten Funktionenkalkül" im Sinne von H.-A.[5]), unter Einhaltung der Russellschen Typenunterscheidung für die Prädikate, jedoch ohne die feinere Unterscheidung der sogenannten „verzweigten Typentheorie"[6]). Näheres in § 1. Die Stufenlogik umfaßt im wesentlichen das System der „Principia Mathematica" einschließlich des „Auswahlaxioms", jedoch mit Ausschluß des „Unendlichkeitsaxioms"[7]). Durch die Hinzunahme dieses Axioms, d. h. durch die Zugrundelegung eines *unendlichen* Gegenstandsbereichs, entstehen erst die wesentlichen Schwierigkeiten, deren Lösung die Hauptaufgabe der Hilbertschen Beweis-

---

[1]) Siehe etwa: Hilbert-Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, im folgenden als H.-A. zitiert; R. Carnap, Abriß der Logistik; H. Behmann, Mathematik und Logik.

[2]) H.-A., S. 29—31.

[3]) Bei H.-A. „engerer Funktionenkalkül" genannt.

[4]) H.-A., S. 65.

[5]) Siehe Anm. [1]).

[6]) Carnap, Abriß der Logistik, S. 21. — Ich verwende die Bezeichnungen „Stufe" und „Typ" in gleichem Sinne wie Carnap und Behmann (bezüglich „Stufe" im Anschluß an Frege).

[7]) Vgl. B. Russell, Einführung in die mathematische Philosophie.

theorie darstellt. Bemerkenswert ist, daß bei Fortlassung der Stufenunterscheidung schon *ohne* das Unendlichkeitsaxiom *Widersprüche* auftreten, z. B. die „Russellsche Antinomie“[8]); bei Unterscheidung der Stufen ist dies, wie der folgende Beweis zeigt, also nicht mehr möglich.

§ 1.

Formale Gestalt der Stufenlogik[9]).

Deutsche und griechische Buchstaben verwende ich als Mitteilungszeichen. Unter Subst $\mathfrak{A}\binom{b}{c}$ verstehe ich den Ausdruck, der aus einem Ausdruck $\mathfrak{A}$ hervorgeht, wenn man das Zeichen b überall, wo es in $\mathfrak{A}$ vorkommt, durch das Zeichen c ersetzt.

1. 1. Erklärung des Begriffs „*Formel*“ ⟨formales Abbild einer *Aussage* aus der Stufenlogik⟩.

1. 1 1. Ich benötige *freie* und *gebundene Variable* verschiedener *Stufen*. Als Variable mögen beliebige noch nicht anders verwendete Zeichen zugelassen sein; es ist nur jeweils anzugeben, ob das betreffende Zeichen eine freie oder eine gebundene Variable darstellen soll; ferner ist die Stufe der Variablen durch einen angehängten Zahlenindex zu bezeichnen. Stufen sind 0, 1, 2, 3, ...

⟨Inhaltlich bedeuten Variable der Stufe 0 beliebige Gegenstände des Gegenstandsbereichs, Variable der Stufe 1 beliebige Eigenschaften (= einstellige Prädikate) von Gegenständen, allgemein (für $\nu \geqq 1$) Variable der Stufe $\nu + 1$ beliebige Eigenschaften von Eigenschaften der Stufe ν. Die Eigenschaften vertreten zugleich die „Klassen“ (= Mengen) von Elementen, auf welche die betreffende Eigenschaft zutrifft.⟩

Man verwendet gewöhnlich noch *mehrstellige* Prädikate, weiterhin Prädikate für solche usw., wodurch innerhalb der einzelnen Stufen noch eine Unterteilung in verschiedene *Typen* von Prädikaten notwendig wird[10]). Nach einer Bemerkung von Gödel[11]) sind diese jedoch grundsätzlich entbehrlich.

1. 1 2. Ein Ausdruck der Form $\mathfrak{a}_{\nu+1}\mathfrak{b}_\nu$, wobei $\mathfrak{a}_{\nu+1}$ und $\mathfrak{b}_\nu$ beliebige freie Variable (der durch den Index angezeigten Stufen, $\nu \geqq 0$) sind, ist

---

[8]) H.-A., S. 93.

[9]) Vgl. K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, Monatsh. f. Math. und Phys. 38 (1931), besonders S. 176—178, sowie R. Carnap, Logische Syntax der Sprache (Wien 1934), Kap. III.

[10]) Carnap, Abriß der Logistik, Nr. 13.

[11]) Siehe die in Anm. [9]) zitierte Arbeit, S. 176.

eine Formel. ⟨Inhaltliche Bedeutung: „Die Eigenschaft $\mathfrak{a}_{\nu+1}$ trifft auf $\mathfrak{b}_\nu$ zu" bzw.: „$\mathfrak{b}_\nu$ ist Element der Menge $\mathfrak{a}_{\nu+1}$".⟩

Ist $\mathfrak{A}$ eine Formel, so ist auch $\neg\,\mathfrak{A}$ eine Formel. ⟨Inhaltliche Bedeutung: „$\mathfrak{A}$ gilt nicht".⟩ Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Formeln, so sind auch $\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}$ ⟨„$\mathfrak{A}$ gilt und $\mathfrak{B}$ gilt"⟩, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ ⟨„$\mathfrak{A}$ gilt oder $\mathfrak{B}$ gilt"⟩, $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ ⟨„ wenn $\mathfrak{A}$ gilt, so gilt $\mathfrak{B}$"⟩ und $\mathfrak{A} \supset\subset \mathfrak{B}$ ⟨„$\mathfrak{A}$ gilt dann und nur dann, wenn $\mathfrak{B}$ gilt"⟩ Formeln.

Ist $\mathfrak{A}$ eine Formel, in der die freie Variable $\mathfrak{a}_\nu$ vorkommt und die gebundene Variable $\mathfrak{x}_\nu$ nicht vorkommt, so sind auch $\forall\,\mathfrak{x}_\nu$ Subst $\mathfrak{A}\binom{\mathfrak{a}_\nu}{\mathfrak{x}_\nu}$ und $\exists\,\mathfrak{x}_\nu$ Subst $\mathfrak{A}\binom{\mathfrak{a}_\nu}{\mathfrak{x}_\nu}$ Formeln. ⟨Inhaltliche Bedeutung: „Subst $\mathfrak{A}\binom{\mathfrak{a}_\nu}{\mathfrak{x}_\nu}$ gilt für alle $\mathfrak{x}_\nu$"; bzw.: „es gibt ein $\mathfrak{x}_\nu$, so daß Subst $\mathfrak{A}\binom{\mathfrak{a}_\nu}{\mathfrak{x}_\nu}$ gilt".⟩

1.1 3. Keine weiteren Ausdrücke, als solche, die gemäß 1.1 2 gebildet sind, sind Formeln. Durch Klammern ist dafür zu sorgen, daß der Aufbau einer Formel eindeutig ersichtlich ist. *Beispiel* einer *Formel*:

$$\neg\,\exists\,y_2\,[a_1\,b_0\,\&\,\forall\,z_4\,(c_3\,y_2 \supset\subset z_4\,a_3)].$$

a_1, b_0, c_3 und a_3 seien freie Variable, y_2 und z_4 gebundene Variable.

Für eine Formel oder einen Formelteil der Gestalt

$$\forall\,\mathfrak{x}_{\nu+1}\,(\mathfrak{x}_{\nu+1}\,\mathfrak{r}_\nu \supset \mathfrak{x}_{\nu+1}\,\mathfrak{s}_\nu),$$

wobei $\mathfrak{r}_\nu$, $\mathfrak{s}_\nu$ und $\mathfrak{x}_{\nu+1}$ Variable seien, kann als Abkürzung geschrieben werden: $\mathfrak{r}_\nu = \mathfrak{s}_\nu$.

1.2. Erklärung des Begriffs „*Herleitung*" ⟨formales Abbild eines *Beweises* aus der Stufenlogik⟩.

Eine Herleitung ist eine Reihe von Formeln, von denen jede entweder eine „Grundformel" ist oder aus irgendwelchen in der Reihe vorangehenden Formeln durch Anwendung einer „Schlußregel" hervorgeht. Die zulässigen Grundformeln und Schlußregeln werden im folgenden angegeben.

1.2 1. ⟨Aussagenlogik.⟩ Als Grundformel gilt jede Formel, die aus einer „immer richtigen Aussagenverbindung" im Sinne von H.-A.[12]) durch Einsetzung beliebiger Formeln in unserem Sinne (1.1) für die „Grundaussagen" hervorgeht. Ferner gilt die Schlußregel: Aus zwei Formeln der Gestalt $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ darf die Formel $\mathfrak{B}$ hergeleitet werden.

1.2 2. ⟨Prädikatenlogik.⟩ Grundformeln sind alle Formeln der Gestalt $(\forall\,\mathfrak{x}_\nu\,\mathfrak{A}) \supset \text{Subst}\,\mathfrak{A}\binom{\mathfrak{x}_\nu}{\mathfrak{a}_\nu}$ und Subst $\mathfrak{A}\binom{\mathfrak{x}_\nu}{\mathfrak{a}_\nu} \supset \exists\,\mathfrak{x}_\nu\,\mathfrak{A}$, wobei für $\forall\,\mathfrak{x}_\nu\,\mathfrak{A}$

[12]) S. 11.

bzw. $\exists\, \mathfrak{x}_\nu \mathfrak{A}$ eine beliebige Formel von dieser Gestalt, für $\mathfrak{a}_\nu$ eine beliebige freie Variable einzusetzen ist; ν soll, auch im folgenden, immer irgendeine ganze Zahl $\geqq 0$ sein.

Schlußregeln für $\forall$ und $\exists$: Aus einer Formel der Gestalt $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ darf die Formel $\mathfrak{A} \supset \forall\, \mathfrak{x}_\nu$ Subst $\mathfrak{B} \binom{\mathfrak{a}_\nu}{\mathfrak{x}_\nu}$ hergeleitet werden, wobei $\mathfrak{a}_\nu$ eine in $\mathfrak{B}$, doch nicht in $\mathfrak{A}$, vorkommende freie Variable, $\mathfrak{x}_\nu$ eine in $\mathfrak{B}$ nicht vorkommende gebundene Variable sei. Aus einer Formel der Gestalt $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$ darf die Formel $\left(\exists\, \mathfrak{x}_\nu \text{ Subst } \mathfrak{B} \binom{\mathfrak{a}_\nu}{\mathfrak{x}_\nu}\right) \supset \mathfrak{A}$ hergeleitet werden, wobei $\mathfrak{a}_\nu$ eine in $\mathfrak{B}$, doch nicht in $\mathfrak{A}$, vorkommende freie Variable, $\mathfrak{x}_\nu$ eine in $\mathfrak{B}$ nicht vorkommende gebundene Variable sei.

1.2 3. ⟨Gleichheit.⟩ Grundformel ist jede Formel der Gestalt

$$[\forall\, \mathfrak{x}_\nu (\mathfrak{a}_{\nu+1}\, \mathfrak{x}_\nu \supset\subset \mathfrak{b}_{\nu+1}\, \mathfrak{x}_\nu)] \supset \mathfrak{a}_{\nu+1} = \mathfrak{b}_{\nu+1},$$

wobei für $\mathfrak{a}_{\nu+1}$ und $\mathfrak{b}_{\nu+1}$ beliebige freie Variable einzusetzen sind, für $\mathfrak{x}_\nu$ eine beliebige gebundene Variable.

1.2 4. ⟨Axiome der Mengenbildung.⟩ Grundformel ist jede Formel der Gestalt

$$\exists\, \mathfrak{x}_{\nu+1} \forall\, \mathfrak{y}_\nu \left[\mathfrak{x}_{\nu+1}\, \mathfrak{y}_\nu \supset\subset \text{Subst } \mathfrak{A} \binom{\mathfrak{a}_\nu}{\mathfrak{y}_\nu}\right],$$

wobei für $\mathfrak{A}$ irgendeine Formel einzusetzen ist, in der die (beliebige) freie Variable $\mathfrak{a}_\nu$ vorkommt; für $\mathfrak{x}_{\nu+1}$ und $\mathfrak{y}_\nu$ sind beliebige in $\mathfrak{A}$ nicht vorkommende gebundene Variable einzusetzen. ⟨Inhaltliche Bedeutung („Komprehensionsaxiom"): Irgendeine beliebig gebaute Aussage $\mathfrak{A}$, in der die freie Variable $\mathfrak{a}_\nu$ vorkommt, bestimmt eine *Menge* $(\mathfrak{x}_{\nu+1})$, nämlich die Menge derjenigen $\mathfrak{a}_\nu$, auf welche sie zutrifft.⟩

Grundformel ist ferner jede Formel der Gestalt

$$\begin{aligned}&\{[\forall\, \mathfrak{x}_{\nu+1} (\mathfrak{a}_{\nu+2}\, \mathfrak{x}_{\nu+1} \supset \exists\, \mathfrak{y}_\nu\ \ \mathfrak{x}_{\nu+1}\, \mathfrak{y}_\nu)] \ \&\ \forall\, \mathfrak{z}_{\nu+1} \forall\, \mathfrak{u}_{\nu+1} [(\mathfrak{a}_{\nu+2}\, \mathfrak{z}_{\nu+1}\\ &\quad \&\ \mathfrak{a}_{\nu+2}\, \mathfrak{u}_{\nu+1} \ \&\ \neg\, \mathfrak{z}_{\nu+1} = \mathfrak{u}_{\nu+1}) \supset \neg\, \exists\, \mathfrak{v}_\nu (\mathfrak{z}_{\nu+1}\, \mathfrak{v}_\nu \ \&\ \mathfrak{u}_{\nu+1}\, \mathfrak{v}_\nu)]\}\\ &\supset \exists\, \mathfrak{w}_{\nu+1} \forall\, \mathfrak{r}_{\nu+1} \{\mathfrak{a}_{\nu+2}\, \mathfrak{r}_{\nu+1} \supset \exists\, \mathfrak{s}_\nu [\mathfrak{w}_{\nu+1}\, \mathfrak{s}_\nu \ \&\ \mathfrak{r}_{\nu+1}\, \mathfrak{s}_\nu\\ &\quad \&\ \neg\, \exists\, \mathfrak{t}_\nu (\mathfrak{w}_{\nu+1}\, \mathfrak{t}_\nu \ \&\ \mathfrak{r}_{\nu+1}\, \mathfrak{t}_\nu \ \&\ \neg\, \mathfrak{t}_\nu = \mathfrak{s}_\nu)]\};\end{aligned}$$

dabei ist für $\mathfrak{a}_{\nu+2}$ irgendeine freie Variable, für $\mathfrak{x}_{\nu+1}$, $\mathfrak{y}_\nu$, $\mathfrak{z}_{\nu+1}$, $\mathfrak{u}_{\nu+1}$, $\mathfrak{v}_\nu$, $\mathfrak{w}_{\nu+1}$, $\mathfrak{r}_{\nu+1}$, $\mathfrak{s}_\nu$ und $\mathfrak{t}_\nu$ sind irgendwelche voneinander verschiedene gebundene Variable einzusetzen. ⟨Inhaltliche Bedeutung („Auswahlaxiom"): Zu einer beliebigen Gesamtheit $(\mathfrak{a}_{\nu+2})$ von Mengen, die nicht leer sind, und die elementefremd sind, gibt es eine *Auswahlmenge* $(\mathfrak{w}_{\nu+1})$, die mit jeder der Mengen ein und nur ein Element $(\mathfrak{s}_\nu)$ gemeinsam hat.⟩

§ 2.

Widerspruchsfreiheitsbeweis.

2.1. Grundgedanken. Es soll gezeigt werden, daß das in § 1 angegebene formale System *widerspruchsfrei* ist, d. h. daß darin keine Formel der Gestalt $\mathfrak{A} \,\&\, \neg\, \mathfrak{A}$ hergeleitet werden kann.

Die Stufenlogik soll, inhaltlich gedeutet, für jeden beliebigen zugrunde gelegten (nicht leeren) Gegenstandsbereich gelten. Würde sie auf einen Widerspruch führen, so müßte dieser insbesondere bereits im Falle eines aus nur *einem einzigen* Element bestehenden Gegenstandsbereichs zustande kommen. In diesem Spezialfalle sind nun alle Aussagen *entscheidbar*; das beruht darauf, daß es in jeder Stufe nur *endlich viele* Objekte gibt, nämlich: in der Stufe 0 den einen Gegenstand, in der Stufe 1 die Menge, die den Gegenstand enthält, und die Menge, die ihn nicht enthält, also zwei verschiedene Mengen; in der Stufe 2 gibt es entsprechend vier verschiedene Mengen, usw. Es läßt sich nun leicht nachprüfen, daß in diesem Spezialfalle alle Aussagen „richtig" sind, ins besondere kein Widerspruch bewiesen werden kann.

2.2. Durchführung des Beweises. Es liege eine beliebige Herleitung aus der Stufenlogik (1.2) vor. Wir werden die Herleitung in vier Schritten *umformen*.

Wir führen zunächst die folgenden *Hilfszeichen* ein (diese vertreten „den einzigen Gegenstand der Stufe 0", die zwei „Mengen der Stufe 1", usw.):

$$\gamma_0^{(1)};\ \gamma_1^{(1)},\ \gamma_1^{(2)};\ \gamma_2^{(1)},\ \gamma_2^{(2)},\ \gamma_2^{(3)},\ \gamma_2^{(4)};$$

allgemein ϱ_ν Zeichen mit dem Index ν: $\gamma_\nu^{(1)}, \ldots, \gamma_\nu^{(\varrho_\nu)}$, wobei $\varrho_\nu = 2^{\varrho_\nu - 1}$ sei (für $\nu \geqq 1$).

2.2 1. Erster Umformungsschritt (Ersetzung der freien Variablen durch die γ).

Man nehme irgendeine Herleitungsformel $\mathfrak{A}$, die eine *freie Variable* $\mathfrak{a}_\nu$ enthält, vor und ersetze sie durch folgende Reihe von Ausdrücken: $\mathrm{Subst}\,\mathfrak{A}\left(\begin{smallmatrix}\mathfrak{a}_\nu\\ \gamma_\nu^{(1)}\end{smallmatrix}\right), \ldots, \mathrm{Subst}\,\mathfrak{A}\left(\begin{smallmatrix}\mathfrak{a}_\nu\\ \gamma_\nu^{(\varrho_\nu)}\end{smallmatrix}\right)$. Dieselbe Umformung führe man so oft durch, bis nirgends mehr eine freie Variable vorkommt; auch die neu entstehenden Ausdrücke sind also, soweit sie noch freie Variable enthalten, in derselben Weise weiter zu behandeln.

2.2 2. Zweiter Umformungsschritt (Ersetzung der gebundenen Variablen durch die γ).

Irgendein Teil irgendeines der beim ersten Schritt entstandenen Ausdrücke (bzw. der Ausgangsformeln, soweit diese vom ersten Schritt nicht betroffen wurden) habe die Gestalt $\forall\, \mathfrak{x}_\nu\, \mathfrak{A}$ bzw. $\exists\, \mathfrak{x}_\nu\, \mathfrak{A}$. Alsdann ersetze

man diesen durch die Konjunktion bzw. Disjunktion der Ausdrücke Subst $\mathfrak{A}\left(\begin{smallmatrix}\mathfrak{x}_\nu\\ \gamma_\nu^{(1)}\end{smallmatrix}\right), \ldots,$ Subst $\mathfrak{A}\left(\begin{smallmatrix}\mathfrak{x}_\nu\\ \gamma_\nu^{(\varrho_\nu)}\end{smallmatrix}\right)$. Dieselbe Umformung führe man so oft durch (auch wieder an den neu entstandenen Ausdrücken, soweit erforderlich), bis nirgends mehr eine gebundene Variable vorkommt. Man überlegt sich leicht, daß die *Reihenfolge* dieser Umformungen auf das Endergebnis keinerlei Einfluß hat.

2.2 3. Dritter Umformungsschritt (Einsetzung der Wahrheitswerte für die γ).

Wir führen zwei weitere *Hilfszeichen* ein: die „Wahrheitswerte" v ⟨für „das Wahre"⟩ und $\mathsf{\Lambda}$ ⟨für „das Falsche"⟩.

Irgendein Teil irgendeines der aus den Herleitungsformeln durch den ersten und zweiten Schritt hervorgegangenen Ausdrücke habe die Gestalt $\gamma_{\nu+1}^{(\sigma)}\,\gamma_\nu^{(\tau)}$. Man ersetze ihn nach der folgenden Anweisung durch v bzw. $\mathsf{\Lambda}$:

$\gamma_1^{(1)}\,\gamma_0^{(1)}$ wird ersetzt durch v, $\gamma_1^{(2)}\,\gamma_0^{(1)}$ durch $\mathsf{\Lambda}$; allgemein: Den Ausdrücken $\gamma_{\nu+1}^{(\lambda)}\,\gamma_\nu^{(\mu)}$ $(\nu \geqq 0;\ \lambda = 1, \ldots, \varrho_{\nu+1};\ \mu = 1, \ldots, \varrho_\nu)$ sind die Zeichen v und $\mathsf{\Lambda}$ in der Weise zuzuordnen, daß zu jeder möglichen Verteilung der Zeichen v und $\mathsf{\Lambda}$ auf die Zeichen γ_ν genau ein $\gamma_{\nu+1}$ gehört, dessen Verbindungen mit den γ_ν die betreffenden Werte v und $\mathsf{\Lambda}$ zugeteilt erhalten. Dies läßt sich machen, da die Anzahl der γ_ν gleich ϱ_ν, die Anzahl der möglichen Verteilungen von v und $\mathsf{\Lambda}$ auf diese also gleich $2^{\varrho_\nu} = \varrho_{\nu+1}$ gleich der Anzahl der $\gamma_{\nu+1}$ ist. ⟨Inhaltlicher Sinn: Die $\gamma_{\nu+1}$ sollen alle möglichen Mengen von γ_ν vertreten.⟩

Dieselbe Umformung führe man so oft durch, bis kein γ mehr vorkommt. Es konnte nämlich kein γ anders als in einer Verbindung $\gamma_{\nu+1}^{(\sigma)}\,\gamma_\nu^{(\tau)}$ auftreten (1.1 2).

2.2 4. Vierter Umformungsschritt (Ausrechnung der Wahrheitswerte).

Aus den Formeln der ursprünglichen Herleitung sind jetzt durchweg Ausdrücke hervorgegangen, die nur noch aus den Zeichen v und $\mathsf{\Lambda}$, verbunden durch die Verknüpfungszeichen $\neg$, &, $\vee$, $\supset$, $\supset\subset$ bestehen. Diese Ausdrücke werden nun in der aus der Aussagenlogik bekannten Weise „ausgerechnet" (d. h. man ersetzt v & v durch v, v & $\mathsf{\Lambda}$ durch $\mathsf{\Lambda}$ usw.), so daß schließlich für jeden Ausdruck nur noch ein einziges Zeichen v oder $\mathsf{\Lambda}$ dasteht.

2.2 5. Abschluß des Beweises. Ich behaupte nun: Die gemäß den angegebenen vier Schritten umgeformte Herleitung besteht nur noch aus Ausdrücken der Form v.

Beweis: Eine Grundformel der Aussagenlogik (1. 2 1) mußte offenbar stets den Wert $\mathfrak{v}$ ergeben; denn *gleiche* Teilformeln wurden bei allen Schritten in *gleicher* Weise verändert, und welchen Wahrheitswert sie auch beim dritten und vierten Schritt erhielten, immer mußte beim vierten Schritt zum Schluß als Gesamtwert $\mathfrak{v}$ herauskommen, da eben die Ausgangsformel „immer richtig" im Sinne der Aussagenlogik war.

Wenn ferner die Formeln $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ bei der Umformung lauter $\mathfrak{v}$ ergeben haben, so müssen auch alle aus der Formel $\mathfrak{B}$ entstandenen Ausdrücke zum Schluß zu $\mathfrak{v}$ geworden sein. Sei nämlich $\mathfrak{B}^*$ irgendeiner der aus $\mathfrak{B}$ beim ersten Schritt hervorgegangenen Ausdrücke. Dann mußte offenbar unter den aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ beim ersten Schritt entstandenen Ausdrücken mindestens ein Paar von Ausdrücken der Form $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{A}^* \supset \mathfrak{B}^*$ vorhanden sein. Nun nahm $\mathfrak{A}^*$ zum Schluß den Wert $\mathfrak{v}$ an, ebenso $\mathfrak{A}^* \supset \mathfrak{B}^*$; das ist nur möglich, indem auch $\mathfrak{B}^*$ zu $\mathfrak{v}$ geworden ist, denn $\mathfrak{v} \supset \mathfrak{v}$ gibt $\mathfrak{v}$. (Dabei ist wesentlich, daß gleichlautende Teile verschiedener Ausdrücke beim zweiten bis vierten Schritt in *gleicher* Weise umgeformt wurden.)

Eine Grundformel der Gestalt $(\forall\, \mathfrak{x}_\nu\, \mathfrak{A}) \supset \mathrm{Subst}\, \mathfrak{A} \left(\begin{smallmatrix} \mathfrak{x}_\nu \\ \mathfrak{a}_\nu \end{smallmatrix}\right)$ ergab beim ersten Schritt Ausdrücke von der Form $(\forall\, \mathfrak{x}_\nu\, \mathfrak{A}^*) \supset \mathrm{Subst}\, \mathfrak{A}^* \left(\begin{smallmatrix} \mathfrak{x}_\nu \\ \gamma_\nu^{(\sigma)} \end{smallmatrix}\right)$; $1 \leqq \sigma \leqq \varrho_\nu$. Beim zweiten Schritt wurde hieraus

$$\left[\mathrm{Subst}\, \mathfrak{A}^{**} \left(\begin{smallmatrix} \mathfrak{x}_\nu \\ \gamma_\nu^{(1)} \end{smallmatrix}\right) \,\&\, \ldots \,\&\, \mathrm{Subst}\, \mathfrak{A}^{**} \left(\begin{smallmatrix} \mathfrak{x}_\nu \\ \gamma_\nu^{(\varrho_\nu)} \end{smallmatrix}\right)\right] \supset \mathrm{Subst}\, \mathfrak{A}^{**} \left(\begin{smallmatrix} \mathfrak{x}_\nu \\ \gamma_\nu^{(\sigma)} \end{smallmatrix}\right).$$

Da ein Glied der eckigen Klammer gleich dem rechtsstehenden Ausdruck sein muß, ergab die Ausrechnung (dritter und vierter Schritt) in jedem Falle den Wert $\mathfrak{v}$.

Bei einer Grundformel für $\exists$ (1. 2 2) schließen wir ganz entsprechend.

Die $\forall$-Schlußregel (1. 2 2): Nach dem zweiten Schritt hatte man statt $\mathfrak{A} \supset \forall\, \mathfrak{x}_\nu\, \mathrm{Subst}\, \mathfrak{B} \left(\begin{smallmatrix} \mathfrak{a}_\nu \\ \mathfrak{x}_\nu \end{smallmatrix}\right)$ Ausdrücke der Form

$$\mathfrak{A}^* \supset \left[\mathrm{Subst}\, \mathfrak{B}^* \left(\begin{smallmatrix} \mathfrak{a}_\nu \\ \gamma_\nu^{(1)} \end{smallmatrix}\right) \,\&\, \ldots \,\&\, \mathrm{Subst}\, \mathfrak{B}^* \left(\begin{smallmatrix} \mathfrak{a}_\nu \\ \gamma_\nu^{(\varrho_\nu)} \end{smallmatrix}\right)\right].$$

Nun kamen unter den aus der Formel $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ durch den ersten und zweiten Schritt hervorgegangenen Ausdrücken offenbar die sämtlichen Ausdrücke $\mathfrak{A}^* \supset \mathrm{Subst}\, \mathfrak{B}^* \left(\begin{smallmatrix} \mathfrak{a}_\nu \\ \gamma_\nu^{(\sigma)} \end{smallmatrix}\right)$ — $\sigma = 1, \ldots, \varrho_\nu$ — vor. Wenn nun diese beim dritten und vierten Schritt alle den Wert erhielten, so mußte auch der zuvor genannte Ausdruck denselben Wert annehmen. (Ent-

weder wurde nämlich $\mathfrak{A}^*$ zu $\wedge$, dann ist dies erfüllt, oder $\mathfrak{A}^*$ wurde zu $\vee$, dann müssen sämtliche Ausdrücke Subst $\mathfrak{B}^* \binom{\mathfrak{a}_\nu}{\gamma_\nu^{(\sigma)}}$ ebenfalls den Wert $\vee$ erhalten haben, und damit auch deren Konjunktion.)

Bei Anwendungsstellen der $\exists$-Schlußregel schließen wir ganz entsprechend.

Eine Grundformel gemäß 1. 2 3 ergab beim ersten Schritt Ausdrücke von der Form $[\forall \mathfrak{x}_\nu (\gamma_{\nu+1}^{(\sigma)} \mathfrak{x}_\nu \supset\subset \gamma_{\nu+1}^{(\tau)} \mathfrak{x}_\nu)] \supset \gamma_{\nu+1}^{(\sigma)} = \gamma_{\nu+1}^{(\tau)}$; $1 \leqq \sigma \leqq \varrho_{\nu+1}$; $1 \leqq \tau \leqq \varrho_{\nu+1}$. Die eckige Klammer konnte nur dann beim dritten und vierten Schritt zu $\vee$ werden, wenn alle beim zweiten Schritt aufgetretenen Konjunktionsglieder $\gamma_{\nu+1}^{(\sigma)} \gamma_\nu^{(\mu)} \supset\subset \gamma_{\nu+1}^{(\tau)} \gamma_\nu^{(\mu)}$, für $\mu = 1, \ldots, \varrho_\nu$, den Wert $\vee$ erhielten; das war wiederum nur möglich, wenn σ dieselbe Zahl wie τ war. Alsdann ergab aber auch $\gamma_{\nu+1}^{(\sigma)} = \gamma_{\nu+1}^{(\tau)}$, d. h. (1. 1 3) $\forall \mathfrak{y}_{\nu+2} (\mathfrak{y}_{\nu+2} \gamma_{\nu+1}^{(\sigma)} \supset \mathfrak{y}_{\nu+2} \gamma_{\nu+1}^{(\tau)})$, offenbar den Wert $\vee$. Also erhielt man beim vierten Schritt in jedem Falle den Wert $\vee$. (Denn $\vee \supset \vee$ gibt $\vee$, und wenn die eckige Klammer den Wert $\wedge$ ergab, wurde der Gesamtwert ja stets $\vee$.)

Eine aus dem „Komprehensionsaxiom" sich ergebende Grundformel (1. 2 4) lieferte nach dem ersten und zweiten Schritt Ausdrücke der Gestalt:

$$\left[\left(\gamma_{\nu+1}^{(1)} \gamma_\nu^{(1)} \supset\subset \text{Subst } \mathfrak{A}^* \binom{\mathfrak{a}_\nu}{\gamma_\nu^{(1)}}\right) \& \ldots \& \left(\gamma_{\nu+1}^{(1)} \gamma_\nu^{(\varrho_\nu)} \supset\subset \text{Subst } \mathfrak{A}^* \binom{\mathfrak{a}_\nu}{\gamma_\nu^{(\varrho_\nu)}}\right)\right] \vee$$

$$\ldots \vee \left[\left(\gamma_{\nu+1}^{(\varrho_\nu+1)} \gamma_\nu^{(1)} \supset\subset \text{Subst } \mathfrak{A}^* \binom{\mathfrak{a}_\nu}{\gamma_\nu^{(1)}}\right) \&\right.$$

$$\left. \ldots \& \left(\gamma_{\nu+1}^{(\varrho_\nu+1)} \gamma_\nu^{(\varrho_\nu)} \supset\subset \text{Subst } \mathfrak{A}^* \binom{\mathfrak{a}_\nu}{\gamma_\nu^{(\varrho_\nu)}}\right)\right].$$

Nun mögen sich beim dritten und vierten Schritt für die Ausdrücke Subst $\mathfrak{A}^* \binom{\mathfrak{a}_\nu}{\gamma_\nu^{(\mu)}}$ irgendwelche beliebigen Wahrheitswerte ergeben haben: Immer gibt es unter den eckigen Klammern genau *eine*, in der die für die links stehenden Ausdrücke $\gamma_{\nu+1}^{(\sigma)} \gamma_\nu^{(\tau)}$ (für $\tau = 1, \ldots, \varrho_\nu$) beim dritten Schritt einzusetzenden Wahrheitswerte mit den für die rechts daneben-stehenden Ausdrücke Subst $\mathfrak{A}^* \binom{\mathfrak{a}_\nu}{\gamma_\nu^{(\tau)}}$ sich ergebenden Wahrheitswerten sämtlich übereinstimmen. Denn so waren ja gerade die Wahrheitswerte für die $\gamma\gamma$-Verbindungen unter 2. 2 3 festgesetzt worden, daß zu jeder möglichen Verteilung von Wahrheitswerten auf die Zahlen 1 bis ϱ_ν genau ein $\gamma_{\nu+1}$ gehören sollte, dessen Verbindungen mit den γ_ν eben diese Wahrheitswerte zugeteilt erhielten.

Daraus ergibt sich, daß die betreffende eckige Klammer bei der Ausrechnung den Wert v erhalten mußte; und damit wurde dieser auch der gesamten Disjunktion zuteil.

Eine aus dem „Auswahlaxiom" sich ergebende Grundformel lieferte beim ersten Schritt Ausdrücke der gleichen Gestalt, nur mit einem $\gamma_{\nu+2}^{(\mu)}$ statt $\mathfrak{a}_{\nu+2}$. Vergegenwärtigen wir uns das Aussehen eines solchen Ausdrucks nach dem zweiten Schritt, wobei also alle $\forall$-Ausdrücke durch gewisse Konjunktionen, alle $\exists$-Ausdrücke durch gewisse Disjunktionen ersetzt zu denken sind. Man sieht nun leicht, wenn man sich den *inhaltlichen Sinn* der einzelnen Teilausdrücke vor Augen hält, daß der Gesamtausdruck „wahr" ist, ⟨da nämlich das Auswahlaxiom in endlichen Bereichen trivialerweise gilt,⟩ d. h. formal, daß er den Wert v erhalten mußte. Etwas näher ausgeführt: Wäre der Wert $\mathsf{\Lambda}$, so müßte das Vorderglied der Gesamtimplikation den Wert v, das Hinterglied den Wert $\mathsf{\Lambda}$ haben. Aus ersterem folgt zunächst: Für jedes $\gamma_{\nu+1}^{(\sigma)}$ $(\sigma = 1, \ldots, \varrho_{\nu+1})$ hat $\gamma_{\nu+2}^{(\mu)}\,\gamma_{\nu+1}^{(\sigma)} \supset (\gamma_{\nu+1}^{(\sigma)}\,\gamma_{\nu}^{(1)} \vee \ldots \vee \gamma_{\nu+1}^{(\sigma)}\,\gamma_{\nu}^{(\varrho_\nu)})$ den Wert v, das besagt: Wenn $\gamma_{\nu+2}^{(\mu)}\,\gamma_{\nu+1}^{(\sigma)}$ den Wert v hat, so hat auch mindestens einer der Ausdrücke $\gamma_{\nu+1}^{(\sigma)}\,\gamma_{\nu}^{(\tau)}$ $(\tau = 1, \ldots, \varrho_\nu)$ den Wert v. Entsprechend ergibt sich daraus, daß auch der zweite Teil des Vordergliedes der Gesamtimplikation den Wert v hat, gleichfalls dessen inhaltliche Übersetzung für die γ, d. h.: Zu zwei verschiedenen $\gamma_{\nu+1}$, für die beide $\gamma_{\nu+2}^{(\mu)}\,\gamma_{\nu+1}$ den Wert v hat, gibt es kein γ_ν, daß mit jedem der beiden verbunden den Wert v ergibt. Nun bilden wir eine „Auswahlmenge", d. h. wir wählen zu jedem $\gamma_{\nu+1}^{(\sigma)}$, für das $\gamma_{\nu+2}^{(\mu)}\,\gamma_{\nu+1}^{(\sigma)}$ den Wert v hat, irgendeines der $\gamma_\nu^{(\tau)}$, für die $\gamma_{\nu+1}^{(\sigma)}\,\gamma_\nu^{(\tau)}$ den Wert v hat, aus, und betrachten dasjenige $\gamma_{\nu+1}^{(\lambda)}$, das mit diesen ausgewählten $\gamma_\nu^{(\tau)}$ verbunden, und mit keinen anderen, den Wert v ergibt. Ein solches $\gamma_{\nu+1}^{(\lambda)}$ muß es ja geben (2. 2 3). Durch Betrachtung des dieser „Auswahlmenge" entsprechenden Gliedes der aus $\exists\,\mathfrak{w}_{\nu+1}\ldots$ entstandenen Disjunktion ist nunmehr leicht einzusehen, daß dieses den Wert v erhalten mußte; und daher konnte auch der Gesamtausdruck nicht den Wert $\mathsf{\Lambda}$, sondern nur den Wert v bekommen.

Damit ist gezeigt, daß die vorgelegte Herleitung durch die vier Umformungsschritte in lauter Ausdrücke der Form v übergegangen sein muß. Hieraus folgt ohne weiteres die *Widerspruchsfreiheit*, denn eine Formel der Gestalt $\mathfrak{A}\,\&\,\neg\,\mathfrak{A}$ müßte offenbar bei den Umformungen den Wert $\mathsf{\Lambda}$ angenommen haben.

2. 3. Schlußbemerkungen. Alle beim Beweise angestellten Überlegungen ergeben sich fast von selbst, wenn man sich den *inhaltlichen Sinn* der γ (2. 1, 2. 2), sowie der Formeln und Schlußregeln (§ 1) vor

Augen hält. Es ist dann auch leicht einzusehen, daß sich der ganze Beweis unschwer auf den Fall der Zugrundelegung eines *beliebigen endlichen Gegenstandsbereichs* ausdehnen läßt. Es bleibt ja auch dann die Zahl der möglichen Mengen in jeder Stufe endlich. Daraus ergibt sich dann, daß die Stufenlogik auch widerspruchsfrei bleibt, wenn man Axiome hinzunimmt, welche die Existenz einer gewissen endlichen Anzahl von Gegenständen fordern. Verlangt man jedoch das Vorhandensein *unendlich vieler* Gegenstände („Unendlichkeitsaxiom"), so ergeben sich ganz andersartige, heute noch nicht geklärte Verhältnisse.

Der obige Widerspruchsfreiheitsbeweis ist selbstverständlich völlig „*finit*" im Sinne der Hilbertschen Beweistheorie; es kommen nur Schlüsse und Begriffe elementarster Art vor.

(Eingegangen am 22. Januar 1936.)

Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series.

By

A. E. Ingham (Cambridge).

1. This paper is primarily concerned with Dirichlet's series of the type

$$f(s) = f(\sigma + ti) = \sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s} = \sum_1^\infty a_n l_n^{-s} \qquad (l_n = e^{\lambda_n}) \tag{1}$$

in which the exponents λ_n satisfy

$$\lambda_n - \lambda_{n-1} \geqq \gamma > 0 \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

The first aim is to obtain inequalities to take the place of the familiar relationships which hold between the coefficients a_n and the function $f(s)$ in the special case $\lambda_n = n\gamma$, when the series is a power series in $e^{-\gamma s}$ and $f(s)$ a periodic function with period $2\pi i/\gamma$. The basic inequalities may be stated, without essential loss of content, for trigonometrical polynomials (with exponents λ_n). These inequalities (Theorems 1 and 2) are set out in § 2 and § 4.

The paper arises out of an attempt to obtain a satisfactory analogue, in the sense explained in a recent paper[1]), of the well known Tauberian theorem of Hardy and Littlewood for 'high indices'. Theorem 1 is applied, in § 5, to the proof of such an analogue (Theorem 3), and, in § 6, to the proof of a theorem of Pólya on the existence of singular points on the line of convergence of Dirichlet's series of the above type. A simple application to a special class of almost periodic functions follows in § 7.

Some of the results of this paper have affinities with recent work of N. Wiener and Paley, but the point of view is different and it is not

[1]) Ingham, 1 (particularly 464—465 and 479,2)).

I take this opportunity of correcting and amplifying the allusions to the work of Karamata in the footnote to p. 465 of this paper, which are in certain respects inaccurate or misleading. In the first place, the words 'the case $\theta = 1$ of' in the third line from the bottom of the page were inserted through inadvertence and should be deleted. [In deducing Karamata's Satz B′ (with specialised conditions on $G(s)$) from Theorem I of my paper we take $\theta = T$]. Secondly there should have been a reference to Karamata's note 1, which contains a very clear statement of the analogy between the two classes of Tauberian theorems, at any rate for theorems of the type represented by Theorem III of my paper.

easy to analyse the connections in detail[2]). Here no systematic use is made of the Lebesgue integral, and the results are in this respect much less general than those of Wiener and Paley. On the other hand, theorems are here given in which the lower bound (π) of certain relevant classes of numbers is determined exactly (though it remains undecided, except in one case, whether this bound is attained or not). The question of the 'best possible' nature of the results is discussed in § 3 and § 8.

2. **Theorem 1.** *Let*

$$f(t) = \sum_{n=N}^{N'} a_n e^{-\lambda_n t i} = \sum_n a_n e^{-\lambda_n t i}, \tag{2}$$

where the λ_n are real and satisfy

$$\lambda_n - \lambda_{n-1} \geqq \gamma > 0 \qquad (N < n \leqq N'), \tag{3}$$

and let

$$T = \frac{\pi + \varepsilon}{\gamma} > \frac{\pi}{\gamma}.$$

Then

$$|a_n| \leqq \frac{\mathfrak{A}(\varepsilon)}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|\, dt \qquad (N \leqq n \leqq N'), \tag{4}$$

$$\sum_n |a_n|^2 \leqq \frac{\mathfrak{A}(\varepsilon)}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2\, dt, \tag{5}$$

where $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ is a function of ε only, which has a finite value for every $\varepsilon > 0$, and which may be chosen so that $\varepsilon\, \mathfrak{A}(\varepsilon) \to \mathfrak{A}$ as $\varepsilon \to +0$, where $\mathfrak{A}$ is a finite absolute constant.

There are corresponding results for infinite series converging uniformly over the interval $-T \leqq t \leqq T$.

The last part is an immediate extension, and we may confine ourselves to trigonometrical polynomials of the form (2). We may take γ and T to be any convenient positive numbers whose product is $\pi + \varepsilon$, since the substitution $t \to ct$ ($c > 0$) merely changes γ to γc and T to T/c.

Let $k(t)$ be any function absolutely integrable over $(-\infty, \infty)$ and let

$$K(u) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t)\, e^{-ut\,i}\, dt. \tag{6}$$

Then

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t)\, f(t)\, e^{\lambda_n t i}\, dt = \sum_m a_m K(\lambda_m - \lambda_n), \tag{7}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t)\, |f(t)|^2\, dt = \sum_{m,\,n} a_m \bar{a}_n K(\lambda_m - \lambda_n). \tag{8}$$

[2]) Wiener, 1; Paley and Wiener, 1, Chapter VII.

Take $T = \pi$, $\gamma = 1 + \delta$ $(\delta = \varepsilon/\pi)$, and

$$k(t) = \begin{cases} \cos \tfrac{1}{2} t & (|t| \leqq \pi), \\ 0 & (|t| > \pi). \end{cases}$$

Then

$$K(u) = \frac{4 \cos u\pi}{1 - 4u^2}.$$

Since, by (3), $|\lambda_m - \lambda_n| \geqq |m-n|\gamma = |m-n|(1+\delta) > 1$ $(m \neq n)$ we have (the dash indicating the omission of the term $m = n$)

$$\sum_m{}' |K(\lambda_m - \lambda_n)| \leqq \sum_m{}' \frac{4}{4(m-n)^2\gamma^2 - 1} < \frac{8}{\gamma^2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{4r^2 - 1} \tag{9}$$

$$= \frac{4}{\gamma^2} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2r-1} - \frac{1}{2r+1} \right) = \frac{4}{\gamma^2} = \frac{K(0)}{(1+\delta)^2}.$$

Taking $n = \nu$ in (7), where $|a_\nu|$ is the greatest $|a_n|$, we deduce

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} k(t) f(t) e^{\lambda_\nu t i} \, dt \right| \geqq |a_\nu K(0)| - |a_\nu| \sum_m{}' |K(\lambda_m - \lambda_\nu)|,$$

whence, by (9) and the definition of $k(t)$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \, dt \geqq |a_\nu| \left(4 - \frac{4}{(1+\delta)^2} \right) = \max |a_n| \cdot \frac{4\delta(2+\delta)}{(1+\delta)^2},$$

and this is (4) with

$$\mathfrak{A}(\varepsilon) = \frac{2\pi(1+\delta)^2}{4\delta(2+\delta)} = \frac{\pi(\pi+\varepsilon)^2}{2\varepsilon(2\pi+\varepsilon)}.$$

Again, since $2|a_m \bar{a}_n| \leqq |a_m|^2 + |a_n|^2$ and $K(\lambda_m - \lambda_n) = K(\lambda_n - \lambda_m)$, we deduce from (8) that

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t) |f(t)|^2 \, dt = \sum_n |a_n|^2 K(0) + \vartheta \sum_{m,n}{}' \frac{|a_m|^2 + |a_n|^2}{2} |K(\lambda_m - \lambda_n)|$$

$$= \sum_n |a_n|^2 \left(K(0) + \vartheta \sum_m{}' |K(\lambda_m - \lambda_n)| \right) \quad (|\vartheta| \leqq 1), \tag{10}$$

whence, by (9) and the definition of $k(t)$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt \geqq \sum_n |a_n|^2 \left(4 - \frac{4}{(1+\delta)^2} \right) = \frac{4\delta(2+\delta)}{(1+\delta)^2} \sum_n |a_n|^2,$$

which gives (5) with the same $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ as before.

The function $k(t)$ may be chosen in various ways without affecting the principle of the above argument. Thus we may take $\gamma = \pi + \varepsilon$, $T = 1$, and

$$k(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & (|t| \leqq 1) \\ 0 & (|t| > 1) \end{cases},$$

which gives

$$K(u) = \frac{4(\sin u - u\cos u)}{u^3}.$$

A suitable analogue of (9) may be derived from the inequality

$$|uK(u)| \leqq |r\pi K(r\pi)| \qquad (|u| \geqq r\pi;\ r \text{ any positive integer})$$

(which is easily verified), and we deduce (4) and (5) with

$$\mathfrak{A}(\varepsilon) = \frac{3(\pi+\varepsilon)}{2\varepsilon}.$$

There is another argument, based on a different idea, which is of interest, though it seems to apply only to (5). Take $\gamma = 1$, $T = \pi + \varepsilon$, and

$$k(t) = k_\varepsilon(t) = \frac{1+\cos t}{(\pi^2 - t^2)^2}\{(\pi+\varepsilon)^2 - t^2\} = 2\left(\frac{\cos\frac{1}{2}t}{\pi^2 - t^2}\right)^2\{(\pi+\varepsilon)^2 - t^2\}$$

(an integral function of t). Then $K(u) = K_\varepsilon(u)$ vanishes for $|u| \geqq 1$, as may be proved by direct (real variable) calculation, or (more simply) by an application of Cauchy's theorem to a semicircular contour with its diameter along the real axis in the t-plane. Thus (8) gives

$$(11) \qquad K_\varepsilon(0)\sum_n |a_n|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} k_\varepsilon(t)\,|f(t)|^2\,dt \leqq \int_{-\pi-\varepsilon}^{\pi+\varepsilon} k_\varepsilon(t)\,|f(t)|^2\,dt,$$

since $k_\varepsilon(t) \leqq 0$ outside the interval $(-\pi-\varepsilon, \pi+\varepsilon)$. Now in this interval we have

$$k_\varepsilon(t) = \frac{1}{2(\pi+|t|)^2}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}(\pi-|t|)}{\frac{1}{2}(\pi-|t|)}\right)^2\{(\pi+\varepsilon)^2 - t^2\} \leqq \frac{(\pi+\varepsilon)^3}{2\pi^2}.$$

Also

$$K_\varepsilon(0) = \frac{\varepsilon(2\pi+\varepsilon)}{2\pi},$$

as is easily verified by (real or complex variable) calculation. Hence (11) implies (5) with

$$\mathfrak{A}(\varepsilon) = \frac{2(\pi+\varepsilon)^3}{\pi\varepsilon(2\pi+\varepsilon)}.$$

3. By considering the (periodic) function

$$(1+e^{-s})^{-k} = \sum_0^\infty a_n e^{-n\sigma}e^{-nti} \quad (s = \sigma + ti,\ \sigma > 0),$$

where k is an integer greater than 1, and making $\sigma \to +0$, we see at once that the π of Theorem 1 cannot be replaced by any smaller absolute constant. A more delicate question is whether the ε can be replaced by 0 and $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ by an absolute constant $\mathfrak{A}$ (as in the case of periodic functions). We return to this in § 8, where we explain also the general principles which govern the choice of $k(t)$ in the foregoing proofs.

4. The inequality (5) corresponds to Bessel's inequality for periodic functions. There is an inequality in the opposite sense constituting with (5) a counterpart of the Parseval identity. This, however, is easier, and the number π does not play the same critical rôle.

Theorem 2. *If $f(t)$ satisfies the conditions of Theorem* 1, *and if*

$$T = \frac{\tau}{\gamma} > 0,$$

then

$$\sum_n |a_n|^2 \geqq \frac{\mathfrak{a}(\tau)}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 \, dt,$$

where $\mathfrak{a}(\tau)$ is a function of τ only which is > 0 for every $\tau > 0$.

For convenience we use the formulae of the first proof of Theorem 1, though in fact the function $k(t)$ need not be chosen with the same care.

If $\tau \geqq \pi$, we take $T = \frac{1}{2}\pi$ (as we may), so that $\gamma \geqq 2$. Then from (10) and (9) we deduce

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos \tfrac{1}{2} t \, |f(t)|^2 \, dt \leqq \sum_n |a_n|^2 \left(4 + \frac{4}{\gamma^2}\right) \leqq 5 \sum_n |a_n|^2,$$

whence

$$\sum_n |a_n|^2 \geqq \frac{1}{10} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} |f(t)|^2 \, dt = \frac{\pi}{10} \cdot \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 \, dt.$$

If $\tau < \pi$, we infer from the case $\tau = \pi$ of what we have just proved that

$$\sum_n |a_n|^2 \geqq \frac{\pi}{10} \cdot \frac{\gamma}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\gamma}}^{\frac{\pi}{\gamma}} |f(t)|^2 \, dt \geqq \frac{\tau}{10} \cdot \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 \, dt.$$

The two inequalities together establish the theorem with $\mathfrak{a}(\tau) = \frac{1}{10} \min(\pi, \tau)$.

5. We pass now to the application of Theorem 1 to the analogue of the 'high indices' Tauberian theorem of Hardy and Littlewood.

Theorem 3. *Suppose that the Dirichlet's series* (1) *and the function* (s) *defined by it satisfy the following conditions:*

(i) $\lambda_n - \lambda_{n-1} \geqq \gamma > 0 \qquad (n > n_0)$;

(ii) *the series is convergent for $\sigma > 0$;*

(iii) *for some fixed* $T > \pi/\gamma$, $f(s)$ *is bounded in the rectangle* $0 < \sigma \leqq 1$, $-T \leqq t \leqq T$, *or, more generally, the mean value*

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(\sigma + ti)|^2\, dt \tag{12}$$

is bounded as $\sigma \to +0$;

(iv) $f(s)$ *is regular at* $s = 0$, *or, more generally, the function*

$$\frac{f(s) - f(0)}{s} \tag{13}$$

(*suitably defined on the line* $\sigma = 0$) *is continuous in the region* $\sigma \geqq 0$, $-\delta \leqq t \leqq \delta$, *for some* $\delta > 0$.

Then $\sum_1^\infty a_n$ *converges to the sum* $f(0)$.

In proving the theorem we may suppose (by considering $f(s) - \sum_1^{n_0-1} a_n e^{-\lambda_n s}$ in place of $f(s)$) that (i) holds for all $n > 1$. Writing $\gamma T = \pi - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ and applying Theorem 1 (5) to $f(\sigma + ti)$ with a fixed $\sigma > 0$, we obtain (since the Dirichlet's series is uniformly convergent over the range $-T \leqq t \leqq T$ for this σ)

$$\sum_1^\infty |a_n|^2 e^{-2\lambda_n \sigma} \leqq \frac{\mathfrak{A}(\varepsilon)}{2T}\int_{-T}^{T} |f(\sigma + ti)|^2\, dt.$$

Making $\sigma \to +0$, we deduce, by (iii), that $\Sigma |a_n|^2$ is convergent. Thus (i), (ii), (iii) imply that $a_n \to 0$ as $n \to \infty$. This is equivalent, by (i), to

$$a_n = o\left(\frac{l_n - l_{n-1}}{l_n}\right) \qquad (l_n = e^{\lambda_n}).$$

Introducing now the condition (iv), we can complete the proof by an appeal to either Theorem 1 (l) or Theorem 3 (l) (i) of my paper **1**. For the conditions of these theorems are satisfied with $\theta = 1$, $\Theta = 0$ [in 1 (l)], an arbitrarily small K [in 3 (l)], and δ in place of T.

5. 1. If we compare Theorem 3 with earlier theorems of the same general character (e. g. Theorems 1 (l) and 3 (l) of the paper just quoted), we see that its distinguishing features are the presence of the condition (i) (which is equivalent to $l_n/l_{n-1} \geqq e^\gamma > 1$) and the absence of any explicit restriction on a_n. (The condition on $f(s)$ has been separated into the general condition (iii) and the local condition (iv) merely for convenience and greater generality.) The earlier theorems embodied non-trivial conclusions, of 'O' type (in general), for every $T > 0$, which in some cases [e. g. in 3 (l)] merged into 'o' conclusions when $T \to \infty$. Here, however,

there is an abrupt change as T passes through the critical value π/γ. The theorem breaks down completely if T falls below this value (as is obvious from the example of § 3, in which $|a_n| \sim n^{k-1}/(k-1)!$ as $n \to \infty$), but a 'o' result appears as soon as T exceeds it.

5.2. With a view to possible generalisations of Theorem 3 we note that the proof may be based on the inequality (4) of Theorem 1 in place of the inequality (5). We leave the condition (iv) out of account in the first instance, and concentrate our attention on the proposition (established in the course of the above proof) that the conditions (i), (ii), (iii) imply that $a_n \to 0$; and in order to present the argument in its simplest form we shall first suppose (iii) replaced by the more special hypothesis that $f(s)$ (suitably defined on the line $\sigma = 0$) is continuous (and therefore uniformly continuous) in the rectangle $0 \leqq \sigma \leqq 1$, $-T \leqq t \leqq T$ (for some fixed $T > \pi/\gamma$). In this case

$$(14) \qquad \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(\sigma + ti) - f(\sigma' + ti)|\,dt \to 0 \text{ as } \sigma, \sigma' \to +0,$$

rom which we deduce, applying (4) to the function

$$f(\sigma + ti) - f(\sigma' + ti) = \sum_1^\infty a_n (e^{-\lambda_n \sigma} - e^{-\lambda_n \sigma'}) e^{-\lambda_n ti},$$

and putting $\sigma = \lambda_n^{-1}$, $\sigma' = 2\lambda_n^{-1}$, that $|a_n(e^{-1} - e^{-2})| \to 0$ as $n \to \infty$, i. e. $a_n \to 0$ as required. The argument may be extended to the case in which $f(s)$ is bounded in $0 < \sigma \leqq 1$, $-T \leqq t \leqq T$, by an appeal to the well known theorem of Fatou on the existence of boundary values of bounded analytic functions. The analogy of power series suggests that the conclusion would remain valid if (iii) were replaced by the boundedness of

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(\sigma + ti)|\,dt$$

(for a fixed $T > \pi/\gamma$) as $\sigma \to +0$ (a wider condition in virtue of Schwarz's inequality). This would certainly be so if from this hypothesis we could infer (14), or even a similar relation with T replaced by a T' between π/γ and T. Such an inference seems highly plausible, but I am not able to quote any known result which is immediately applicable.

Generalisations of the condition (iv), of a 'real variable' character, have been considered in similar contexts by other writers [3]), and will not be further discussed here.

[3]) M. Riesz, 1 (Satz II); Karamata, 2.

6. Instead of generalising the conditions of Theorem 3 we might specialise them for the sake of simplicity of statement, for example by replacing (iii) and (iv) by the continuity of the function (13) for $\sigma \geqq 0$, $-T \leqq t \leqq T\,(T > \pi/\gamma)$, or by the still more special hypothesis that $f(s)$ is regular along the stretch $-\pi/\gamma \leqq t \leqq \pi/\gamma$ of the line $\sigma = 0$. The latter might seem to be the natural 'practical' condition, but if it is adopted the conclusion of the theorem, namely that the Dirichlet's series is convergent at the point $s = 0$, can be replaced by the stronger assertion that this point actually lies in the half-plane of convergence. This is an immediate consequence of the following known result — a particular case of an important theorem due to Pólya [4]):

If

$$\varliminf_{n\to\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \geqq \gamma > 0,$$

every closed interval of length $2\pi/\gamma$ *on the line of convergence of the Dirichlet's series* (1) *contains a singular point of the function* $f(s)$ *defined by the series.*

It is of interest to note that Pólya's theorem (in the special form quoted) may be deduced very simply from Theorem 1 [5]). Assuming the result false, we may suppose (by a linear change of the variable s) that $\sigma = 0$ is the line of convergence of the series (1), and that $f(s)$ has no singularity on the segment $-\pi/\gamma \leqq t \leqq \pi/\gamma$ of this line. Next we may suppose that $\varliminf (\lambda_n - \lambda_{n-1}) > \gamma$ (otherwise take a smaller γ near enough to the old to ensure that $f(s)$ remains regular along the slightly extended segment $-\pi/\gamma \leqq t \leqq \pi/\gamma$ of $\sigma = 0$). Then we shall have $\lambda_n - \lambda_{n-1} \geqq \gamma$ for all sufficiently large n, and we may suppose (by subtracting a finite number of terms) that this holds for all $n > 1$. And we may now take $\gamma = 1$ (by a change of variable).

Having made these simplifying assumptions, we choose $\varepsilon > 0$ so small that $f(s)$ is regular in the closed rectangle $-3\varepsilon \leqq \sigma \leqq 1 + 3\varepsilon$, $|t| \leqq \pi + 4\varepsilon$. Let M be the upper bound of $|f(s)|$ in this rectangle. Consider $f^{(q)}(s)$, where q is any positive integer or zero. For $\sigma > 0$ we have the convergent expansion

$$f^{(q)}(s) = \sum_1^\infty (-1)^q a_n \lambda_n^q e^{-\lambda_n s}.$$

For $0 < \sigma \leqq 1$, $|t| \leqq \pi + \varepsilon$, we have, C denoting the circle $|z| = 3\varepsilon$,

$$|f^{(q)}(s)| = \left| \frac{q!}{2\pi i} \int_C \frac{f(s+z)}{z^{q+1}}\, dz \right| \leqq \frac{q!\, M}{(3\varepsilon)^q}.$$

---

[4]) Pólya, 1; V. Bernstein, 1, 140.

[5]) The proof which follows has some features in common with the proof given by Carlson and Landau (1) of Fabry's gap theorem and its generalisations.

Applying Theorem 1 [(4) or (5)] to $f^{(q)}(\sigma + t\,i)$, we infer that

$$|(-1)^q a_n \lambda_n^q e^{-\lambda_n \sigma}| \leqq \mathfrak{A}(\varepsilon) \frac{q!\,M}{(3\varepsilon)^q} \qquad (0 < \sigma \leqq 1),$$

whence, making $\sigma \to 0$ and rearranging,

$$|a_n| \frac{(2\lambda_n \varepsilon)^q}{q!} \leqq \mathfrak{A}(\varepsilon) M \left(\frac{2}{3}\right)^q.$$

Summing from $q = 0$ to ∞, we deduce

$$|a_n| e^{2\lambda_n \varepsilon} \leqq 3\,\mathfrak{A}(\varepsilon) M.$$

Hence

$$a_n e^{\lambda_n s} = O(e^{-\lambda_n s}) = O(e^{-n\varepsilon})$$

as $n \to \infty$, and the series (1) is convergent for $s = -\varepsilon$, contrary to the hypothesis that $\sigma = 0$ is the line of convergence.

7. The inequalities of Theorems 1 and 2 extend at once (in virtue of the 'approximation theorems'[6]) to the class of uniformly almost periodic functions with Fourier exponents Λ_n satisfying

$$|\Lambda_m - \Lambda_n| \geqq \gamma > 0 \qquad (m \neq n). \tag{15}$$

This class includes the class of purely periodic continuous functions of period $2\pi/\gamma$, and Bochner has shown that many of the special properties of periodic functions and their Fourier series extend to the larger class[7]). To these we may add the following simple result, in which the number $2\pi/\gamma$ plays a part corresponding to a period of a periodic function.

Theorem 4. *A uniformly almost periodic function $f(t)$ which is not identically* 0, *and whose Fourier exponents satisfy* (15), *cannot vanish throughout an interval of length* $2\pi/\gamma$.

Assuming the theorem false, we may take $\gamma = 1$ and suppose that $f(t) = 0$ for $-\pi < t < \pi$. Then, denoting by A_n the Fourier coefficients of $f(t)$, and taking $\varepsilon > 0$, we have, by Theorem 1 (5) (extended, as explained, to almost periodic functions),

$$\sum_n |A_n|^2 \leqq \frac{\mathfrak{A}(\varepsilon)}{2(\pi+\varepsilon)} \int_{-\pi-\varepsilon}^{\pi+\varepsilon} |f(t)|^2\,dt = \frac{\varepsilon\,\mathfrak{A}(\varepsilon)}{2(\pi+\varepsilon)} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \int_{\pi}^{\pi+\varepsilon} \left(|f(t)|^2 + |f(-t)|^2\right) dt.$$

Making $\varepsilon \to 0$ and supposing $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ chosen so that $\varepsilon\,\mathfrak{A}(\varepsilon)$ tends to an absolute constant $\mathfrak{A}$ (as we may by Theorem 1), we deduce, since $f(t)$ is continuous,

$$\sum_n |A_n|^2 \leqq \frac{\mathfrak{A}}{2\pi}\left(|f(\pi)|^2 + |f(-\pi)|^2\right) = 0,$$

which is impossible since $f(t)$ is not identically 0.

---

[6]) Besicovitch, 1, 29—31 and 20—21 (11°).

[7]) Bochner, 1; Besicovitch, 1, 38—42.

We can avoid the introduction of ε by adapting the last proof of (5) in § 2 instead of appealing to the result itself. The formal relations of this proof remain valid when $\varepsilon = 0$. Thus $K_0(0) = 0$, and we have, by (11),

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} k_0(t)\,|f(t)|^2\,dt, \tag{16}$$

where

$$k_0(t) = \frac{1+\cos t}{\pi^2 - t^2}$$

(the extension from trigonometrical polynomials to $f(t)$ by 'approximation' presenting no difficulty since $|k_0(t)|$ is integrable over $(-\infty, \infty)$). Now $k_0(t) \leqq 0$ for $|t| > \pi$, with equality only at the points $t = \pm 3\pi$, $\pm 5\pi, \ldots$. If $f(t)$ vanished for $-\pi < t < \pi$ but not identically, the integral on the right of (16) would therefore be negative and not zero.

8. We turn now to the question (raised in § 3) of the possibility of extending Theorems 1 and 3 to the critical case $T = \pi/\gamma$, with $\mathfrak{A}$ in place of $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ in (4) and (5). It will be shown by an example that no such extension of (5) is possible. But I have not found the answer to the question for the inequality (4), and this implies (after what was said in 5. 2) a similar uncertainty with regard to Theorem 3.

8. 1. Before giving an actual example in connection with (5) we shall examine systematically how the methods of § 2 break down when we try to adapt them to the critical case. If $k(t)$ and $K(u)$ are connected by (6) (which implies that $k(t+T)$ and $e^{u\,T\,i}K(u)$ are similarly related), and if $\gamma T = \pi$, Poisson's formula[8]) gives (at any rate formally)

$$2\,T \sum_{-\infty}^{\infty} k(2\,n\,T + T) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n K(n\gamma). \tag{17}$$

Now the first method of § 2 requires $k(t) = 0$ for $|t| \geqq T$, and

$$\sum_{n \neq 0} |K(\mu_n)| < \theta\,|K(0)| < |K(0)| \tag{18}$$

for all sets of real numbers $\ldots \mu_{-1}, \mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$ satisfying $\mu_0 = 0$, $\mu_n - \mu_{n-1} \geqq \gamma$, where θ is independent of the set (μ_n). But the first of these conditions implies that the left hand side of (17) is 0 and therefore that

$$K(0) = \sum_{n \neq 0} (-1)^{n-1} K(n\gamma), \tag{19}$$

which in turn implies

$$|K(0)| \leqq \sum_{n \neq 0} |K(n\gamma)| \tag{20}$$

and therefore contradicts (18) for the particular set $\mu_n = n\gamma$. The second method of § 2 (i. e. the last proof of (5)) requires $k(t) \leqq 0$ for

[8]) See, e. g., Bochner, 2, 33 (3).

$|t| \geqq T$, $K(u) = 0$ for $|u| \geqq \gamma$, and $K(0) > 0$. The first two of these conditions imply, by (17), that

$$K(0) = 2T \sum_{-\infty}^{\infty} k(2nT + T) \leqq 0, \tag{21}$$

which contradicts the third condition, so that this method also fails. We have tacitly assumed $k(t)$ and $K(u)$ to be continuous, and it might be supposed that the scope of the methods could be extended by the introduction of discontinuities. But it is easy to show that our requirements preclude such a possibility and ensure the essential validity of the formal reasoning.

The preceding observations provide the clue to the choice of the functions $k(t)$ and $K(u)$ in § 2. We come nearest to satisfying our requirements in the critical case $\gamma T = \pi$ when the sign of equality holds in (20) (for the first method), and in (21) (for the second). For this it is necessary and sufficient that all terms in (19) should be of the same sign (in the first case), and that $k(t)$ should vanish for $t = \pm T, \pm 3T, \pm 5T, \ldots$ (in the second). To obtain suitable functions for use in § 2 we first choose functions $k(t)$ and $K(u)$ satisfying the above conditions for the critical case, and then modify them slightly by the introduction of ε; we must, however, be careful to arrange that (18) can be proved for *all* admissible sets (μ_n).

8. 2. Coming now to the construction of an actual example to show that (5) cannot be improved in the sense suggested, let

$$g(z) = \sum_{0}^{\infty} b_m z^m$$

be any function regular for $|z| < 1$, and take

$$f(t) = e^{\frac{\lambda}{2} t i} g(r e^{t i}) \pm e^{-\frac{\lambda}{2} t i} g(r e^{-t i}),$$

where $0 < r < 1$ and $\lambda > 0$. Then

$$f(t) = \sum_{0}^{\infty} b_m r^m e^{\left(m + \frac{\lambda}{2}\right) t i} \pm \sum_{0}^{\infty} b_m r^m e^{-\left(m + \frac{\lambda}{2}\right) t i},$$

where the series converge uniformly for all real t (r, λ fixed). If $\lambda \geqq 1$, $f(t)$ is of the form $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n t i}$ with $\lambda_n - \lambda_{n-1} \geqq 1$, and the proposed refinement of (5) would therefore imply (for $0 < r < 1$)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(r e^{t i})|^2 \, dt \leqq \frac{\mathfrak{A}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| e^{\frac{\lambda}{2} t i} g(r e^{t i}) \pm e^{-\frac{\lambda}{2} t i} g(r e^{-t i}) \right|^2 dt, \tag{22}$$

the left hand side being equal to $2 \Sigma |b_m|^2 r^{2m}$ $(= \Sigma |a_n|^2)$.

Take $g(z) = (1+z)^{-\alpha}$, where $\alpha > 0$ and the principal value is to be taken. Then, for $-\pi < t < \pi$,

$$g(r e^{\pm t i}) \to (2\cos \tfrac{1}{2}t)^{-\alpha} e^{\mp \frac{\alpha}{2} t i} \quad \text{as } r \to 1,$$

$$|g(r e^{\pm t i})|^2 = \{(1-r)^2 + 4r\cos^2 \tfrac{1}{2}t\}^{-\alpha} < (\cos \tfrac{1}{2}t)^{-2\alpha} \quad (\tfrac{1}{4} < r < 1).$$

If $2\alpha < 1$, this majorant is integrable in $(-\pi, \pi)$ and we may make $r \to 1$ under the integral signs in (22). This gives

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos \tfrac{1}{2}t)^{-2\alpha} dt \leqq 2\,\mathfrak{A} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \tfrac{1}{2}t)^{-2\alpha} \left(\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} \frac{\lambda-\alpha}{2} t\right)^2 dt \quad (0 < \alpha < \tfrac{1}{2},\ \lambda \geqq 1).$$

In this take the upper alternative with $\lambda = \alpha + 1$ (> 1); we get

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos \tfrac{1}{2}t)^{-2\alpha} dt \leqq 2\,\mathfrak{A} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \tfrac{1}{2}t)^{2-2\alpha} dt \qquad (0 < \alpha < \tfrac{1}{2}).$$

But this is impossible, since the integral on the right is bounded, while that on the left is unbounded, when $\alpha \to \frac{1}{2}$. (We could obtain a similar contradiction by taking the lower alternative with $\lambda = \alpha + 2$.) A slight variation of the procedure would be to take $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{3}{2}$ (or $\frac{5}{2}$) and show that the integral on the right of (22) is bounded as $r \to 1$, while that on the left is asymptotically $-2\log(1-r)$.

We may note (returning to the general g) that (22) is equivalent to

$$(23) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} |\beta_m|^2 \leqq \mathfrak{A}\Big(\sum_{m=0}^{\infty} |\beta_m|^2 \pm \frac{\sin \lambda\pi}{\pi} \sum_{m,\,n=0}^{\infty} \frac{\Re(\beta_m \bar{\beta}_n)}{m+n+\lambda}\Big),$$

where $\beta_m = (-1)^m b_m r^m$. The fact that we can falsify (22) by taking $\pm \sin \lambda\pi$ near to -1 and choosing $g(z)$ and r appropriately is thus seen to be connected with the fact that π is the best possible constant in Hilbert's inequality; and the above examples are variants of the standard example used to establish the latter fact[9]).

8.3. It may be mentioned, in conclusion, that, although the truth of Theorem 3 in the critical case $T = \pi/\gamma$ remains in doubt, there is at any rate no such complete breakdown as when $T < \pi/\gamma$, for the conditions still impose definite limitations on the order of magnitude of a_n. I state without proof some rather fragmentary results in this direction.

---

[9]) Hardy, Littlewood, and Pólya, 1, 232—234. Since, in the example in question, the sums of the series are large compared with the individual terms, the value of λ in $m+n+\lambda$ is immaterial so long as it lies between fixed positive bounds.

If the conditions (i), (ii), (iii) *of Theorem* 3 *are satisfied, but with* $T = \pi/\gamma$ *in* (iii), *then*

$$\sum_{\lambda_n \leqq \omega} |a_n|^2 = O(\omega) \quad as \ \omega \to \infty; \tag{24}$$

$$a_n = O\{(\log \lambda_n)^{1/2}\} \quad as \ n \to \infty; \tag{25}$$

$$\sum_{2}^{\infty} |a_{n-1} + a_n|^2 < \infty; \tag{26}$$

$$\sum_{\lambda_n - \lambda_{n-1} \geqq (1+\delta)\gamma} (|a_{n-1}|^2 + |a_n|^2) < \infty \qquad (\delta > 0). \tag{27}$$

References.

V. Bernstein.

1. Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet (Paris, 1933).

A. S. Besicovitch.

1. Almost periodic functions (Cambridge, 1932).

S. Bochner.

1. Properties of Fourier series of almost periodic functions, Proc. London Math. Soc. (2) 26 (1927), 433—452.
2. Vorlesungen über Fouriersche Integrale (Leipzig, 1932).

F. Carlson and E. Landau.

1. Neuer Beweis und Verallgemeinerungen des Fabryschen Lückensatzes, Gött. Nachr. (1921), 184—188.

G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya.

1. Inequalities (Cambridge, 1934).

J. Karamata.

1. Sur les théorèmes de nature tauberienne, Compt. Rend. 197 (1933), 888—890.
2. Weiterführung der N. Wienerschen Methode, Math. Zeitschr. 38 (1934), 701—708.

A. E. Ingham.

1. On Wiener's method in Tauberian theorems, Proc. London Math. Soc. (2), 38 (1935), 458—480.

R. E. A. C. Paley and N. Wiener.

1. Fourier transforms in the complex domain (New York, 1934).

G. Pólya.

1. Über die Existenz unendlich vieler singulärer Punkte auf der Konvergenzgeraden gewisser Dirichletscher Reihen, Berl. Sitzungsber. (1923), 45—50.

M. Riesz.

1. Über die Summierbarkeit durch typische Mittel, Acta Litt. ac Scient. R. Univ. Hung. 2 (1924 bis 1926), 18—31.

N. Wiener.

1. A class of gap theorems, Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa (2), 3 (1934), 367—372.

(Eingegangen am 29. Januar 1936.)

Über die Existenz gemeinsamer Verfeinerungen bei direkten Produktzerlegungen einer Gruppe.

Von

Hans Fitting in Königsberg i. Pr.

Einleitung.

Im folgenden werden beliebige kommutative oder nichtkommutative Gruppen mit oder ohne Operatoren betrachtet; es handelt sich also um Gruppen von der denkbar allgemeinsten Art.

Ist eine solche Gruppe $\mathfrak{G}$ als direktes Produkt

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \ldots \times \mathfrak{F}_r \tag{1}$$

und jeder Faktor $\mathfrak{F}_\varrho$ wieder als direktes Produkt

$$\mathfrak{F}_\varrho = \mathfrak{F}_{\varrho 1} \times \mathfrak{F}_{\varrho 2} \times \ldots \times \mathfrak{F}_{\varrho n_\varrho} \tag{2}$$

dargestellt, so soll die aus (1) durch Einsetzen von (2) entstehende direkte Produktenzerlegung

$$\mathfrak{G} = \underbrace{\mathfrak{F}_{11} \times \ldots \times \mathfrak{F}_{1 n_1}} \times \ldots \times \underbrace{\mathfrak{F}_{r1} \times \ldots \times \mathfrak{F}_{r n_r}} \tag{3}$$

eine „Verfeinerung" von (1) genannt werden.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Feststellung notwendiger und hinreichender Bedingungen dafür, wann eine Darstellung einer Gruppe $\mathfrak{G}$ als direktes Produkt mit einer bestimmten, wann sogar mit jeder anderen direkten Produktzerlegung von $\mathfrak{G}$ gemeinsame Verfeinerungen besitzt (Sätze 1, 2 und Satz 3). Als Spezialfall ergibt sich unter anderem, daß zwei direkte Produktzerlegungen einer Gruppe in „normal-charakteristische" Faktoren [d. h. in solche Faktoren, die bei allen „eigentlichen, normalen" [1]) Automorphismen auf sich selber abgebildet werden] immer gemeinsame Verfeinerungen haben, deren Faktoren wieder „normal-charakteristisch" sind, ein Resultat, das im Spezialfall abelscher Gruppen kürzlich von R. Baer bewiesen wurde [2]). Weiter ergibt sich eine Charakterisierung aller Gruppen, in denen zu je zwei direkten Produktdarstellungen stets gemeinsame Verfeinerungen existieren (Satz 5); zu ihnen gehören insbesondere diejenigen Gruppen, die mit ihrer Kommutatorgruppe identisch sind, und

[1]) Vgl. die Fußnoten [4]) und [10]).

[2]) R. Baer: The decomposition of abelian Groups into direkt summands Quart. Journal of Oxford, Ser. 6 (222—232), 1935.

diejenigen, deren Zentren nur die aus dem Einheitselement allein bestehende Gruppe als zulässige Untergruppe enthalten. Die letzten Resultate sind insofern interessant, als sie — wie mir Herr F. Levi mitteilte — die Konstruktion von Beispielen für solche Gruppen ermöglichen, die keinen nicht nur aus dem Einheitselement bestehenden, direkt-unzerlegbaren, direkten Faktor besitzen, womit zugleich gezeigt ist, daß der Satz über die Existenz direkter Produktzerlegungen endlicher Gruppen in direkt unzerlegbare Faktoren im allgemeinen auch nicht durch Einführung direkter Produkte unendlich vieler Faktoren auf unendliche Gruppen übertragen werden kann.

§ 1.

Satz 1: *Notwendig und hinreichend dafür, daß zwei direkte Produktzerlegungen einer Gruppe* $\mathfrak{G}$

(I) $$\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}_r,$$

(II) $$\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_1' \times \ldots \times \mathfrak{F}_{r'}'$$

gemeinsame Verfeinerungen besitzen, ist die Gültigkeit der Gleichung

(III) $$\mathfrak{G} = (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_1') \times \ldots \times (\mathfrak{F}_\mu \cap \mathfrak{F}_\nu') \times \ldots \times (\mathfrak{F}_r \cap \mathfrak{F}_{r'}'),$$

wobei unter $\mathfrak{F}_\mu \cap \mathfrak{F}_\nu'$ *— in Übereinstimmung mit der allgemein üblichen Bezeichnung — der Durchschnitt der Gruppen* $\mathfrak{F}_\mu$ *und* $\mathfrak{F}_\nu'$ *zu verstehen ist.*

Beweis: Gilt (III), so ist (III) eine gemeinsame Verfeinerung von (I) und (II); denn jedenfalls ist

$$(\mathfrak{F}_\mu \cap \mathfrak{F}_1') \times \ldots \times (\mathfrak{F}_\mu \cap \mathfrak{F}_{r'}') \subseteq \mathfrak{F}_\mu,$$
$$(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_\nu') \times \ldots \times (\mathfrak{F}_r \cap \mathfrak{F}_\nu') \subseteq \mathfrak{F}_\nu',$$

woraus in Verbindung mit (I), (II) und (III)

$$(\mathfrak{F}_\mu \cap \mathfrak{F}_1') \times \ldots \times (\mathfrak{F}_\mu \cap \mathfrak{F}_{r'}') = \mathfrak{F}_\mu,$$
$$(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_\nu') \times \ldots \times (\mathfrak{F}_r \cap \mathfrak{F}_\nu') = \mathfrak{F}_\nu'$$

folgt.

Es sei jetzt

(IV) $$\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_1^* \times \ldots \times \mathfrak{F}_s^*$$

irgendeine gemeinsame Verfeinerung von (I) und (II) und dabei

(α) $$\mathfrak{F}_\mu = \mathfrak{F}_{\alpha_1}^* \times \ldots \times \mathfrak{F}_{\alpha_k}^*,$$

(β) $$\mathfrak{F}_\nu' = \mathfrak{F}_{\beta_1}^* \times \ldots \times \mathfrak{F}_{\beta_l}^*.$$

Zunächst werde angenommen, daß die Gruppen $\mathfrak{F}_\alpha^*$ und $\mathfrak{F}_\beta^*$ in (α) und (β) nicht alle voneinander verschieden sind. Unter dieser Voraussetzung seien etwa $\mathfrak{F}_{\gamma_1}^*, \ldots, \mathfrak{F}_{\gamma_n}^*$ diejenigen $\mathfrak{F}^*$, die sowohl auf der rechten Seite von (α) wie auf der rechten Seite von (β) als Faktoren auftreten. Es ist dann

(γ') $$\mathfrak{F}_{\gamma_1}^* \times \ldots \times \mathfrak{F}_{\gamma_n}^* \subseteq \mathfrak{F}_\mu \cap \mathfrak{F}_\nu'.$$

Für irgendein Element D des Durchschnitts $\mathfrak{F}_\mu \cap \mathfrak{F}'_\nu$ gilt auf Grund von (α) und (β)

$$(\alpha') \qquad D = D^*_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot D^*_{\alpha_k} \quad \text{mit} \quad D^*_{\alpha_i} \in \mathfrak{F}^*_{\alpha_i},$$

$$(\beta') \qquad D = D^*_{\beta_1} \cdot \ldots \cdot D^*_{\beta_l} \quad \text{„} \quad D^*_{\beta_j} \in \mathfrak{F}^*_{\beta_j}.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Darstellung des Elementes D als Produkt seiner $\mathfrak{F}^*$-Komponenten bei der Zerlegung (IV) muß jeder vom Einheitselement E verschiedene Faktor auf der rechten Seite von (α') auch auf der rechten Seite von (β') vertreten sein. Daher ist $D^*_{\alpha_i} = E$, falls $\mathfrak{F}^*_{\alpha_i}$ nicht unter den $\mathfrak{F}^*_\beta$ vorkommt; denn verschiedene $\mathfrak{F}^*$ haben nur das Einheitselement gemein. Es ist also $D = D^*_{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot D^*_{\gamma_n}$ mit $D^*_{\gamma_i} \in \mathfrak{F}^*_{\gamma_i}$ für jedes $D \in \mathfrak{F}_\mu \cap \mathfrak{F}_\nu$, woraus mit (γ') zusammen

$$(\gamma) \qquad \mathfrak{F}_\mu \cap \mathfrak{F}'_\nu = \mathfrak{F}^*_{\gamma_1} \times \ldots \times \mathfrak{F}^*_{\gamma_n}$$

folgt. Sind die Gruppen $\mathfrak{F}^*_\alpha$ und $\mathfrak{F}^*_\beta$ in (α) und (β) alle voneinander verschieden, so bleibt (γ) richtig, wenn das in diesem Falle leere Produkt $\mathfrak{F}^*_{\gamma_1} \times \ldots \times \mathfrak{F}^*_{\gamma_n}$ durch (E) ersetzt wird.

Die vorangehenden Überlegungen lassen erkennen, daß aus jeder gemeinsamen Verfeinerung von (I) und (II) durch eine passende Umordnung und Zusammenfassung der Faktoren die Zerlegung (III) gewonnen werden kann; (III) muß also sicherlich gelten, falls zu (I) und (II) gemeinsame Verfeinerungen existieren.

Aus dem Beweis des Satzes 1 ergibt sich noch der

Zusatz: Wenn die beiden direkten Produkte (I) und (II) gemeinsame Verfeinerungen besitzen, so ist unter diesen immer auch die Zerlegung (III) enthalten.

§ 2.

Formulierung und Beweis des nächsten Satzes fußt auf dem zunächst zu beweisenden

Hilfssatz 1[3]). Zu jeder direkten Produktzerlegung einer Gruppe $\mathfrak{G}$

$$(I) \qquad \mathfrak{G} = \mathfrak{F}_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}_r$$

[3]) Hilfssatz 1 ist im wesentlichen nur eine andere Formulierung des Satzes über den umkehrbar eindeutigen Zusammenhang zwischen den direkten Produktzerlegungen einer Gruppe und den direkten Idealsummenzerlegungen des zugehörigen „Automorphismenbereichs", der in der Arbeit des Verfassers: Theorie der Automorphismenringe abelscher Gruppen und ihr Analogon bei nichtkommutativen Gruppen, Math. Annalen 107 (1933), S. 528 ff. ausführlich dargestellt worden ist.

gehört ein eindeutig bestimmtes System „addierbarer Automorphismen“ [4]) $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \ldots, \mathsf{H}_r$, die der „Vollständigkeitsrelation“

$$\text{(Ia)} \qquad \mathsf{P}_1 = \mathsf{H}_1 + \ldots + \mathsf{H}_r \text{ [5])}$$

und den „Orthogonalitätsrelationen“

$$\text{(Ib)} \qquad \mathsf{H}_\mu \cdot \mathsf{H}_\nu = \begin{matrix} \mathsf{H}_\mu & \text{für } \mu = \nu, \\ \mathsf{P}_0 & \text{„ } \mu \neq \nu \text{ [5])} \end{matrix}$$

genügen, die also ein „vollständiges Orthogonalsystem“ bilden; H_ϱ ist derjenige Automorphismus, der entsteht, wenn jedem Element von $\mathfrak{G}$ seine $\mathfrak{F}_\varrho$-Komponente in (I) zugeordnet wird. Umgekehrt wird durch jedes vollständige Orthogonalsystem von Automorphismen, d. h. durch jedes System addierbarer Automorphismen $\mathsf{H}'_1, \ldots, \mathsf{H}'_{r'}$, für die

$$\text{(IIa)} \qquad \mathsf{H}'_1 + \ldots + \mathsf{H}'_{r'} = \mathsf{P}_1,$$

$$\text{(IIb)} \qquad \mathsf{H}'_\mu \cdot \mathsf{H}'_\nu = \begin{matrix} \mathsf{H}'_\mu & \text{für } \mu = \nu, \\ \mathsf{P}_0 & \text{„ } \mu \neq \nu \end{matrix}$$

gilt, in eindeutiger Weise eine direkte Produktenzerlegung

$$\text{(II)} \qquad \mathfrak{G} = \mathfrak{F}'_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}'_{r'}$$

bestimmt, die man erhält, wenn $\mathfrak{F}'_\varrho = \mathfrak{G}\,\mathsf{H}'_\varrho$ gesetzt wird.

Beweis: H_ϱ bewirkt offenbar eine operatorhomomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{F}_\varrho$; H_ϱ ist also Automorphismus von $\mathfrak{G}$. Weiter ist $\mathfrak{G}\,\mathsf{H}_\varrho = \mathfrak{F}_\varrho$; die Gruppen $\mathfrak{G}\,\mathsf{H}_1, \ldots, \mathfrak{G}\,\mathsf{H}_r$ sind daher zu je zweien elementweise vertauschbar und die Automorphismen $\mathsf{H}_1, \ldots, \mathsf{H}_r$ infolgedessen addierbar. Nach diesen Feststellungen ergeben sich die Gleichungen (Ia) und (Ib) unmittelbar aus der Definition der H_ϱ; denn es gilt für jedes $A \in \mathfrak{G}$

$$\text{(1)} \qquad A(\mathsf{H}_1 + \ldots + \mathsf{H}_r) = A\,\mathsf{H}_1 \cdot \ldots \cdot A\,\mathsf{H}_r = A = A\,\mathsf{P}_1,$$

$$\text{(2)} \qquad A\,\mathsf{H}_\mu \cdot \mathsf{H}_\nu = (A\,\mathsf{H}_\mu)\,\mathsf{H}_\nu = \begin{cases} A\,\mathsf{H}_\mu & \text{für } \mu = \nu, \\ E = A\,\mathsf{P}_0 & \text{„ } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

---

[4]) Unter *Automorphismus* einer Gruppe $\mathfrak{G}$ verstehe ich eine operatorhomomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf eine *Untergruppe* $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$. Ist die Abbildung umkehrbar eindeutig und $\mathfrak{U} = \mathfrak{G}$, so nenne ich den Automorphismus *eigentlich*, sonst *uneigentlich*. Endlich viele Automorphismen $\theta_1, \ldots, \theta_n$ von $\mathfrak{G}$ sollen *addierbar* heißen, wenn die Bildgruppen $\mathfrak{G}\,\theta_1, \mathfrak{G}\,\theta_2, \ldots, \mathfrak{G}\,\theta_n$ zu je zweien elementweise miteinander vertauschbar sind; in diesem Fall soll unter der „Summe $\theta_1 + \ldots + \theta_n$ der Automorphismus $\{A \to A\,\theta_1 \cdot A\,\theta_2 \cdot \ldots \cdot A\,\theta_n\}$ verstanden werden. Das Produkt zweier Automorphismen θ, Π wird — wie üblich — als der aus θ und Π zusammengesetzte Automorphismus $\{A \to (A\,\theta)\,\Pi\}$ erklärt.

[5]) Mit P_1 wird in der ganzen Arbeit der „*identische Automorphismus*“ $(A \to A)$ (der jedes Element auf sich selber abbildet) mit P_0 der „*Nullautomorphismus*“ $(A \to E)$ (bei dem jedem Element das Einheitselement zugewiesen ist) bezeichnet.

Wegen (IIb) wird jedes Element aus

$$(\mathfrak{G}\,\mathsf{H}_1', \ldots, \mathfrak{G}\,\mathsf{H}_{\varrho-1}', \mathfrak{G}\,\mathsf{H}_{\varrho+1}', \ldots, \mathfrak{G}\,\mathsf{H}_{r'}')\ ^{6})$$

beim Automorphismus H_ϱ', jedes Element aus $\mathfrak{G}\,\mathsf{H}_\varrho'$ beim Automorphismus

$$\mathsf{H}_1' + \ldots + \mathsf{H}_{\varrho-1}' + \mathsf{H}_{\varrho+1}' + \ldots + \mathsf{H}_{r'}'$$

auf das Einheitselement E abgebildet[7]). Für ein gemeinsames Element D beider Gruppen gilt daher $D = D\,\mathsf{P}_1 = D(\mathsf{H}_1' + \ldots + \mathsf{H}_{r'}') = E$. Es ist also

$$(\delta) \qquad (\mathfrak{G}\,\mathsf{H}_1', \ldots, \mathfrak{G}\,\mathsf{H}_{\varrho-1}', \mathfrak{G}\,\mathsf{H}_{\varrho+1}', \ldots, \mathfrak{G}\,\mathsf{H}_{r'}') \cap \mathfrak{G}\,\mathsf{H}_\varrho' = (E).$$

Aus der Addierbarkeit der H_ϱ' folgt, daß die Gruppen $\mathfrak{G}\,\mathsf{H}_1', \ldots, \mathfrak{G}\,\mathsf{H}_{r'}'$ zu je zweien elementweise miteinander vertauschbar und daher in der Gruppe $(\mathfrak{G}\,\mathsf{H}_1', \ldots, \mathfrak{G}\,\mathsf{H}_{r'}')$ [6]) als Normalteiler enthalten sind, woraus mit (δ) zusammen

$$(\mathfrak{G}\,\mathsf{H}_1', \mathfrak{G}\,\mathsf{H}_2', \ldots, \mathfrak{G}\,\mathsf{H}') = \mathfrak{G}\,\mathsf{H}_1' \times \ldots \times \mathfrak{G}\,\mathsf{H}_{r'}'$$

hervorgeht. Offenbar ist $\mathfrak{G}\,\mathsf{H}_1' \times \ldots \times \mathfrak{G}\,\mathsf{H}_{r'}' \subset \mathfrak{G}$. Nun gilt aber wegen (IIa) für jedes $A \in \mathfrak{G}$

$$A = A\,\mathsf{P}_1 = A(\mathsf{H}_1' + \mathsf{H}_2' + \ldots + \mathsf{H}_{r'}') = A\,\mathsf{H}_1' \cdot A\,\mathsf{H}_2' \cdot \ldots \cdot A\,\mathsf{H}_{r'}' \text{ mit } A\,\mathsf{H}_\varrho' \in \mathfrak{G}\,\mathsf{H}_\varrho'.$$

Daher ist sogar $\mathfrak{G}\,\mathsf{H}_1' \times \mathfrak{G}\,\mathsf{H}_2' \times \ldots \times \mathfrak{G}\,\mathsf{H}_{r'}' = \mathfrak{G}$, w. z. b. w.

Satz 2: *Eine zweite notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz gemeinsamer Verfeinerungen zweier Darstellungen einer Gruppe* $\mathfrak{G}$ *als direktes Produkt*

$$(\mathrm{I}) \qquad \mathfrak{G} = \mathfrak{F}_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}_r,$$

$$(\mathrm{II}) \qquad \mathfrak{G} = \mathfrak{F}_1' \times \ldots \times \mathfrak{F}_{r'}'$$

besteht darin, daß die im Sinne des Hilfssatzes 1 *zu* (I) *gehörigen Automorphismen* $\mathsf{H}_1, \ldots, \mathsf{H}_r$ *mit den Automorphismen* $\mathsf{H}_1', \ldots, \mathsf{H}_{r'}'$ *vertauschbar sind, die im Sinne des Hilfssatzes* 1 *zu* (II) *gehören, d. h. daß*

$$(\mathrm{V}) \qquad \mathsf{H}_\mu \cdot \mathsf{H}_\nu' = \mathsf{H}_\nu' \cdot \mathsf{H}_\mu \qquad \begin{Bmatrix} \mu = 1, \ldots, r, \\ \nu = 1, \ldots, r' \end{Bmatrix}$$

gilt.

---

[6]) Sind $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_m$ irgendwelche Untergruppen einer Gruppe $\mathfrak{G}$, so soll das Symbol $(\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_m)$ die kleinste zulässige Untergruppe von $\mathfrak{G}$ bedeuten, welche die Gruppen $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_m$ umfaßt.

[7]) Bei dieser Rechnung wird der in der vorliegenden Arbeit häufig benutzte Hilfssatz angewandt: Ist $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ ein System addierbarer Automorphismen einer Gruppe $\mathfrak{G}$ und Π irgendein Automorphismus derselben Gruppe, so sind sowohl die n Produkte $\Pi\theta_1, \ldots, \Pi\theta_n$ wie die n Produkte $\theta_1\Pi, \ldots, \theta_n\Pi$ addierbar und außerdem die beiden Gleichungen

$$(\eta_1) \qquad \Pi(\theta_1 + \ldots + \theta_n) = \Pi\theta_1 + \ldots + \Pi\theta_n,$$

$$(\eta_2) \qquad (\theta_1 + \ldots + \theta_n)\Pi = \theta_1\Pi + \ldots + \theta_n\Pi$$

erfüllt. Zunächst ist $\mathfrak{G}\Pi < \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}\Pi\theta_i < \mathfrak{G}\theta_i$, woraus folgt, daß die Gruppen $\mathfrak{G}\Pi\theta_1, \ldots, \mathfrak{G}\Pi\theta_n$ zu je zweien elementweise miteinander vertauschbar sind, da das gleiche voraussetzungsgemäß von den Gruppen $\mathfrak{G}\theta_1, \ldots, \mathfrak{G}\theta_n$ gilt. Wegen $\mathfrak{G}\theta_i\,\Pi = (\mathfrak{G}\theta_i)\Pi$ sind auch die Gruppen $\mathfrak{G}\theta_1\Pi, \ldots, \mathfrak{G}\theta_n\Pi$ zu je zweien elementweise miteinander vertauschbar, da bei jedem Automorphismus einer Gruppe die Bilder elementweise vertauschbarer Untergruppen notwendig wieder elementweise vertauschbar sein müssen. Der weitere Beweis der Gleichungen (η_1) und (η_2) ist trivial.

(V) besagt, daß die $\mathfrak{F}_\mu$-Komponente der $\mathfrak{F}'_\nu$-Komponente irgendeines Elementes von $\mathfrak{G}$ mit der $\mathfrak{F}'_\nu$-Komponente der $\mathfrak{F}_\mu$-Komponente desselben Elementes identisch ist.

Beweis: Wird (V) vorausgesetzt, so biden die Produkte $\mathsf{H}_\mu \cdot \mathsf{H}'_\nu$ ein System addierbarer Automorphismen, die den Relationen

$$\mathsf{P}_1 = \mathsf{P}_1 \cdot \mathsf{P}_1 = \sum_{\mu=1}^{r} \mathsf{H}_\mu \cdot \sum_{\nu=1}^{r'} \mathsf{H}'_\nu = \sum_{\mu=1}^{r} \sum_{\nu=1}^{r'} \mathsf{H}_\mu \cdot \mathsf{H}'_\nu{}^{7}),$$

$$\mathsf{H}_\mu \mathsf{H}'_\nu \cdot \mathsf{H}_\varkappa \mathsf{H}'_\lambda = \begin{matrix} \mathsf{H}_\mu \mathsf{H}'_\nu & \text{für } \mu = \varkappa \text{ und } \nu = \lambda, \\ \mathsf{P}_0 & \text{„ } \mu \neq \varkappa \text{ oder } \nu \neq \lambda, \end{matrix}$$

genügen und daher nach Hilfssatz 1 die direkte Produktzerlegung

(VI) $$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}\,\mathsf{H}_1 \mathsf{H}'_1 \times \ldots \times \mathfrak{G}\,\mathsf{H}_\mu \mathsf{H}'_\nu \times \ldots \times \mathfrak{G}\,\mathsf{H}_r \mathsf{H}'_{r'},$$

bestimmen. (VI) ist eine gemeinsame Verfeinerung von (I) und (II). Denn es ist einerseits

$$\mathfrak{G}\,(\sum_{i=1}^{r} \mathsf{H}_i \mathsf{H}'_j) \subseteq \mathfrak{G}\,\mathsf{H}_1 \mathsf{H}'_j \times \ldots \times \mathfrak{G}\,\mathsf{H}_r \mathsf{H}'_j,$$

andererseits

$$\mathfrak{G}\,\mathsf{H}_\varrho \subset \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{G}\,\mathsf{H}_\varrho\,(\sum_{i=1}^{r} \mathsf{H}_i \mathsf{H}'_j) = \mathfrak{G}\,\mathsf{H}_\varrho \mathsf{H}'_j \subset \mathfrak{G}\,(\sum_{i=1}^{r} \mathsf{H}_i \mathsf{H}'_j),$$

$$\mathfrak{G}\,(\sum_{i=1}^{r} \mathsf{H}_i \mathsf{H}'_j) \supseteq \mathfrak{G}\,\mathsf{H}_1 \mathsf{H}'_j \times \ldots \times \mathfrak{G}\,\mathsf{H}_r \mathsf{H}'_j,$$

also

$$\mathfrak{G}\,\mathsf{H}_1 \mathsf{H}'_j \times \ldots \times \mathfrak{G}\,\mathsf{H}_r \mathsf{H}'_j = \mathfrak{G}\,(\sum_{i=1}^{r} \mathsf{H}_i \mathsf{H}'_j) = \mathfrak{G}\,\mathsf{H}'_j\,(\sum_{i=1}^{r} \mathsf{H}_i) = \mathfrak{G}\,\mathsf{H}'_j \mathsf{P}_1 = \mathfrak{F}'_j$$

und entsprechend

$$\mathfrak{G}\,\mathsf{H}_i \mathsf{H}'_1 \times \ldots \times \mathfrak{G}\,\mathsf{H}_i \mathsf{H}'_{r'} = \mathfrak{F}_i.$$

Es werde jetzt umgekehrt angenommen, daß (I) und (II) eine gemeinsame Verfeinerung

(IV) $$\mathfrak{G} = \mathfrak{F}^*_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}^*_s$$

besitzen und dabei

$$\mathfrak{F}_\mu = \mathfrak{F}^*_{\alpha_1} \times \ldots \times \mathfrak{F}^*_{\alpha_k}$$
$$\mathfrak{F}'_\nu = \mathfrak{F}^*_{\beta_1} \times \ldots \times \mathfrak{F}^*_{\beta_l}$$

gelten möge. Sind $\mathsf{H}^*_1, \ldots, \mathsf{H}^*_s$ die zu (IV) gehörigen Automorphismen des Hilfssatzes 1, so wird, wie man leicht nachrechnet, $\mathsf{H}_\mu = \mathsf{H}^*_{\alpha_1} + \ldots + \mathsf{H}^*_{\alpha_k}$, $\mathsf{H}'_\nu = \mathsf{H}^*_{\beta_1} + \ldots + \mathsf{H}^*_{\beta_l}$. Hieraus folgt (V), da die H^* wegen

$$\mathsf{H}^*_\mu \cdot \mathsf{H}^*_\nu = \begin{matrix} \mathsf{P}_0 & \text{für } \mu \neq \nu \\ \mathsf{H}^*_\mu & \text{für } \mu = \nu \end{matrix}$$

und damit auch die Summen $\mathsf{H}^*_{\alpha_1} + \ldots + \mathsf{H}^*_{\alpha_k}$, $\mathsf{H}^*_{\beta_1} + \ldots + \mathsf{H}^*_{\beta_l}$ multiplikativ miteinander vertauschbar sind.

Bemerkung: Man sagt, in einer Gruppe $\mathfrak{G}$ gelte der *„schwache Verfeinerungssatz"*, wenn zwei beliebige direkte Produktzerlegungen von $\mathfrak{G}$ immer so verfeinert werden können, daß die Faktoren der verfeinerten

Zerlegungen sich isomorph aufeinander beziehen lassen. Bekanntlich[8]) gilt dieser Satz nur in speziellen Gruppen. Die Frage, bei welchen Gruppen dies der Fall ist, ist bisher unbeantwortet. Mit Hilfe des Satzes 2 läßt sich nun immerhin eine Umdeutung der Fragestellung vornehmen, die eventuell weiterführt. Wie unmittelbar ersichtlich, läßt sich nämlich der schwache Verfeinerungssatz auch in der äquivalenten Fassung formulieren, daß von irgend zwei direkten Produktzerlegungen der Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}_r = \mathfrak{F}'_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}'_{r'}$ immer die eine (etwa $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}_r$) durch einen passenden eigentlichen Automorphismus θ in eine Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_1\theta \times \ldots \times \mathfrak{F}_r\theta$, übergeführt werden kann, die mit der anderen $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}'_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}'_{r'}$ eine gemeinsame Verfeinerung besitzt. *Nach Satz* 2 *sind daher die Gruppen, in denen der schwache Verfeinerungssatz gilt, identisch mit denjenigen Gruppen, bei denen zu je zwei vollständigen Orthogonalsystemen* $(\mathsf{H}_1, \ldots, \mathsf{H}_r)$ *und* $(\mathsf{H}'_1, \ldots, \mathsf{H}'_{r'})$ (*s. Hilfssatz* 1) *stets ein solcher eigentlicher Automorphismus* θ *gefunden werden kann, für den*

$$\text{(Va)} \qquad \theta^{-1}\mathsf{H}_\mu\theta \cdot \mathsf{H}'_\nu = \mathsf{H}'_\nu \cdot \theta^{-1}\mathsf{H}_\mu\theta \qquad \begin{Bmatrix} \mu = 1, \ldots, r \\ \nu = 1, \ldots, r' \end{Bmatrix}$$

gilt. Im abelschen Spezialfall wurde dasselbe Kriterium in einer etwas komplizierteren Fassung schon von R. Baer[9]) ausgesprochen.

§ 3.

Für den Beweis des dritten Satzes werden neben Hilfssatz 1 noch drei andere Hilfssätze gebraucht, die zur Vermeidung unnötiger Unterbrechungen den weiteren Überlegungen vorausgeschickt werden sollen.

Hilfssatz 2: Die H_ϱ und H'_ϱ des Hilfssatzes 1 sind „normale" Automorphismen[10]), für beliebige Elemente A und B aus $\mathfrak{G}$ ist nämlich

$$B^{-1} \cdot A\,\mathsf{H}_\varrho \cdot B = (B^{-1} \cdot A\,\mathsf{H}_\varrho \cdot B)\,\mathsf{P}_1 = (B^{-1} \cdot A\,\mathsf{H}_\varrho \cdot B)\,(\sum_{\mu=1}^{r} \mathsf{H}_\mu)$$
$$= (B^{-1} \cdot A\,\mathsf{H}_\varrho \cdot B)\,\mathsf{H}_1 \cdot \ldots \cdot (B^{-1} \cdot A\,\mathsf{H}_\varrho \cdot B)\,\mathsf{H}_{\varrho-1} \cdot (B^{-1} \cdot A\,\mathsf{H}_\varrho \cdot B)\,\mathsf{H}_\varrho$$
$$\cdot (B^{-1} \cdot A\,\mathsf{H}_\varrho \cdot B)\,\mathsf{H}_{\varrho+1} \cdot \ldots \cdot (B^{-1} \cdot A\,\mathsf{H}_\varrho \cdot B)\,\mathsf{H}_r = B^{-1}\mathsf{H}_\varrho \cdot A\,\mathsf{H}_\varrho \cdot B\,\mathsf{H}_\varrho$$
$$= (B^{-1} \cdot A \cdot B)\,\mathsf{H}_\varrho,$$

[8]) Vgl. etwa das von R. Baer in der Arbeit: The decomposition of enumerable primary Abelian Groups into direkt summands (Quart. Journal of Oxford, Ser. 6, S. 217—221) angegebene Beispiel.

[9]) R. Baer a. a. O. (s. Fußnote 2).

[10]) *Normal* nenne ich einen Automorphismus θ, wenn er mit allen Transformationen (inneren Automorphismen) $D_{\mu} = (A \to B^{-1} \cdot A \cdot B)$ vertauschbar ist, wenn er also nach Hinzunahme der Transformationen D_B zum Operatorensystem eine *operatortreue* Abbildung bleibt. Durch eine Formel ausgedrückt, wird ein normaler Automorphismus durch das Bestehen der Relationen $(B^{-1} \cdot A \cdot B)\theta = B^{-1} \cdot A\theta \cdot B$, $A \in \mathfrak{G}$, $B \in \mathfrak{G}$ gekennzeichnet. — *Die eigentlichen, normalen Automorphismen* θ *sind dadurch ausgezeichnet, daß sich bei ihnen Bild und Original nur um ein Element des Zentrums unterscheiden, daß also* $B^{-1}B\theta$ *zum Zentrum der Gruppe gehört*: Ist $B^{-1} \cdot B\theta$ mit allen Gruppenelementen vertauschbar, so gilt

da im Fall $i \neq \varrho$ offenbar

$$(B^{-1} \cdot A\,\mathsf{H}_\varrho \cdot B)\,\mathsf{H}_i = B^{-1}\mathsf{H}_i \cdot A\,\mathsf{H}_\varrho\mathsf{H}_i \cdot B\,\mathsf{H}_i = (B\,\mathsf{H}_i)^{-1} \cdot A\,\mathsf{P}_0 \cdot (B\,\mathsf{H}_i)$$
$$= (B\,\mathsf{H}_i)^{-1} \cdot E \cdot (B\,\mathsf{H}_i) = E$$

gilt.

Hilfssatz 3: Ist $(\mathsf{H}_1, \ldots, \mathsf{H}_\nu)$ ein vollständiges Orthogonalsystem von Automorphismen einer Gruppe $\mathfrak{G}$ (s. Hilfssatz 1) und ist Φ irgendein normaler Automorphismus derselben Gruppe, so ist $\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu$ im Falle $\mu \neq \nu$ zum identischen Automorphismus P_1 der Gruppe $\mathfrak{G}$ addierbar und die Summe $\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu + \mathsf{P}_1$ ein eigentlicher, normaler Automorphismus von $\mathfrak{G}$.

Beweis: Nach Hilfssatz 2 sind die H_ϱ normale Automorphismen. Hieraus folgt, daß $\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu$ die Gruppe $\mathfrak{G}$ im Falle $\mu \neq \nu$ auf eine Untergruppe ihres Zentrums abbildet, da für irgendzwei Elemente A und B aus $\mathfrak{G}$ stets

$$B^{-1} \cdot A\,\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu \cdot B = (B^{-1} \cdot A\,\mathsf{H}_\mu \Phi \cdot B)\,\mathsf{H}_\nu = (B^{-1} \cdot A\,\mathsf{H}_\mu \cdot B)\,\Phi\,\mathsf{H}_\nu$$
$$= (B^{-1} \cdot A \cdot B)\,\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu = (B^{-1}\mathsf{H}_\mu \cdot A\,\mathsf{H}_\mu \cdot B\,\mathsf{H}_\mu)\,\Phi\,\mathsf{H}_\nu$$
$$= (B^{-1}\mathsf{H}_\mu \cdot A\,\mathsf{H}_\mu \Phi \cdot B\,\mathsf{H}_\mu)\,\mathsf{H}_\nu = B^{-1}\mathsf{H}_\mu\mathsf{H}_\nu \cdot A\,\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu \cdot B\,\mathsf{H}_\mu\mathsf{H}_\nu$$
$$= B^{-1}\mathsf{P}_0 \cdot A\,\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu \cdot B\,\mathsf{P}_0 = E \cdot A\,\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu \cdot E = A\,\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu$$

gilt. Mit $\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu$ ist daher auch die Zuordnung

$$-\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu = (A \to A^{-1}\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu)$$

wieder ein Automorphismus von $\mathfrak{G}$[11]). Weiter zeigt sich, daß sowohl $\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu$ wie auch $-\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu$ zum identischen Automorphismus P_1 addierbar ist, weil ja die Gruppen $\mathfrak{G}\,\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu$ und $\mathfrak{G}(-\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu)$ miteinander übereinstimmen und $\mathfrak{G}\,\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu$ mit $\mathfrak{G}\,\mathsf{P}_1 = \mathfrak{G}$ elementweise vertauschbar ist. Die Summen $\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu + \mathsf{P}_1$ und $-\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu + \mathsf{P}_1$ sind eigentliche Automorphismen, denn wegen $\mu \neq \nu$ ist $\mathsf{H}_\nu \mathsf{H}_\mu = \mathsf{P}_0$ und daher

$$(\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu + \mathsf{P}_1)(-\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu + \mathsf{P}_1)$$
$$= \underbrace{\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu \cdot -\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu}_{\mathsf{P}_0} + \underbrace{\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu + -\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu}_{\mathsf{P}_0} + \mathsf{P}_1$$
$$= \mathsf{P}_0 + \mathsf{P}_0 + \mathsf{P}_1 = \mathsf{P}_1,$$
$$(-\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu + \mathsf{P}_1)(\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu + \mathsf{P}_1)$$
$$= \underbrace{-\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu \cdot \mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu}_{\mathsf{P}_0} + \underbrace{-\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu + \mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu}_{\mathsf{P}_0} + \mathsf{P}_1$$
$$= \mathsf{P}_0 + \mathsf{P}_0 + \mathsf{P}_1 = \mathsf{P}_1.$$

$(B^{-1}B\theta) \cdot A\theta = A\theta \cdot (B^{-1} \cdot B\theta)$, also auch $B\theta \cdot A\theta \cdot (B\theta)^{-1} = B \cdot A\theta \cdot B^{-1} = (B \cdot A \cdot B^{-1})\theta = B \cdot A\theta \cdot B^{-1}$ die Relation $(B^{-1} \cdot B\theta) \cdot A\theta = A\theta \cdot (B^{-1} \cdot B\theta)$, welche besagt, daß $B^{-1} \cdot B\theta$ mit allen Elementen $A\theta$, also mit allen Gruppenelementen vertausehbar ist, da θ eigentlich sein sollte, also $A\theta$ mit A alle Elemente der Gruppe durchläuft.

[11]) Mit $\Psi = (A \to A\,\Psi)$ ist auch $-\Psi = (A \to A^{-1}\Psi)$ stets dann wieder Automorphismus einer Gruppe $\mathfrak{G}$, wenn $\mathfrak{G}$ durch Ψ auf eine *abelsche* Untergruppe abgebildet wird; denn es ist in diesem Falle:

$$(B \cdot C) \cdot (-\Psi) = (B \cdot C)^{-1}\Psi = (C^{-1} \cdot B^{-1})\Psi = C^{-1}\Psi \cdot B^{-1}\Psi$$
$$= B^{-1}\Psi \cdot C^{-1}\Psi = B \cdot (-\Psi) \cdot C \cdot (-\Psi).$$

Schließlich sind beide Summen normale Automorphismen, da sie multiplikativ und additiv aus normalen Automorphismen aufgebaut sind (vgl. auch die Schlußbemerkung der Fußnote[10]).

Hilfssatz 4: Wenn die Gruppen $\mathfrak{F}_\varrho$ des Hilfssatzes 1 „normal-charakteristisch" sind, d. h. bei allen eigentlichen, normalen Automorphismen auf sich selber abgebildet werden, so sind die im Sinne des Hilfssatzes 1 zu den $\mathfrak{F}_\varrho$ gehörigen Automorphismen H_ϱ mit allen normalen Automorphismen von $\mathfrak{G}$ vertauschbar. Umgekehrt sind die $\mathfrak{F}_\varrho$ normal-charakteristisch, falls die H_ϱ mit allen normalen Automorphismen von $\mathfrak{G}$ vertauschbar sind.

Beweis: Φ sei irgendein normaler Automorphismus von $\mathfrak{G}$. Nach Hilfssatz 3 ist dann $\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu$ im Fall $\mu \neq \nu$ zu P_1 addierbar und die Summen $\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu + \mathsf{P}_1$ ein eigentlicher, normaler Automorphismus. Sind die $\mathfrak{F}_\varrho$ normal-charakteristisch, so gilt $\mathfrak{F}_\mu(\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu + \mathsf{P}_1) = \mathfrak{F}_\mu$, was nur der Fall sein kann, wenn $\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu = \mathsf{P}_0$ ist; für jedes $A \in \mathfrak{G}$ ist nämlich

$$1. \qquad A\,\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu = (A\,\mathsf{H}_\mu)\,\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu \in \mathfrak{F}_\nu,$$

$$A\,\mathsf{H}_\mu(\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu + \mathsf{P}_1) = (A\,\mathsf{H}_\mu)\,\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu \cdot A\,\mathsf{H}_\mu = F_\mu \in \mathfrak{F}_\mu,$$

$$2. \qquad (A\,\mathsf{H}_\mu)\,\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu = F_\mu \cdot (A\,\mathsf{H}_\mu)^{-1} \in \mathfrak{F}_\mu,$$

also

$$3. \quad (A\,\mathsf{H}_\mu)\,\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu = A\,\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu \in (\mathfrak{F}_\mu \cap \mathfrak{F}_\nu) = (E),$$

$$\text{d. h. } A\,\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu = E = A\,\mathsf{P}_0.$$

Aus $\mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu = \mathsf{P}_0$ folgt:

$$\mathsf{H}_\mu \Phi = \mathsf{H}_\mu \Phi\,\mathsf{P}_1 = \mathsf{H}_\mu \Phi \Big(\sum_{\nu=1}^{r} \mathsf{H}_\nu\Big) = \sum_{\nu=1}^{r} \mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\nu = \mathsf{H}_\mu \Phi \mathsf{H}_\mu$$

$$= \sum_{\nu=1}^{r} \mathsf{H}_\nu \Phi \mathsf{H}_\mu = \Big(\sum_{\nu=1}^{r} \mathsf{H}_\nu\Big) \cdot \Phi \mathsf{H}_\mu = \mathsf{P}_1 \Phi \mathsf{H}_\mu = \Phi \mathsf{H}_\mu.$$

Umgekehrt werde jetzt angenommen, die H_ϱ seien mit jedem normalen, insbesondere mit jedem eigentlichen, normalen Automorphismus θ vertauschbar: $\mathsf{H}_\varrho \theta = \theta \mathsf{H}_\varrho$. Dann ist

$$\theta = \theta\,\mathsf{P}_1 = \theta \Big(\sum_{\mu=1}^{r} \mathsf{H}_\mu \cdot \mathsf{H}_\mu\Big) = \sum_{\mu=1}^{r} \mathsf{H}_\mu \theta \mathsf{H}_\mu,$$

$$\mathfrak{F}_\varrho \theta = \mathfrak{F}_\varrho \Big(\sum_{\mu=1}^{r} \mathsf{H}_\mu \theta \mathsf{H}_\mu\Big) = \mathfrak{F}_\varrho \mathsf{H}_\varrho \theta \mathsf{H}_\varrho \subseteq \mathfrak{F}_\varrho$$

und aus demselben Grunde

$$\mathfrak{F}_\varrho \theta^{-1} \subseteq \mathfrak{F}_\varrho, \text{ was } \mathfrak{F}_\varrho = (\mathfrak{F}_\varrho \theta^{-1})\,\theta \subseteq \mathfrak{F}_\varrho \theta \subseteq \mathfrak{F}_\varrho,$$

$$\mathfrak{F}_\varrho \theta = \mathfrak{F}_\varrho \text{ zur Folge hat.}$$

Nach diesen Vorbereitungen kehre ich wieder zum eigentlichen Thema dieser Arbeit zurück und beweise jetzt

Satz 3: *Eine direkte Produktzerlegung einer Gruppe* $\mathfrak{G}$

(I) $$\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}_r$$

hat mit jeder anderen derselben Gruppe

(II) $$\mathfrak{G} = \mathfrak{F}'_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}'_{r'}$$

stets dann und nur dann gemeinsame Verfeinerungen, wenn alle Faktoren von (I) *normal-charakteristisch sind, d. h. bei allen eigentlichen, normalen*[10]) *Automorphismen auf sich selber abgebildet werden.*

Beweis: Zunächst werde gezeigt, daß die Bedingung des Satzes 3 hinreichend ist, daß also (I) und (II) immer gemeinsame Verfeinerungen besitzen, wenn die $\mathfrak{F}_\varrho$ normal-charakteristisch sind. Unter dieser Voraussetzung sind nämlich die im Sinne des Hilfssatzes 1 zu (I) gehörigen Automorphismen $\mathsf{H}_1, \ldots, \mathsf{H}_r$ mit allen normalen Automorphismen, also nach Hifssatz 2 auch mit den speziellen Automorphismen $\mathsf{H}'_1, \ldots,$ vertauschbar, die im Sinne des Hilfssatzes 1 der Zerlegung (II) zugehören, woraus die Behauptung nach Satz 2 unmittelbar hervorgeht.

Es bleibt noch die Notwendigkeit der im Satz 3 angegebenen Bedingung zu beweisen, daß also die $\mathfrak{F}_\varrho$ normal-charakteristisch sind, falls (I) mit allen direkten Produktzerlegungen von $\mathfrak{G}$ je eine gemeinsame Verfeinerung besitzt. θ sei irgendein eigentlicher, normaler Automorphismus von $\mathfrak{G}$. Nach Hilfssatz 3 ist dann $\mathsf{H}_\mu \theta \mathsf{H}_\nu$ im Falle $\mu \neq \nu$ zum identischen Automorphismus P_1 addierbar und die Summe $\mathsf{H}_\mu \theta \mathsf{H}_\nu + \mathsf{P}_1 = \Pi_{\mu\nu}$ ein eigentlicher, normaler Automorphismus, der die Zerlegung (I) in eine zweite

(I′) $$\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_1 \Pi_{\mu\nu} \times \ldots \times \mathfrak{F}_\mu \Pi_{\mu\nu} \times \ldots \times \mathfrak{F}_r \Pi_{\mu\nu}$$

überführt. Wie unmittelbar ersichtlich, ist

$$\mathfrak{F}_1 \Pi_{\mu\nu} = \mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_{\mu-1} \Pi_{\mu\nu} = \mathfrak{F}_{\mu-1}, \ \mathfrak{F}_{\mu+1} \Pi_{\mu\nu} = \mathfrak{F}_{\mu+1}, \ldots, \mathfrak{F}_r \Pi_{\mu\nu} = \mathfrak{F}_r.$$

Da nun (I) und (I′) voraussetzungsgemäß eine gemeinsame Verfeinerung besitzen, muß auch $\mathfrak{F}_\mu \Pi_{\mu\nu} = \mathfrak{F}_\mu$ sein, was z. B. sofort aus Satz 1 folgt. Aus $\mathfrak{F}_\mu \Pi_{\mu\nu} = \mathfrak{F}_\mu$ ergibt sich $\mathsf{H}_\mu \theta \mathsf{H}_\nu = \mathsf{P}_0$ durch eine Überlegung, die schon beim Beweis des Hilfssatzes 4 angestellt wurde. Nun ist

$$\theta = \mathsf{P}_1 \theta \mathsf{P}_1 = \sum_{\mu=1}^{r} \sum_{\nu=1}^{r} \mathsf{H}_\mu \theta \mathsf{H}_\nu = \sum_{\mu=1}^{r} \mathsf{H}_\mu \theta \mathsf{H}_\mu,$$

also

$$\mathfrak{F}_\varrho \theta = \mathfrak{F}_\varrho \Big(\sum_{\mu=1}^{r} \mathsf{H}_\mu \theta \mathsf{H}_\mu \Big) = \mathfrak{F}_\varrho \mathsf{H}_\varrho \theta \mathsf{H}_\varrho \subseteq \mathfrak{F}_\varrho,$$

woraus — wieder auf Grund von Schlüssen, die schon beim Beweis des Hilfssatzes 4 angewandt wurden — die Behauptung $\mathfrak{F}_\varrho \cdot \theta = \mathfrak{F}_\varrho$ folgt.

Zusatz: Nach Hilfssatz 4 ist die Bedingung des Satzes 3 äquivalent damit, daß die im Sinne des Hilfssatzes 1 zu (I) gehörigen Auto-

morphismen H_ϱ mit allen normalen Automorphismen der Gruppe $\mathfrak{G}$ vertauschbar sind (d. h. im Zentrum des Automorphismenbereichs von $\mathfrak{G}$ liegen). Schließlich ist nach früheren Resultaten des Verfassers[12]) diese Bedingung auch gleichbedeutend damit, daß — unter $\mathfrak{R}_\mu$ die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{F}_\mu$ verstanden — eine operatorhomomorphe Abbildung von $\overline{\mathfrak{F}}_\mu = \mathfrak{F}_\mu/\mathfrak{R}_\mu$ auf eine Untergruppe $\overline{\mathfrak{Z}}_\nu$ des Zentrums von $\mathfrak{F}_\nu$ im Falle $\mu \neq \nu$ bloß dann möglich ist, wenn $\mathfrak{Z}_\nu$ nur das Einheitselement E enthält.

Der Zusatz zu Satz 3 führt zu einem interessanten

Nebenresultat: Wenn ein idempotenter, normaler Automorphismus H einer Gruppe $\mathfrak{G}$ mit jedem anderen idempotenten, normalen Automorphismus derselben Gruppe vertauschbar ist, so ist er sogar mit *allen* normalen Automorphismen von $\mathfrak{G}$ vertauschbar. Insbesondere ist in einem Ring mit Einselement ein idempotentes Element schon dann im Zentrum enthalten, wenn es mit jedem idempotenten Element des Ringes vertauschbar ist.

Der Beweis dieser Behauptung ist sehr einfach, wenn die Gruppe abelsch ist: H und $\mathsf{H}' = \mathsf{P}_1 - \mathsf{H}$ bilden dann offenbar ein vollständiges Orthogonalsystem und bestimmen daher nach Hilfssatz 1 die direkte Produktzerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}\mathsf{H} \times \mathfrak{G}\mathsf{H}'$. Da H und H' mit allen idempotenten Automorphismen vertauschbar sind, besitzt $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}\mathsf{H} \times \mathfrak{G}\mathsf{H}'$ nach Satz 2 mit jeder direkten Produktdarstellung von $\mathfrak{G}$ gemeinsame Verfeinerungen. Nach Satz 3 sind also die Gruppen $\mathfrak{G}\mathsf{H}$ und $\mathfrak{G}\mathsf{H}'$ charakteristisch und folglich H und H' auf Grund des Hilfssatzes 4 mit allen Automorphismen von $\mathfrak{G}$ vertauschbar. Im allgemeinen Fall einer beliebigen Gruppe führen dieselben Schlüsse zum Ziel; nur muß noch gezeigt werden, daß H zu einem vollständigen Orthogonalsystem ergänzt werden kann, was im Nichtkommutativen nicht ebenso trivial ist, wie im Spezialfall abelscher Gruppen, da die Gleichung $\mathsf{H} + \mathsf{H}' = \mathsf{P}_0$ nicht ohne weiteres auflösbar zu sein braucht. Zu beweisen bleibt also noch der

Hilfssatz 5: Zu jedem idempotenten, normalen Automorphismus H einer Gruppe $\mathfrak{G}$ gibt es stets einen zweiten Automorphismus H' derselben Gruppe, für den

$$(\varepsilon) \qquad \mathsf{H} + \mathsf{H}' = \mathsf{P}_1,\ \mathsf{H}\mathsf{H}' = \mathsf{H}'\mathsf{H} = \mathsf{P}_0,\ \mathsf{H}^2 = \mathsf{H},\ \mathsf{H}'^2 = \mathsf{H}'$$

gilt.

Beweis: Zunächst zeigen wir, daß H eine direkte Produktzerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{F} \times \mathfrak{F}'$ bestimmt, die man erhält, wenn $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}\mathsf{H}$ gesetzt und unter $\mathfrak{F}'$ die Gruppe aller Elemente aus $\mathfrak{G}$ verstanden wird, die beim Auto-

[12]) H. Fitting: Über die direkten Produktzerlegungen einer Gruppe in direkt unzerlegbare Faktoren, Math. Zeitschr. 39 (1934), S. 16–31, insbesondere die Sätze 5a, 5b.

morphismus H aufs Einheitselement E abgebildet werden (Peircesche Zerlegung). Da H normal sein sollte, ist $\mathfrak{F}$ und nach dem Homomorphiesatz auch $\mathfrak{F}'$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Definitionsgemäß ist $F'\mathsf{H} = E$ für alle $F' \in \mathfrak{F}'$, aber $A\mathsf{H} = A\mathsf{H}^2 = (A\mathsf{H})\mathsf{H} \neq E$ für alle von E verschiedene Elemente $A \cdot \mathsf{H}$ aus $\mathfrak{F}$. $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ können also nur das Einheitselement gemein haben. Die kleinste zulässige Untergruppe von $\mathfrak{G}$, welche die Normalteiler $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ enthält, ist daher das direkte Produkt $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}'$. Nun gilt für jedes Element $A \in \mathfrak{G}$

$$A\mathsf{H} \cdot \{(A\mathsf{H})^{-1} \cdot A\} = A \quad \text{mit} \quad A\mathsf{H} \in \mathfrak{F},\ (A\mathsf{H})^{-1} \cdot A \in \mathfrak{F}'.$$

Folglich ist $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}' = \mathfrak{G}$, was zunächst bewiesen werden sollte. Wählt man jetzt für H' den Automorphismus $(A \to A')$, wo A irgendein Element aus $\mathfrak{G}$ und A' seine $\mathfrak{F}'$-Komponente bedeutet, so sind für H und H' nach Hilfssatz 1 die Relationen (ε) erfüllt, womit auch Hilfssatz 5 bewiesen ist.

§ 4.

Aus Satz 3 ergibt sich als unmittelbare Folgerung:

Satz 4: *Zwei direkte Produktzerlegungen einer Gruppe in normal-charakteristische Faktoren (siehe Satz* 3) *haben stets gemeinsame Verfeinerungen, deren Faktoren wieder normal-charakteristisch sind*[13]).

§ 5.

Aus Satz 3 folgt weiter sofort

Satz 5: *In einer Gruppe $\mathfrak{G}$ haben je zwei direkte Produktzerlegungen dann und nur dann gemeinsame Verfeinerungen, wenn alle direkten Faktoren der Gruppe im Sinne der in Satz* 3 *angegebenen Definition „normal-charakteristisch" sind. Äquivalent mit dieser Bedingung ist nach den Hilfssätzen* 4 *und* 5, *daß alle idempotenten, normalen Automorphismen mit allen normalen Automorphismen vertauschbar sind (d. h. im Zentrum des Automorphismenbereiches liegen) und nach den Sätzen* 5a *und* 5b *der in der Fußnote* [12]) *zitierten Arbeit, daß bei jeder direkten Produktzerlegung von $\mathfrak{G}$ in zwei Faktoren $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ operatorhomomorphe Abbildungen von $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}/\mathfrak{A}^*$ (bzw. $\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}/\mathfrak{B}^*$) auf eine nicht nur aus dem Einheitselement bestehende Untergruppe des Zentrums von $\mathfrak{B}$* (bzw. $\mathfrak{A}$) *nicht existieren*; $\mathfrak{A}^*$ (bzw. $\mathfrak{B}^*$) *bedeutet hierbei die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{A}$ (bzw. $\mathfrak{B}$).*

Satz 6: *Eine hinreichende, aber keineswegs notwendige Bedingung dafür, daß zu je zwei direkten Produktzerlegungen einer Gruppe $\mathfrak{G}$ immer gemeinsame Verfeinerungen existieren, ist auch die, daß operatorhomomorphe Abbildungen der durch die Kommutatorgruppe $\mathfrak{G}^*$ von $\mathfrak{G}$ bestimmten Rest-*

[13]) Für abelsche Gruppen ist der Satz bereits von R. Baer in der unter [2]) zitierten Arbeit bewiesen.

klassengruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^*$ auf eine Untergruppe $\overline{\mathfrak{Z}}$ des Zentrums von $\mathfrak{G}$ nur im trivialen Fall $\overline{\mathfrak{Z}} = (E)$ möglich sind.

Dieses Resultat ist natürlich nur ein Spezialfall des vorangehenden Satzes, was unmittelbar ersichtlich wird, wenn die dritte der untereinander äquivalenten Bedingungen des Satzes 5 herangezogen wird. Es läßt sich aber auch leicht folgendermaßen beweisen:

Bei einem eigentlichen, normalen Automorphismus θ ist $B^{-1} \cdot B\theta$ im Zentrum der Gruppe enthalten, was aus

$$B\theta \cdot A\theta \cdot (B\theta)^{-1} = B\theta \cdot A\theta \cdot B^{-1}\theta = (B \cdot A \cdot B^{-1})\theta = B \cdot A\theta \cdot B^{-1},$$
$$(B^{-1} \cdot B\theta) \cdot A\theta = A\theta \cdot (B^{-1} \cdot B\theta)$$

folgt, wenn man beachtet, daß $A\theta$ mit A alle Elemente der Gruppe durchläuft. Infolgedessen ist

$$\underbrace{B^{-1} \cdot B\theta} \cdot C^{-1} \cdot C\theta = C^{-1} \cdot \underbrace{B^{-1} \cdot B\theta} \cdot C\theta = (B \cdot C)^{-1} \cdot (B \cdot C)\theta,$$

also die Zuordnung

$$\Pi = (A \to A^{-1} \cdot A\theta)$$

wieder ein Automorphismus von $\mathfrak{G}$ und zwar ein solcher, der $\mathfrak{G}$ auf eine Untergruppe $\overline{\mathfrak{Z}}$ des Zentrums abbildet und daher eine operatorhomomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^*$ auf $\overline{\mathfrak{Z}}$ vermittelt. Unter der Voraussetzung des Satzes 6 ist bei einer solchen Abbildung $\overline{\mathfrak{Z}} = (E)$, d. h. $A^{-1} \cdot A\theta = E$, $A\theta = A = A\,\mathsf{P}_1$. $\mathfrak{G}$ hat daher in unserem Spezialfall nur einen eigentlichen, normalen Automorphismus: den identischen $\theta = \mathsf{P}_1$. Hieraus folgt, daß alle Untergruppen, insbesondere auch alle direkten Faktoren von $\mathfrak{G}$ normal-charakteristisch sind, womit die Behauptung nach Satz 5 bewiesen ist.

Als Spezialfall des Satzes 6 ergibt sich schließlich noch:

Satz 7: *Direkte Produktzerlegungen einer Gruppe, deren Zentrum nur (E) als zulässige Untergruppe enthält, oder einer solchen, die mit ihrer Kommutatorgruppe identisch ist, haben immer gemeinsame Verfeinerungen.*

Bei endlichen Gruppen oder allgemeiner solchen, in denen der Doppelkettensatz für die Normalteiler gilt, führen die Sätze 5, 6 und 7 unmittelbar zu den Sätzen 4, 6, 7, 8 und 9 der in Fußnote [12]) zitierten Arbeit, die hiermit neu bewiesen worden sind.

§ 6.

Die Ergebnisse des vorigen Paragraphen verdienen besonderes Interesse, da sie den Beweis des folgenden Satzes ermöglichen.

Satz 8: *Es gibt Gruppen, die — abgesehen von der nur aus dem Einheitselement bestehenden Untergruppe — keinen direkt-unzerlegbaren,*

direkten Faktor besitzen[14]*), unter diesen existieren sogar solche, die nur abzählbar viele Elemente und nur Elemente von beschränkter Ordnung, nämlich nur Elemente der Ordnung* 1, 2, 3 *oder* 6 *enthalten.*

Beweis: Die Behauptung wird durch ein Beispiel bestätigt.

Es sei n eine nicht negative, ganz rationale Zahl und m eine der 2^n Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 2^n$. Weiter sei $J_{n,m}$ das unten abgeschlossene, oben offene Intervall $\left[\frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n}\right)$, d. h. die Menge aller reellen Zahlen mit der Eigenschaft $\frac{m-1}{2^n} \leqq x < \frac{m}{2^n}$. Schließlich sei $\mathfrak{D}_6$ die Diedergruppe (die nichtabelsche Gruppe) von der Ordnung 6.

Mit $f_{nk}(x) = y$ werde jetzt eine von den 6^n stückweise konstanten Funktionen bezeichnet, die jeder der Bedingung $0 \leqq x < 1$ genügenden, reellen Zahl x ein eindeutig bestimmtes Element der $\mathfrak{D}_6$ als Wert zuordnet und zwar so, daß Argumenten x_1, x_2, die ein und demselben Intervall J_{nm} $(m = 1, 2, \ldots, 2^n)$ angehören, derselbe Wert zugewiesen ist. Die Gesamtheit aller Funktionen dieser Art, die unter der Voraussetzung, daß n alle nicht negativen, ganz rationalen Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ durchläuft, möglich sind, möge $\mathfrak{G}$ genannt werden. Definiert man das „Produkt" zweier Funktionen $f_{n_1,k_1}(x) = y$, $f_{n_2,k_2}(x) = y$ der Menge $\mathfrak{G}$ als diejenige Funktion, die jedem reellen x mit $0 \leqq x < 1$ das Produkt der Gruppenelemente $f_{n_1,k_1}(x)$, $f_{n_2,k_2}(x)$ als Wert zuordnet, so wird $\mathfrak{G}$ offenbar zu einer Gruppe, von der jetzt gezeigt werden soll, daß sie keinen direkt-unzerlegbaren, direkten Faktor enthält, der mehr als nur das Einheitselement umfaßt. Hierzu wird die Menge $\mathfrak{F}_{n,m}$ aller Funktionen aus $\mathfrak{G}$ betrachtet, die außerhalb des Intervalles J_{nm} das Einheitselement der $\mathfrak{D}_6$ als Wert besitzt. Wie unmittelbar ersichtlich, ist $\mathfrak{F}_{n,m}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$, außerdem gelten die leicht beweisbaren Gleichungen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G} &= \mathfrak{F}_{01} \\
\mathfrak{G} &= \mathfrak{F}_{11} \times \mathfrak{F}_{12} \\
&\quad \mathfrak{F}_{21} \times \mathfrak{F}_{22} \times \mathfrak{F}_{23} \times \mathfrak{F}_{24} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathfrak{G} &= \mathfrak{F}_{n1} \times \mathfrak{F}_{n2} \times \ldots \times \mathfrak{F}_{nm} \times \ldots \times \mathfrak{F}_{n\,2^n} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

[14]) Daß Gruppen dieser Art existieren, wurde von A. Kurosch in der Einleitung der Arbeit: Zur Zerlegung unendlicher Gruppen, Math. Annalen **106** (1932), S. 108 als Vermutung ausgesprochen und erstmalig von F. Levi nach Kenntnisnahme einiger Resultate der vorliegenden Abhandlung durch Angabe eines Beispiels bestätigt, das mir Herr Levi liebenswürdigerweise für eine Veröffentlichung in dieser Arbeit zur Verfügung gestellt hat. Das ursprüngliche, ziemlich komplizierte, Levische Beispiel habe ich durch ein einfacheres ersetzt.

Da das Zentrum der Gruppe $\mathfrak{G}$ — wie man mühelos einsieht — nur aus dem Einheitselement besteht, muß ein direkt-unzerlegbarer Faktor $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ nach Satz 7 für jedes noch so große n in einem der 2^n Faktoren $\mathfrak{F}_{n,m}$ $(m = 1, 2, \ldots, 2^n)$ (etwa $\mathfrak{F}_{n,\psi(n)}$) als direkter Faktor enthalten sein. Hieraus folgt aber sofort, daß $\mathfrak{U}$ kein vom Einheitselement verschiedenes Element enthalten kann: Bei einem solchen $f_{n^*,k^*}(x) = y$ müßte nämlich die Summe der Durchmesser von denjenigen Intervallen, in denen $f_{n^*k^*}(x) = y$ einen vom Einheitselement der $\mathfrak{D}_6$ verschiedenen Wert hat, einerseits größer oder gleich $\frac{1}{2^{n^*}}$, andererseits wegen $f_{n^*k^*}(x) \in \mathfrak{U} \subset \mathfrak{F}_{n,\psi(n)}$ kleiner oder gleich $\frac{1}{2^n}$ sein, was im Fall $n > n^*$ zu einem Widerspruch führt.

(Eingegangen am 3. Februar 1936.)

Zusatz bei der Korrektur.

(April 1936.)

Es sei $\mathfrak{R}$ die Menge aller Automorphismen einer Gruppe $\mathfrak{G}$, welche die Gruppe auf eine Untergruppe ihres Zentrums abbilden. $\mathfrak{S}$ sei ferner die Gruppe aller Elemente von $\mathfrak{G}$, denen bei jedem Automorphismus aus der Menge $\mathfrak{R}$ das Einheitselement von $\mathfrak{G}$ zugeordnet ist und schließlich $\mathfrak{T}$ diejenige Untergruppe von $\mathfrak{G}$, die von allen Bildgruppen $\mathfrak{G}\,\mathsf{Z}$ mit $\mathsf{Z} \in \mathfrak{R}$ aufgespannt wird, d. h. die Menge sämtlicher Produkte endlich vieler Faktoren von der Form $A\,\mathsf{Z}$, bei denen A irgendein Element aus $\mathfrak{G}$ und Z irgendein Automorphismus aus der Menge $\mathfrak{R}$ bedeutet.

Hilfssatz 6: Jede direkte Produktzerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}_r$ vermittelt je eine eindeutig bestimmte direkte Produktzerlegung der Gruppen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}$

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \times \ldots \times \mathfrak{S}_r, \quad \mathfrak{G}/\mathfrak{T} = \mathfrak{G}/\mathfrak{T}_1 \times \ldots \times \mathfrak{G}/\mathfrak{T}_r,$$

die man erhält, wenn man $\mathfrak{S}_\varrho = \mathfrak{S}\,\mathsf{H}_\varrho$; $\mathfrak{T}_\varrho = \mathfrak{T}\,\mathsf{H}_\varrho$ setzt, wobei unter $\mathsf{H}_1, \ldots, \mathsf{H}_r$ das im Sinne des Hilfssatzes 1 zu $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}_r$ gehörige Automorphismensystem verstanden wird.

Beweis: Da mit Z auch $\mathsf{H}_\varrho\,\mathsf{Z}$ und $\mathsf{Z}\,\mathsf{H}_\varrho$ zu $\mathfrak{R}$ gehören, gilt für jedes $S \in \mathfrak{S}$, $\mathsf{Z} \in \mathfrak{R}$ $(S\,\mathsf{H}_\varrho)\,\mathsf{Z} = S\,(\mathsf{H}_\varrho\,\mathsf{Z}) = E$, also $S\,\mathsf{H}_\varrho \in \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}\,\mathsf{H}_\varrho \subset \mathfrak{S}$ und für jedes $T = A_1\,\mathsf{Z}_1 \cdot A_2\,\mathsf{Z}_2 \cdot \ldots \cdot A_n\,\mathsf{Z}_n \in \mathfrak{T}$, $T\,\mathsf{H}_\varrho = (A_1\,\mathsf{Z}_1)\,\mathsf{H}_\varrho \cdot \ldots \cdot (A_n\,\mathsf{Z}_n)\,\mathsf{H}_\varrho = A_1\,(\mathsf{Z}_1\,\mathsf{H}_\varrho) \cdot \ldots \cdot A_n\,(\mathsf{Z}_n\,\mathsf{H}_\varrho) \in \mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}\,\mathsf{H}_\varrho \subseteq \mathfrak{T}$. Aus $\mathfrak{S}\,\mathsf{H}_\varrho \subseteq \mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}\,\mathsf{H}_\varrho \subseteq \mathfrak{T}$

folgt, daß H_ϱ in $\mathfrak{S}$ bzw. in $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}$ einen Automorphismus $\bar{\mathsf{H}}_\varrho$ bzw. $\bar{\bar{\mathsf{H}}}_\varrho$ induziert, derart, daß

$$\bar{\mathsf{H}}_\mu \cdot \bar{\mathsf{H}}_\nu = \begin{matrix} \bar{\mathsf{H}} & \text{für } \mu = \nu \\ \bar{\mathsf{P}}_0 & \text{für } \mu \neq \nu \end{matrix}, \qquad \sum_{\mu=1}^{r} \bar{\mathsf{H}}_\mu = \bar{\mathsf{P}}_1, \qquad \mathfrak{S}\,\bar{\mathsf{H}}_\varrho = \mathfrak{S}\,\mathsf{H}_\varrho$$

$$\mathsf{H}_\mu \cdot \mathsf{H}_\nu = \begin{matrix} \bar{\mathsf{H}}_\mu & \text{für } \mu = \nu \\ \bar{\mathsf{P}}_0 & \text{für } \mu \neq \nu \end{matrix}, \qquad \sum_{\mu=1}^{r} \mathsf{H}_\mu = \mathsf{P}_1, \; (\mathfrak{G}/\mathfrak{T})\,\bar{\mathsf{H}}_\varrho = \mathfrak{G}/\mathfrak{T}\,\mathsf{H}_\varrho$$

gilt, woraus die Behauptung nach Hilfssatz 1 unmittelbar hervorgeht. $\bar{\mathsf{P}}_0$, P_0 sind die Nullautomorphismen, $\bar{\mathsf{P}}_1$, $\bar{\bar{\mathsf{P}}}_1$ die identischen Automorphismen von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}$.

Satz 6a: *Die von zwei direkten Produktzerlegungen*

(I) $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}_r$, (II) $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}'_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}'_{r'}$

induzierten Zerlegungen des Hilfssatzes 6 haben stets gemeinsame Verfeinerungen.

Beweis: $\mathsf{H}_1, \ldots, \mathsf{H}_r$ und $\mathsf{H}'_1, \ldots, \mathsf{H}'_{r'}$ seien die Automorphismensysteme, die nach Hilfssatz 1 zu (I) und (II) gehören. Im Fall $\mu \neq \nu$ ist dann $\mathsf{H}_\mu \mathsf{H}'_\lambda \mathsf{H}_\nu$ nach Hilfssatz 3 zum identischen Automorphismus addierbar, woraus $\mathsf{H}_\mu \mathsf{H}'_\lambda \mathsf{H}_\nu \in \mathfrak{R}$, also auch

$$\mathfrak{S}\,\mathsf{H}_\mu \mathsf{H}'_\lambda \mathsf{H}_\nu = (E), \qquad \mathfrak{G}\,\mathsf{H}_\mu \mathsf{H}'_\gamma \mathsf{H}_\nu \subset \mathfrak{T}$$

folgt. Für die von $\mathsf{H}_\mu, \mathsf{H}'_\lambda, \mathsf{H}_\nu$ induzierten Automorphismen $\bar{\mathsf{H}}_\mu, \bar{\mathsf{H}}'_\lambda, \bar{\mathsf{H}}_\nu$ bzw. $\mathsf{H}_\mu, \mathsf{H}'_\lambda, \bar{\mathsf{H}}_\nu$ der Gruppe $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}$ bedeuten diese Beziehungen, daß

$$\bar{\mathsf{H}}_\mu \bar{\mathsf{H}}'_\lambda \bar{\mathsf{H}}_\nu = \bar{\mathsf{P}}_0, \qquad \mathsf{H}_\mu \mathsf{H}'_\lambda \mathsf{H}_\nu = \bar{\mathsf{P}}_0$$

gilt. Hieraus erhält man

$$\bar{\mathsf{H}}_\mu \bar{\mathsf{H}}'_\lambda = \sum_{\nu=1}^{r} \bar{\mathsf{H}}_\mu \bar{\mathsf{H}}'_\lambda \bar{\mathsf{H}}_\nu = \bar{\mathsf{H}}_\mu \bar{\mathsf{H}}'_\lambda \bar{\mathsf{H}}_\mu = \sum_{\nu=1}^{r} \bar{\mathsf{H}}_\nu \bar{\mathsf{H}}'_\lambda \bar{\mathsf{H}}_\mu = \bar{\mathsf{H}}'_\lambda \bar{\mathsf{H}}_\mu$$

und ebenso $\mathsf{H}_\mu \mathsf{H}'_\lambda = \bar{\mathsf{H}}'_\lambda \mathsf{H}_\mu$, was nach Satz 2 mit der zu beweisenden Behauptung äquivalent ist.

Satz 6a ist eine Verallgemeinerung des Satzes 6, unter dessen Voraussetzung offenbar $\mathfrak{T} = (E)$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{S} = \mathfrak{G}/\mathfrak{T}$ gilt. Als Verallgemeinerung des Satzes 7 erhält man entsprechend

Satz 7a: *Hilfssatz 6 und Satz 6a gelten auch dann, wenn $\mathfrak{S}$ durch die Kommutatorgruppe $\mathfrak{G}^*$ und $\mathfrak{T}$ durch das zulässige Zentrum $\mathfrak{G}^{**}$ von $\mathfrak{G}$ ersetzt wird. Das zulässige Zentrum einer Gruppe mit Operatoren ist die maximale zulässige Untergruppe des gewöhnlichen Zentrums, zu der ein Element A stets dann und nur dann gehört, wenn A und alle durch Anwendung von Operatoren aus A entstehenden Elemente mit allen Elementen der Gesamtgruppe vertauschbar sind.*

Beim Beweise beachte man $\mathfrak{G}^* \subseteq \mathfrak{S}$, $\mathfrak{G}^{**} \supseteq \mathfrak{T}$.

Beweis des Jordanschen Kurvensatzes für den Jordanbogen.

Von

K. Wagner in Köln.

Die vorliegende Arbeit bringt einen neuen Beweis[1]) des Jordanschen Kurvensatzes für den Jordanbogen[2]). Dieser Satz ist deshalb von Bedeutung, weil mit ihm der bekannte[3]) Jordansche Kurvensatz für geschlossene Jordankurven[4]) bewiesen wird.

$x_1(t)$, $x_2(t)$ seien zwei auf das Intervall $0 \leqq t \leqq 1$ bezogene stetige Funktionen. Sie bestimmen in der Ebene eine stetige Kurve:

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t)).$$

Gilt $X(t_1) \neq X(t_2)$ für je zwei verschiedene Werte t_1 und t_2 des Intervalls, so bezeichnet man die Kurve als einen Jordanbogen. Mit anderen Worten ist also ein Jordanbogen eine stetige, doppelpunktfreie Kurve. Der Kurvensatz, den wir im folgenden beweisen wollen, lautet:

Die Ebene wird durch einen Jordanbogen J nicht zerlegt; d. h. zwei beliebige nicht auf J gelegene Punkte P und Q der Ebene lassen sich durch einen Polygonzug in der Ebene verbinden, der J nicht trifft.

Vorbemerkungen: $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots, A_{n_0}$ seien n_0 beliebige Punkte der Ebene. Mit $A_1 \ldots A_{n_0}$ bezeichnen wir kurz den Polygonzug p, der geradlinig von A_1 nach A_2, von A_2 nach A_3 und schließlich von A_{n_0-1} nach A_{n_0} verläuft. P sei ein nicht auf p gelegener Punkt der Ebene. Um P legen wir einen Drehsinn fest, so daß wir positive und negative Winkel bei P messen können. Die bis auf Vielfache von 2π bestimmten Winkel $A_{n-1} P A_n$, $n = 2, 3, \ldots, n_0$, legen wir eindeutig durch die Forderung: $-\pi < \measuredangle A_{n-1} P A_n < +\pi$ fest. Die Summe der $n_0 - 1$ Winkel

[1]) Vgl. das Referat des Verf.: Beweis des Jordanschen Kurvensatzes für den Jordanbogen; Jahresbericht der Dtsch. Math.-Ver. 45 (1935), S. 75 kursiv.

[2]) Vgl. den Beweis von Erh. Schmidt: Über den Jordanschen Kurvensatz; Sitzungsber. d. Pr. Ak. d. W. 1923, S. 319.

[3]) Beweis in der in Fußnote [2]) zitierten Arbeit.

[4]) Der Satz besagt, daß eine geschlossene Jordankurve (= eineindeutiges, stetiges Bild eines Kreises) die Ebene in zwei Gebiete zerlegt.

$A_{n-1} P A_n$ bezeichnet man als die *Charakteristik* des Polygons p bezüglich des Punktes P. In Zeichen:

$$\sum_{n=2}^{n_0} \measuredangle A_{n-1} P A_n = U(p) = U(A_1 \dots A_{n_0}).$$

Es folgt:

1. Für ein geschlossenes Polygon ($A_{n_0} = A_1$) ist die Charakteristik U Vielfaches von 2π oder 0,

2. die Charakteristik U ist additiv; d. h.

$$U(A_1 \dots A_n) + U(A_n \dots A_{n_0}) = U(A_1 \dots A_{n_0}) \text{ bezüglich } P.$$

Hilfssätze. Wir denken uns die Ebene netzartig in gleich große Quadrate aufgeteilt. Die vier Seiten eines jeden Quadrates seien nach einem fest gewählten Drehsinn orientiert. Die gemeinsame Seite von zwei benachbarten Quadraten ist dann entgegengesetzt orientiert. Wir wollen einmal m_0 Quadrate $q_1, q_2, \dots, q_m, \dots, q_{m_0}$ aus der Aufteilung herausgreifen. Ist jedes q_m ($m = 2, 3, \dots, m_0$) mit wenigstens einem der $q_1, q_2, \dots, q_{m-1}$ benachbart, so nennen wir die m_0 Quadrate eine Quadratfolge. Die Seiten der m_0 Quadrate, an denen nur ein einziges Quadrat der Folge liegt, wollen wir *äußere* Seiten der Quadratfolge nennen. P sei ein innerer Punkt von q_1. Es gilt:

I. Die äußeren Seiten der Quadratfolge bilden geschlossene Polygone, und für mindestens eins ist die Charakteristik bezüglich P Vielfaches von 2π, d. h. von Null verschieden.

Denn zunächst bilden wir die geschlossenen Polygone $p'_1, p'_2, \dots, p'_{m_0}$ aus den vier orientierten Seiten eines jeden q_m. Wir wären fertig, wenn diese m_0 Polygone nur aus äußeren Seiten bestünden. Wir müssen also die übrigen Seiten, die sich paarweise zu gleichen, aber verschieden orientierten zusammenfassen lassen, fortschaffen. Wir nehmen dazu an, daß wir bei den geschlossenen Polygonen

(1) $\quad A_1 A_2 \dots A_n A_{n+1} \dots A_m A_{m+1} \dots A_{n_0} \qquad (A_{n_0} = A_1),$

(2) $\quad A'_1 A'_2 \dots A'_r A'_{r+1} \dots A'_{r_0} \qquad (A'_{r_0} = A'_1),$

. . . . . .

angekommen seien, die aus den äußeren Seiten und mindestens noch aus einem Paar gleicher, entgegengesetzt orientierter Seiten der Quadratfolge bestehen. Ein solches Seitenpaar kann entweder in demselben Polygon oder in zwei verschiedenen auftreten. Im ersten Falle sei $A_n A_{n+1}$ und $A_m A_{m+1}$ das Paar. Wir bilden dann aus (1), vermindert um das Seitenpaar, die beiden Polygone[5]):

[5]) Der Fall $n + 1 = m$ oder $m + 1 = n_0$, $n = 1$ ist trivial.

$A_1 A_2 \ldots A_n A_{m+2} \ldots A_{n_0}$ und $A_{n+1} A_{n+2} \ldots A_m$. Im zweiten Falle, wo $A_n A_{n+1}$ und $A'_r A'_{r+1}$ ein solches Paar sei, ergibt sich aus (1) und (2) das Polygon: $A_1 A_2 \ldots A_n A'_{r+2} \ldots A'_{r_0} A'_2 \ldots A'_r A_{n+2} \ldots A_{n_0}$. Wir können also die Seitenpaare nacheinander aus den Polygonen fortschaffen, so daß wir schließlich die gesuchten Polygone $p_1, p_2, \ldots, p_{s_0}$ der äußeren Seiten erhalten. Die Charakteristik für eins der $p_1, \ldots, p_{s_0}$ ist von 0 verschieden. Denn die Charakteristik für die entgegengesetzt orientierten Seitenpaare ist 0. Also ist wegen der Additivität der Charakteristik die Summe der Charakteristiken von $p_1, \ldots, p_{s_0}$ gleich der von $p'_1, \ldots, p'_{m_0}$. Letztere ist aber ersichtlich $\pm 2\pi$. Also ist ein Summand der ersten Summe von 0 verschieden, womit I bewiesen ist.

Der Jordanbogen J ist eine abgeschlossene Punktmenge, da $x_1(t)$ und $x_2(t)$ stetige Funktionen sind. Die Punkte P und Q, die nach Voraussetzung nicht auf J liegen, haben also von J einen Minimalabstand $d > 0$. Es sei eine kleine positive Zahl $\varepsilon < d$ gegeben. Wegen der Stetigkeit von $x_1(t)$ und $x_2(t)$ gibt es zu ε eine Zahl $\delta(\varepsilon) > 0$, so daß die Entfernung zweier Kurvenpunkte

(A) $$X(t)\,X(t') < \varepsilon \quad \text{ist, sofern nur} \quad |t - t'| < \delta(\varepsilon)$$

gilt und die beiden Werte t und t' aus dem Intervall $0 \ldots 1$ sind. Wir teilen nun das Intervall $0 \ldots 1$ der t-Achse, bei 0 angefangen, in endlich viele Teilintervalle der Länge $< \delta(\varepsilon)$. Ihre Endpunkte bezeichnen wir der Reihe nach, bei 0 angefangen, mit $t_0 = 0; t_1, t_2, \ldots, t_m, \ldots, t_{n_0} = 1$. Um jeden der $n_0 + 1$ Kurvenpunkte $X(t_n) = X_n$ schlagen wir einen Kreis k_n mit dem Radius ε. Anschaulich möchte man die Kreisscheiben $k_0, k_1, \ldots, k_{n_0}$ mit einer Kette vergleichen, da je zwei aufeinanderfolgende Kreisscheiben k_n und k_{n+1} Punkte gemeinsam haben, wie aus (A) folgt. Wir nehmen einmal an, daß eine Kreisscheibe k_n mit einer anderen k_m $(n < m)$ Punkte gemeinsam hat; ferner sei uns ein geschlossenes Polygon p gegeben, das geradlinig von X_n nach X_{n+1} u. s. f. nach X_m, dann aber innerhalb der beiden Kreise k_n und k_m beliebig zurück nach X_n verlaufe. Dieses Polygon p wollen wir kurz mit $X_n X_{n+1} \ldots X_m \ldots X_n$ bezeichnen (Fig. 1).

Definition: Ist die Charakteristik von p bezüglich des Punktes P bzw. Q von Null verschieden, also Vielfaches von 2π, so nennen wir die Kreisscheiben $k_n, k_{n+1}, \ldots, k_m$ eine *Kette* K um P bzw. Q über dem Intervall $t_n \ldots t_m$. p nennen wir das Polygon der Kette K. — Wir bemerken zunächst, daß bei hinreichend kleinem ε die Längen der Intervalle, über denen es eine Kette gibt, sämtlich über einer positiven, von ε unabhängigen Schranke liegen. Denn K sei eine Kette um P über dem Inter-

vall $t_n \dots t_m$. p sei das Polygon von K. Da nun die Charakteristik von p bezüglich P Vielfaches von 2π ist, so muß bei der Summation der Winkel einmal $+\pi$ oder $-\pi$ überschritten werden; d. h. es gibt bezüglich P auf p einen diametralen Punkt D zu X_n. Nun liegt D in einer Kreisscheibe k_r, $n < r \leqq m$, mit dem Radius ε. Wie man sieht, beträgt die Entfernung der beiden Kurvenpunkte X_n und X_r mindestens d, falls ε genügend klein ist. Dann ist es aber wegen der Stetigkeit un-

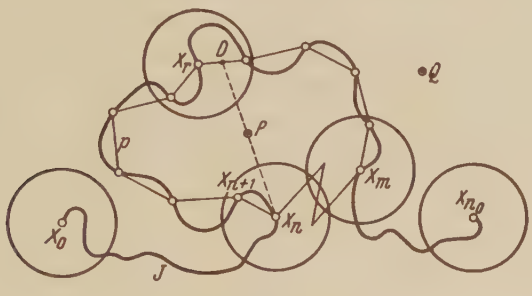

Fig. 1.

möglich, daß ihre Parameterwerte t_n und t_r beliebig nahe zusammenrücken; d. h. das Intervall $t_n \dots t_m$ kann nicht beliebig klein werden, wie behauptet wurde. Es folgt nun leicht:

II a. Es gibt eine Zahl $\varepsilon > 0$, bei der die Kreisscheiben k_n weder eine Kette um P noch um Q bilden.

Denn wir wählen eine Folge gegen Null abnehmender Zahlen ε_1, $\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, \dots$, deren erste schon kleiner als d sei. Wir nehmen an, daß es bei jedem ε_r eine Kette K_r über einem Intervall $a_r \dots b_r$ $(0 \leqq a_r < b_r \leqq 1)$ der t-Achse gäbe. Nun haben die a_r einen Häufungspunkt a_0, nach dem also eine Teilfolge $a_{r'}$ der a_r konvergiert. Analog konvergiert eine Teilfolge $b_{r''}$ der $b_{r'}$ nach b_0. Es ist $a_0 \neq b_0$, da die Länge der Intervalle $a_r \dots b_r$, wie wir sahen, nicht beliebig klein wird. Wegen der Stetigkeit von J konvergiert $X(a_{r''})$ nach $X(a_0)$ und $X(b_{r''})$ nach $X(b_0)$. Nun ist der Abstand von $X(a_{r''})$ und $X(b_{r''})$ kleiner als $2\varepsilon_{r''}$. $\varepsilon_{r''}$ konvergiert nach 0. Also folgt: $X(a_0) = X(b_0)$ für $a_0 \neq b_0$ im Widerspruch zur Definition des Jordanbogens. Es gibt also unter den ε_r eine Zahl $\varepsilon > 0$, bei der die Kreisscheiben keine Kette um P oder Q bilden. Wir wollen im folgenden diese Kreise wieder mit $k_0, k_1, \dots, k_n, \dots, k_{n_0}$, ihre Mittelpunkte mit $X(t_n) = X_n$ bezeichnen. Wir behaupten zum Schluß:

II b. Jedes geschlossene Polygon y, das ganz im Innern der Kreise $k_0, \dots, k_{n_0}$ verläuft, hat die Charakteristik $U(y) = 0$ bezüglich P und Q.

Denn verläuft y speziell ganz in einem k_n, so gibt es auf y zu P dgl. Q kein diametrales Punktepaar, da P und Q im Äußern von k_n liegen. Es ist also $-\pi < U(y) < +\pi$, mithin $U(y) = 0$. Anderenfalls hat y mit den Kreisen $k_0, \ldots, k_{n_0}$ endlich viele Schnittpunkte Y_1, $Y_2, \ldots, Y_m, \ldots, Y_{m_0}$ $(Y_{m_0} = Y_1)$, wobei die Indizes die Punkte in der Reihenfolge angeben mögen, in der wir sie auf y antreffen. Durch diese Punkte wird y in kleine Stücke $Y_1 \ldots Y_2$, $Y_2 \ldots Y_3$, u. s. f. zerlegt. Y_1 liege im Innern des Kreises k_{r_1}, Y_2 innerhalb k_{r_2} u. s. f. $(k_{r_{m_0}} = k_{r_1})$. $Y_1 \ldots Y_2$ ergänzen wir nun wie folgt zu einem geschlossenen Polygon. Wir laufen von Y_2 geradlinig nach X_{r_2}, sodann auf dem Polygonzug $X_0 X_1 \ldots X_{n_0}$ von X_{r_2} nach X_{r_1} und nun von X_{r_1} geradlinig nach Y_1, dem anderen Endpunkt des Stückes $Y_1 \ldots Y_2$ von y. Das geschlossene Polygon werde kurz mit $Y_1 \ldots Y_2 X_{r_2} \ldots X_{r_1} Y_1$ bezeichnet. Da es keine Kette gibt, folgt aus IIa:

$$U(Y_1 \ldots Y_2 X_{r_2} \ldots X_{r_1} Y_1) = 0$$

bezüglich P und Q. Analog

$$U(Y_2 \ldots Y_3 X_{r_3} \ldots X_{r_2} Y_2) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$U(Y_{m_0-1} \ldots Y_{m_0} X_{r_{m_0}} \ldots X_{r_{m_0-1}} Y_{m_0-1}) = 0.$$

Addieren wir diese $m_0 - 1$ Gleichungen, so folgt wegen der Additivität von U und wegen $Y_{m_0} = Y_1$:

$$\begin{aligned} U(y) &= U(X_{r_1} \ldots X_{r_2}) + U(X_{r_2} \ldots X_{r_3}) + \ldots + U(X_{r_{m_0-1}} \ldots X_{r_{m_0}}) \\ &= U(X_{r_1} \ldots X_{r_1}) = 0, \end{aligned}$$

womit IIb bewiesen ist.

Schluß. Mit Hilfe von I und IIb folgt leicht, daß sich die Punkte P und Q durch einen Polygonzug verbinden lassen, der den Jordanbogen J nicht trifft. Die Kreisscheiben $k_0, k_1, \ldots, k_{n_0}$ überdecken J und überdies, da J eine abgeschlossene Punktmenge ist, alle Punkte, deren Entfernung von J nicht größer als eine positive Zahl η ist. Wir teilen nun die Ebene netzartig in gleich große Quadrate der Seitenlänge $\frac{\eta}{2}$, so daß P bzw. Q in einem Quadrat q_1 liegt. q_1 hat mit J keinen Punkt gemeinsam. Wir betrachten nun nur solche Quadratfolgen $q_1, q_2, \ldots, q_{m_0}$, deren Quadrate mit J punktfremd sind. Wir behaupten, daß es solche Folgen mit *beliebig vielen* Quadraten gibt. Denn sonst sei $q_1, q_2, \ldots, q_M$ eine solche Folge mit der maximalen Zahl M von Quadraten. Nun liegt an jeder äußeren Seite dieser Folge ein Quadrat der Aufteilung, in dem Punkte von J liegen, da M, wie angenommen, Maximalzahl ist. Mithin würde jede äußere Seite der Folge von den Kreisscheiben überdeckt. Also wäre

nach II b die Charakteristik eines jeden geschlossenen Polygons, das aus äußeren Seiten der Folge gebildet ist, bezüglich P und Q Null, im Widerspruch zu I. Es gibt also Quadratfolgen $q_1, \ldots, q_{m_0}$, wobei P bzw. Q in q_1 liegt, mit einer beliebig großen Zahl m_0 von Quadraten, die mit J punktfremd sind. Nun sei 0 ein großer, fester Kreis, in dem der ganze Jordanbogen J liege. Es gibt dann eine Folge $q_1, \ldots, q_{m_0}$, bei der q_{m_0} im Äußeren von 0 liegt, wenn wir m_0 genügend groß wählen. q_{m_0} ist mit einem der $q_1, \ldots, q_{m_0-1}$, etwa mit q_m benachbart. Ebenso ist q_m mit einem der $q_1, \ldots, q_{m-1}$, etwa mit q_n benachbart. Schließlich kommen wir zu einem q_r, das an q_1 liegt. Wir können also von P dgl. von Q auf einem Polygonzug innerhalb der $q_1, q_r, \ldots, q_n, q_m, q_{m_0}$ aus dem Kreis 0 herauskommen, ohne J zu treffen. Da J in 0 liegt, können wir also P und Q durch einen Polygonzug verbinden, der J nicht trifft, w. z. b. w.

(Eingegangen am 20. Februar 1936.)

On differentiation of functions of two variables.

By

A. S. Besicovitch in Cambridge.

The point x_0 will be called a *Denjoy point* of the continuous function $f(x)$ if one of the following conditions is satisfied:

(i) $f(x)$ is differentiable at the point x_0,

(ii) the rays from the point x_0 of the curve $y = f(x)$ to infinitely near points of the curve fill up half a plane

(iii) the rays of (ii) fill up the whole plane.

The point (x_0, y_0) will by called a *Denjoy point* of the continuous function $f(x, y)$ if it is a Denjoy point of $f(x, y)$ on every line through (x_0, y_0).

For a function of a single variable almost all points are Denjoy points and the question arises whether there is analogy in the case of two variables in that *almost all points of the plane are Denjoy points.* In this note an example to the contrary is given.

Take a square S and lattices of points in S $A_1, A_2, \ldots$. Let B_1 be the set of circles with centres at the points of A_1 and of radius r_1, r_1 being sufficiently small so that the circles do not meet one another. Let B_2 be the set of all the circles, with centres at points of A_2 and of radius r_2, which are outside the circles of B_1. Similarly are defined the sets of circles $B_3, B_4, \ldots$.

Take a convergent series of positive terms Σa_n.

Let E_n be the set of points of S through each of which a straight line can meet B_n in more than one circle.

It is clear that we can always choose $r_1, r_2, \ldots$ small enough to satisfy the inequalities

$$m E_n < a_n$$

for all n.

Denote by C_i, D_i the sets of the circles concentric with the circles of B_i and of radii resp. $\frac{1}{2} r_i$ and $2 r_i$.

Let $2\alpha_1$ be the minimum angle, with the vertex at a point of S, circumscribing a circle of C_1. We assume that the lattice A_2 is so dense and r_2 so small that any sector of an angle α_1 and of radius r_1, with the vertex outside D_1 contains entirely at least one circle of D_2. The

lattices $A_3, A_4, \ldots$ and the radii $r_3, r_4, \ldots$ satisfy similar conditions and numbers $2\alpha_2, 2\alpha_3, \ldots$ are defined. Assume also that

$$\sum_{n=1}^{\infty} m D_n < m S.$$

Writing

$$G_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} E_\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu,$$

we have

$$m G_n \to m \sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu < m S.$$

Take an arbitrary point P not belonging to G_n. Any line through P meets D_ν, $\nu \geqq n$, at not more than one circle. Take an angle γ at the vertex P, and define n_0 so that $2\alpha_{n_0} \leqq \gamma$. The angle γ contains at least two non-overlapping sectors $\gamma_{n_0} < \alpha_{n_0}$, vertex P and radius $\leqq r_{n_0}$, each circumscribing a circle of C_{n_0+1}. By the definition of α_{n_0} any sector of vertex P and angle α_{n_0} contains at least one of circles of D_{n_0+1}. Thus γ has two non adjacent sectors vertex P and of radius $\leqq r_{n_0}$ each circumscribing a circle of C_{n_0+1}. But $2\alpha_{n_0+1}$ is the least angle circumscribing a circle of C_{n_0+1}, so that $\gamma_{n_0} \geqq 2\alpha_{n_0+1}$. Then again any sector γ_{n_0} contains two non-overlapping sectors $\gamma_{n_0+1} < \alpha_{n_0+1}$, vertex P and radius $\leqq r_{n_0+1}$, each circumscribing a circle of C_{n_0+2}, and so on. Any infinite sequence of sectors $\gamma_{n_0} \supset \gamma_{n_0+1} \supset \ldots$ defines a ray L of the direction common to all the sectors, so that the angle γ contains a set of vectors L of power of continuum. Every ray L meets a circle of each of the sets $C_{n_0+1}, C_{n_0+2}, \ldots$ at distances $\leqq r_{n_0}, r_{n_0+1}, \ldots$ and the ray opposite to a ray L does not meet any circle of these sets, as P is outside $E_{n_0+1}, E_{n_0+2}, \ldots$. Take now a sequence of positive numbers h_n such that $h_n \to 0$, and $\frac{h_n}{r_{n-1}} \to \infty$, and define a continuous function $f(x, y)$ in S putting $f(x, y) = 0$ at all points of the set $S - \sum_{n=1}^{\infty} B_n$ and at any circle of any B_n $f(x, y)$ is defined by the value of the coordinate of points of right cylinders of height $2h_n$ and base the circle. Then at all points of C_n $f(x, y) \geqq h_n$. Consider now values of $f(x, y)$ on a ray L from a point $P(x_0, y_0) \subset G_n$ and on the opposite ray. The opposite ray can meet only circles of the sets $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ and consequently in the neighbourhood of P does not meet any of the circles and thus $f(x, y) = 0$ in the neighbourhood of P. Now at any common point of L and C_ν $f(x, y) > h_\nu$ and we know that for sufficiently large values of ν there are such points at the distance less than $r_{\nu-1}$. Thus at any such point $P'(x', y')$ we have $\frac{f(x', y') - f(x, y)}{PP'} > \frac{h_n}{r_{n-1}}$

which shows that the upper derivative of $f(x, y)$ at P from the side of L is $+\infty$, while the derivative from the opposite side exists and is 0. This shows that the point P is not a Denjoy point of $f(x, y)$. But $P(x_0, y_0)$ was taken only under the condition not to belong to G_n for some n. Thus any point of the set $S - \prod_{n=1}^{\infty} G_n$ can be taken for P and consequently all the points of $S - \prod_{n=1}^{\infty} G_n$ are not Denjoy points. But

$$m \prod_{n=1}^{\infty} G_n = m \sum_{n=1}^{\infty} D_n$$

and thus

$$m\left(S - \prod_{n=1}^{\infty} G_n\right) > 0.$$

Observe that from the definition of rays L through every point P of $S - \prod_{n=1}^{\infty} G_n$ pass in any angle a set of lines of power of continuum on each of which the point P is not a Denjoy point.

(Eingegangen am 27. Februar 1936.)

Über eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion.

Von

Harald Cramér in Stockholm.

Zweck dieser Arbeit ist, einen lange vermuteten[1]) Satz über die normale Verteilungsfunktion[2]) zu beweisen und auf den n-dimensionalen Raum zu verallgemeinern. In Abschnitt I werden wir den Satz zuerst in rein analytischer Fassung aussprechen und dann wahrscheinlichkeitstheoretisch deuten. Der Beweis des Satzes erfolgt in Abschnitt II; Abschnitt III bringt die n-dimensionale Verallgemeinerung, die hier zum ersten Male ausgesprochen und bewiesen wird.

I.

Jede nirgends abnehmende Funktion der reellen Veränderlichen x, die für $x \to -\infty$ dem Grenzwert 0, für $x \to +\infty$ dem Grenzwert 1 zustrebt, wird bekanntlich als eine *Verteilungsfunktion* bezeichnet[3]). Die „Faltung" $F(x)$ von zwei Verteilungsfunktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-t)\, dF_2(t)$$

ist bekanntlich wieder eine Verteilungsfunktion.

Normale Verteilungsfunktion nennen wir jede Funktion von der Form $\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$, wo

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt,$$

---

[1]) Vgl. P. Lévy [7], S. 366; [8], S. 381—388. (Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das angefügte Literaturverzeichnis.) Nach Angabe von Herrn Lévy (a. a. O.) hat er den Satz schon seit 1931 vermutet.

[2]) Es scheint noch kaum hinreichend bekannt zu sein, daß die Normalverteilung schon von De Moivre (Miscellanea Analytica, 2. Suppl., 1733, sowie Doctrine of Chances, 3. Aufl., 1756, S. 243—254) bei seiner Behandlung des klassischen Bernoullischen Problems gefunden wurde. Die übliche Benennung nach Gauss oder Laplace ist also nicht historisch begründet.

[3]) Eine besondere Verabredung über die Werte der Funktion in etwaigen Unstetigkeitspunkten ist für unsern Zweck nicht nötig.

und $\sigma \geqq 0$ und m zwei reelle Konstanten sind. Der Fall $\sigma = 0$ entspricht der *ausgearteten* Normalfunktion $E(x-m)$, wo

$$E(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{„ } x > 0, \end{cases}$$

und $E(0)$ irgendein Wert im Intervalle $0 \leqq E(0) \leqq 1$ zugeteilt werden kann.

Es handelt sich hier zunächst um den folgenden Satz:

Satz 1. *Wenn die Faltung von zwei Verteilungsfunktionen normal ist, so sind auch beide Komponenten normal. — Genauer: Die Integralgleichung*

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-t)\, dF_2(t) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right),$$

wo $F_1(x)$ und $F_2(x)$ unbekannte Verteilungsfunktionen sind, hat nur die Lösungen

$$F_1(x) = \Phi\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right), \qquad F_2(x) = \Phi\left(\frac{x-m_2}{\sigma_2}\right),$$

wo die Konstanten den Bedingungen

$$m = m_1 + m_2, \qquad \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

genügen.

Wenn σ, σ_1 oder σ_2 gleich Null ist, so hat die entsprechende Verteilungsfunktion nur eine einzige Wachstumsstelle (nämlich $x = m$, m_1 bzw. m_2), und der Satz ist dann trivial. Wir können also diesen Fall von der Betrachtung ausschließen und werden demnach im folgenden erstens $\sigma > 0$ voraussetzen, zweitens nur solche Lösungen der Integralgleichung (1) berücksichtigen, welche *Verteilungsfunktionen mit wenigstens zwei Wachstumsstellen* sind. In der Sprache der Wahrscheinlichkeitsrechnung besagt unser Satz nach dieser Einschränkung:

Wenn die Summe von zwei unabhängigen nicht-konstanten stochastischen Variablen normal verteilt ist, so ist auch jede Komponente für sich normal verteilt[4]).

Dieser Satz, der sich natürlich unmittelbar auf eine beliebige Gliederzahl erweitern läßt, wurde von Herrn P. Lévy[1]) vermutet. Wie Herr Lévy zeigt, ergeben sich aus dem Satze interessante Folgerungen in bezug auf die Gültigkeitsbedingungen des sogenannten zentralen Grenzwertsatzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Man erhält z. B. leicht den

[4]) In einer vorläufigen Mitteilung (Cramér [2]) wurde der Beweis dieses Satzes kurz angedeutet.

folgenden Satz[5]): *Es seien* $x_1, x_2, \ldots$ *unabhängige stochastische Variablen und* $a_1, a_2, \ldots$ *eine beschränkte Folge positiver Zahlen. Damit die Verteilungsfunktion von*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{a_n}$$

für $n \to \infty$ *gegen* $\Phi(x)$ *konvergiert, ist notwendig und hinreichend, daß* 1) $\lim a_n = a > 0$ *existiert, und* 2) *jedes* x_i *normal verteilt ist, wobei die Summe der ersten Momente gegen Null, die Summe der Streuungen gegen* a^2 *konvergiert.*

II.

Man sieht unmittelbar ein, daß wir uns auf den Speziallfall $m = 0$, $\sigma = 1$ von Satz 1 beschränken können, wo die Integralgleichung (1) die Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-t)\,dF_2(t) = \Phi(x) \tag{1a}$$

annimmt. Wenn nämlich (1) eine Lösung hat, die nicht von der Normalform ist, so zeigt eine einfache Variabeltransformation, daß dies auch von (1a) gilt. Wir werden also versuchen, alle Verteilungsfunktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ mit wenigstens je zwei Wachstumsstellen anzugeben, welche (1a) genügen.

Wir zeigen zuerst, daß die Momente zweiter Ordnung

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,dF_1(x) \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,dF_2(x)$$

endlich sein müssen. Dies ergibt sich aus der für beliebige positive a und b geltenden Ungleichung

$$(F_1(a) - F_1(-a)) \int_{-b}^{b} y^2\,dF_2(y) = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} y^2\,dF_1(x)\,dF_2(y)$$

$$\leqq \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} 2((x+y)^2+x^2)\,dF_1(x)\,dF_2(y) \leqq 2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x+y)^2\,dF_1(x)\,dF_2(y) + 2a^2.$$

Aus (1a) folgt aber

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x+y)^2\,dF_1(x)\,dF_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,d\Phi(x) = 1,$$

---

[5]) Vgl. hierzu W. Feller [3], S. 531.

und wir erhalten somit, wenn wir für a irgendeinen festen Wert wählen, für den $F_1(a) - F_1(-a) > 0$ wird,

$$\int_{-b}^{b} y^2 dF_2(y) \leqq \frac{2(1+a^2)}{F_1(a) - F_1(-a)}$$

für beliebige $b > 0$. Das zweite Moment von F_2 ist also endlich, und das gleiche Resultat für F_1 ergibt sich natürlich in entsprechender Weise. A fortiori sind auch die beiden Momente erster Ordnung endlich, und es folgt unmittelbar aus (1a), daß ihre Summe gleich dem ersten Moment von $\Phi(x)$, d. h. gleich Null ist. Da nun mit $F_1(x)$, $F_2(x)$ auch zugleich das Funktionenpaar $F_1(x-k)$, $F_2(x+k)$ für beliebige k der Gleichung (1a) genügt, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß beide Momente erster Ordnung gleich Null sind. Wenn dann die Momente zweiter Ordnung mit σ_1^2 bzw. σ_2^2 bezeichnet werden, so folgt aus (1a) $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 1$.

Wir behaupten nun weiter, daß die beiden Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{x^2}{2}} dF_1(x) \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{x^2}{2}} dF_2(x) \tag{2}$$

konvergent sind. Hieraus folgt unter anderem die Endlichkeit der Momente beliebig hoher Ordnung.

Aus dem (vorausgesetzten) Verschwinden des ersten Momentes von $F_2(x)$ folgt, daß es ein $\lambda > 0$ gibt, so daß

$$F_2(-\lambda) > 0$$

ist. Für jedes $x < 0$ gilt dann nach (1a)

$$\begin{aligned} \Phi(x-\lambda) &\geqq \int_{-\infty}^{-\lambda} F_1(x-\lambda-t)\, dF_2(t) \\ &\geqq F_1(x) \cdot F_2(-\lambda), \end{aligned}$$

und somit

$$F_1(x) \leqq \frac{\Phi(x-\lambda)}{F_2(-\lambda)} < A e^{-\frac{x^2}{2} + \lambda x}, \tag{3}$$

wo A von x unabhängig ist. In entsprechender Weise erhalten wir für $x > 0$

$$1 - F_1(x) < B e^{-\frac{x^2}{2} - \mu x}, \tag{4}$$

wo B und μ positive von x unabhängige Zahlen sind. Aus (3) und (4), sowie aus den entsprechenden Ungleichungen für $F_2(x)$, folgt die Konvergenz der Integrale (2).

Wir führen jetzt die *charakteristischen Funktionen*

$$(5) \qquad f_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF_1(x), \qquad f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF_2(x)$$

ein. Aus der Konvergenz der Integrale (2) folgt offenbar, daß $f_1(t)$ und $f_2(t)$ ganze Funktionen der komplexen Veränderlichen t sind. Aus (1 a) folgt aber bekanntlich

$$(6) \qquad f_1(t) \cdot f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\Phi(x) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Wir schließen hieraus, daß $f_1(t)$ und $f_2(t)$ *ganze Funktionen ohne Nullstellen* sind, also von der Form $e^{g_1(t)}$ bzw. $e^{g_2(t)}$ mit ganzen $g_1(t)$ und $g_2(t)$.

Aus der Ungleichung $2|tx| \leqq |t^2| + |x^2|$ folgt weiter

$$|f_1(t)| < e^{\frac{|t|^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{x^2}{2}}\, dF_1(x).$$

Das Integral auf der rechten Seite ist konvergent und von t unabhängig; die Ordnung der ganzen Funktion $f_1(t) = e^{g_1(t)}$ ist also höchstens gleich 2. Nach der klassischen Hadamardschen Theorie muß dann $g_1(t)$ ein Polynom (höchstens) zweiten Grades sein. Entsprechendes gilt für $g_2(t)$.

Nach unseren Voraussetzungen über die Momente folgt aber aus (5) durch Entwicklung nach Potenzen von t

$$f_1(t) = e^{g_1(t)} = 1 - \frac{\sigma_1^2}{2} t^2 + \ldots,$$

$$f_2(t) = e^{g_2(t)} = 1 - \frac{\sigma_2^2}{2} t^2 + \ldots.$$

Hieraus folgt schließlich

$$f_1(t) = e^{-\frac{\sigma_1^2 t^2}{2}}, \qquad f_2(t) = e^{-\frac{\sigma_2^2 t^2}{2}},$$

was bekanntlich[6]) mit

$$F_1(x) = \Phi\left(\frac{x}{\sigma_1}\right), \qquad F_2(x) = \Phi\left(\frac{x}{\sigma_2}\right)$$

äquivalent ist. Die gesuchte allgemeinste Lösung von (1 a) ist also von der Form

$$F_1(x) = \Phi\left(\frac{x-k}{\sigma_1}\right), \qquad F_2(x) = \Phi\left(\frac{x+k}{\sigma_2}\right),$$

wo k beliebig und $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 1$ ist. Durch eine einfache Variabeltransformation folgt daraus die Behauptung des Satzes 1 über die allgemeinste Lösung von (1).

---

[6]) Vgl. z. B. Lévy [6], Kap. 2.

III.

Es sei R_n ein n-dimensionaler Euklidischer Raum mit dem variablen Punkt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Für die Verallgemeinerung der obigen Betrachtungen auf diesen Raum ist es zweckmäßig, die Verteilungsfunktionen als *Mengenfunktionen* zu behandeln[7]). Als *Verteilungsfunktion in* R_n bezeichnen wir dann jede nicht-negative, absolut additive Mengenfunktion $F(M)$, die für alle Borelschen Mengen M von R_n definiert ist und für $M = R_n$ den Wert 1 annimmt. Wählt man speziell für M die Menge $M(x_r \leqq z_r,\ r = 1, 2, \ldots, n)$, so erhält man bei variablen $z_1, \ldots, z_n$ eine Punktfunktion in R_n, welche die n-dimensionale Verallgemeinerung der oben betrachteten eindimensionalen Verteilungsfunktionen darstellt. Mengenfunktionen und Punktfunktionen der angegebenen Art entsprechen einander eineindeutig.

Die *charakteristische Funktion* einer Verteilung $F(M)$ ist eine Funktion $f(t_1, \ldots, t_n)$ der n Variablen $t_1, \ldots, t_n$, definiert durch das über den ganzen Raum R_n erstreckte Lebesgue-Radonsche Integral

$$f(t_1, \ldots, t_n) = \int_{R_n} e^{i(t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n)}\, dF. \tag{7}$$

Die Variablen t_r können wir hier immer reell voraussetzen. Die Verteilung $F(M)$ wird durch ihre charakteristische Funktion eindeutig bestimmt.

Die *Faltung* zweier Verteilungen F_1 und F_2 ist eine neue Verteilung F, definiert durch das Integral

$$F(M) = \int_{R_n} F_1(M - x)\, dF_2,$$

wo $M - x$ die aus M durch die Translation $-x$ entstandene Menge bezeichnet. Zwischen den entsprechenden charakteristischen Funktionen besteht wie im eindimensionalen Fall die Beziehung

$$f = f_1 \cdot f_2. \tag{8}$$

Eine normale Verteilungsfunktion in R_n wird gewöhnlich in direkter Verallgemeinerung des eindimensionalen Falles als Integral über eine Frequenzfunktion definiert, wobei im Exponenten eine positiv-definite quadratische Form der Koordinaten auftritt. Für die Verallgemeinerung von Satz 1 brauchen wir aber hier einen etwas umfassenderen Begriff, der gewisse ausgeartete Fälle mit einschließt, welche Grenzfälle von eigentlichen Normalverteilungen sind. Wir definieren daher:

---

[7]) Für die im folgenden benutzten Sätze über Mengenfunktionen vergleiche man z. B. Bochner [1], Haviland [4], Jessen-Wintner [5].

$F(M)$ ist eine *normale Verteilungsfunktion in* R_n, wenn die entsprechende charakteristische Funktion von der Form

$$f(t_1, \ldots, t_n) = e^{iL - \frac{1}{2}Q} \tag{9}$$

ist, wo L eine reelle Linearform und

$$Q = \sum_{r,s} a_{rs} t_r t_s \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n;\ a_{rs} = a_{sr})$$

eine nicht-negative quadratische Form in den Variablen t_r bezeichnet. Wenn Q eine positiv-definite Form ist, heißt $F(M)$ *eigentlich normale Verteilungsfunktion in* R_n; wenn aber Q nur semi-definit ist, nennen wir $F(M)$ eine *ausgeartete normale Verteilungsfunktion in* R_n.

Durch eine geeignete Translation des Koordinatensystems (wobei der Anfangspunkt in den „Schwerpunkt" der Verteilung kommt) kann man immer die Linearform L zum Verschwinden bringen, ohne die quadratische Form Q zu verändern. Die charakteristische Funktion erscheint also nach Ausführung der Translation in der Form

$$f(t_1, \ldots, t_n) = e^{-\frac{1}{2}Q}. \tag{9a}$$

Jede eigentlich normale Verteilung $F(M)$ läßt sich nach Ausführung der genannten Translation durch das über die Borelsche Menge M erstreckte Lebesguesche Integral

$$F(M) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{A}} \int \ldots \int_M e^{-\frac{1}{2}P}\, dx_1 \ldots dx_n$$

darstellen, wo $A = |a_{rs}| > 0$ und

$$P = \sum_{r,s} \frac{A_{rs}}{A} x_r x_s$$

die zu Q reziproke Form ist. Die Funktion

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{A}}\, e^{-\frac{1}{2}P}$$

heißt dann die *n-dimensionale Frequenzfunktion* von $F(M)$.

Für eine ausgeartete Normalverteilung ist aber $A = 0$, und der obige Ausdruck der Frequenzfunktion wird daher sinnlos. Die entsprechende Verteilungsfunktion läßt sich überhaupt nicht als das Integral einer n-dimensionalen Frequenzfunktion darstellen. Sie verschwindet für jede Menge M, die außerhalb der durch die Gleichung $\sum_{r,s} A_{rs} x_r x_s = 0$ (also durch eine oder mehrere lineare Gleichungen zwischen den x_r) definierten Menge M^* liegt, und könnte in M^* als das Integral einer Frequenz-

funktion mit weniger als n Variablen dargestellt werden[8]). Jede ausgeartete Normalverteilung läßt sich, wie man leicht sieht, als Grenzfunktion eigentlicher Normalverteilungen darstellen.

Aus der Form der charakteristischen Funktion einer Normalverteilung folgt, daß die Faltung zweier Normalverteilungen F_1 und F_2 wieder eine Normalverteilung F ergibt. Da die entsprechenden quadratischen Formen Q sich hierbei nach (8) additiv zusammensetzen, muß F notwendig eigentlich normal werden, so bald wenigstens eine der Komponenten eigentlich ist. Die Faltung zweier ausgearteten Normalverteilungen kann aber auch eigentlich normal sein, da ja die Summe von zwei semi-definiten Formen sehr wohl definit sein kann.

Nach diesen Vorbereitungen können wir jetzt Satz 1 in der folgenden Weise verallgemeinern:

Satz 2. *Wenn die Faltung $F(M)$ von zwei Verteilungsfunktionen eine normale Verteilungsfunktion in R_n ist, so haben auch die Komponenten $F_1(M)$ und $F_2(M)$ dieselbe Eigenschaft.*

Dieser Satz kann natürlich genau wie Satz 1 wahrscheinlichkeitstheoretisch gedeutet werden, etwa in der folgenden Weise: *Wenn die Summe von zwei unabhängigen stochastischen Vektoren in R_n normal verteilt ist, so ist auch jede Komponente für sich normal verteilt.*

Wir beweisen diesen Satz durch Zurückführung auf den eindimensionalen Fall[9]). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß für die Verteilung F die obengenannte Translation schon ausgeführt ist, so daß die charakteristische Funktion $f(t_1, \ldots, t_n)$ durch (9a) gegeben ist.

Es seien nun den Veränderlichen $t_1, \ldots, t_n$ feste reelle Werte erteilt, die nicht sämtlich verschwinden. M_z bezeichne für jedes reelle z die durch

$$t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n \leqq z \tag{10}$$

definierte Menge in R_n. Dann sind $F(M_z)$, $F_1(M_z)$ und $F_2(M_z)$ nirgends abnehmende Funktionen der reellen Veränderlichen z, die für $z \to -\infty$

---

[8]) Ein einfaches Beispiel einer ausgearteten Normalverteilung in R_2 erhalten wir in der folgenden Weise: Es sei z eine normal verteilte stochastische Variable. Der Vektor $(x = z, y = kz)$ hat dann für jedes konstante k eine Verteilung von jener Art. Der Punkt (x, y) liegt notwendig auf der Geraden $y = kx$, und die Verteilung kann durch eine auf dieser Geraden definierte eindimensionale normale Frequenzfunktion bestimmt werden.

[9]) Die hier benutzte Methode der Zurückführung wurde von H. Wold und dem Verfasser mit Hinblick auf verschiedene andere Fragen in der Theorie der n-dimensionalen Verteilungsfunktionen ausgearbeitet. Einige Beispiele derartiger Anwendungen sollen demnächst veröffentlicht werden.

dem Grenzwert 0, für $z \to +\infty$ dem Grenzwert 1 zustreben. Alle drei Funktionen sind also Verteilungsfunktionen im Sinne von Abschnitt I. Die entsprechenden charakteristischen Funktionen sind nach (7) und (10)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itz}\, d_z F(M_z) = \int_{R_n} e^{it\sum t_r x_r}\, dF = f(tt_1, \ldots, tt_n).$$

und entsprechend für F_1 und F_2. Aus (8) und (9a) folgt aber

$$f(tt_1, \ldots, tt_n) = e^{-\frac{t^2}{2} Q(t_1, \ldots, t_n)},$$

$$f(tt_1, \ldots, tt_n) = f_1(tt_1, \ldots, tt_n) \cdot f_2(tt_1, \ldots, tt_n).$$

Die eindimensionale Verteilungsfunktion $F(M_z)$ ist nach der ersten Gleichung normal, nach der zweiten Gleichung die Faltung von $F_1(M_z)$ und $F_2(M_z)$. Nach Satz 1 sind also auch $F_1(M_z)$ und $F_2(M_z)$ als Funktionen von z normale Verteilungsfunktionen. Man hat demnach

$$f_1(tt_1, \ldots, tt_n) = e^{Rit - S\frac{t^2}{2}}, \tag{11}$$

wo R und S Funktionen der t_r sind. Die Momente erster und zweiter Ordnung der Funktion $F_1(M_z)$ sind somit

$$\int_{-\infty}^{\infty} z\, d_z F_1(M_z) = R,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2\, d_z F_1(M_z) = R^2 + S.$$

Aus der Definition (10) der Menge M_z folgt aber

$$\int_{-\infty}^{\infty} z\, d_z F_1(M_z) = \int_{R_n} (t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n)\, dF_1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2\, d_z F_1(M_z) = \int_{R_n} (t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n)^2\, dF_1,$$

wo die Konvergenz der rechten Seiten aus der (bereits feststehenden) Konvergenz der linken Seiten folgt. Durch Vergleich ergibt sich nun, daß R eine lineare und S eine quadratische Form in den t_r ist. Da (11) eine charakteristische Funktion in t ist, muß die quadratische Form S nicht-negativ sein. Setzt man dann in (11) $t = 1$, so folgt, daß $f_1(t_1, \ldots, t_n)$ von der Form (9) ist. Nach unserer Definition ist daher die entsprechende Verteilungsfunktion $F_1(M)$ eine normale Verteilungsfunktion in R_n. Entsprechendes gilt natürlich für $F_2(M)$.

Literaturverzeichnis.

[1] S. Bochner:
Monotone Funktionen, Stieltjessche Integrale und harmonische Analyse. Math. Annalen 108 (1933), S. 378—410.

[2] H. Cramér:
Sur une propriété de la loi de Gauss. C. R. Acad. Sci., Paris, 202 (1936), S. 615—616.

[3] W. Feller:
Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Zeitschr. 40 (1935), S. 521—559.

[4] E. K. Haviland:
On the theory of absolutely additive distribution functions. Amer. Journ. Math. 56 (1934), S. 625—658.

[5] B. Jessen and A. Wintner:
Distribution functions and the Riemann zeta function. Trans. Amer. Math. Soc. 38 (1935), S. 48—88.

[6] P. Lévy:
Calcul des probabilités. Paris 1925.

[7] Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes. Annali Scuola norm. sup. Pisa (II) 3 (1934), S. 337—366.

[8] Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires indépendantes ou enchainées. Journ. Math. pures appl. (VII) 14 (1935), S. 347—402.

(Eingegangen am 28. Februar 1936.)

Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen I.

Beweis des Riemann-Rochschen Satzes für algebraische Funktionen mit beliebigem Konstantenkörper.

Von

Friedrich Karl Schmidt in Jena.

Einleitung.

Im Nachstehenden betrachte ich einen algebraischen Funktionenkörper $K = k(x, y_1, \ldots, y_r)$, der aus einem beliebigen Körper k durch Adjunktion einer Unbestimmten x und darauffolgende endliche algebraische Erweiterung entsteht. Für einen solchen Körper K beweise ich einen Satz, der dem Riemann-Rochschen Satz aus der klassischen Theorie der algebraischen Funktionen entspricht, und in dem Fall, daß k mit dem Körper aller komplexen Zahlen übereinstimmt, auch in jenen klassischen Satz übergeht.

Bekannt ist in dieser Richtung bisher folgendes.

Dedekind und Weber[1]) haben als erste den klassischen Fall, $k =$ Körper aller komplexen Zahlen, auf rein arithmetischer Grundlage behandelt. Ihre Untersuchungen sind später von Hensel und Landsberg[2]) in verschiedener Hinsicht vereinfacht worden; aber die Grundgedanken sind im wesentlichen dieselben geblieben. Sie bestehen darin, die Punkte der Riemannschen Fläche, die zu dem betrachteten Körper gehört, ohne geometrische Vorstellungen durch das Verhalten der Funktionen in einem Punkt arithmetisch zu erklären. Aus dieser arithmetischen Definition ergibt sich erstens die Verzweigungszahl w_x von $K\,k(x)$ als Summe aller lokalen Verzweigungen und zweitens das Geschlecht g von K, das sich aus Verzweigungszahl w_x und Körpergrad n_x gemäß der Riemannschen Formel

$$g = \frac{w_x}{2} - n_x + 1$$

[1]) R. Dedekind und H. Weber, Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen. J. r. a. Math. 92 (1882), S. 181—290. — H. Weber, Lehrbuch der Algebra, Bd. III, 2. Aufl., Braunschweig 1908, S. 623—702.

[2]) K. Hensel und G. Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale, Leipzig 1902.

zusammensetzt. Die Invarianz des Geschlechts folgt dann aus der Differentiation, die nur formale Bedeutung hat, und schließlich werden alle bisher genannten Begriffe verknüpft durch den Riemann-Rochschen Satz, bei dessen Beweis noch der zu einem gegebenen Modul von Funktionen komplementäre Modul eine entscheidende Rolle spielt.

Obwohl alle diese Überlegungen zunächst nur auf den klassischen Fall abzielen, bemerken schon Dedekind und Weber in der Einleitung ihrer Arbeit, daß die Beweise richtig bleiben, wenn man für k an Stelle des Körpers aller komplexen Zahlen den aller algebraischen Zahlen setzt. Damit war der in neuerer Zeit entstehenden arithmetischen Theorie von vornherein die Richtung gewiesen: Sie hat für k schrittweise immer allgemeinere Körper zugelassen und dementsprechend die Methoden von Dedekind-Weber und Hensel-Landsberg zu verfeinern gesucht.

Die bisherigen Etappen dieser Entwicklung sind rasch aufgezählt. Bei der Weiterführung einer zahlentheoretisch orientierten Arbeit von Artin[3]) habe ich den Riemann-Rochschen Satz für alle algebraischen Funktionenkörper K bewiesen, bei denen k ein Galoisfeld bedeutet[4]). Aus meinen Schlüssen geht aber unmittelbar hervor, daß sie auch im Falle eines beliebigen vollkommenen Körpers k gelten, und das ist neuerdings von Hasse[5]) und Witt[6]) ausdrücklich hervorgehoben worden. Darüber hinaus hat Witt den Beweis bei vollkommenem k sogar auf den Fall ausgedehnt, daß K nicht mehr einen Körper, sondern bloß ein einfaches hyperkomplexes System über $k(x)$ darstellt.

Für die Anwendungen reichte der Riemann-Rochsche Satz in der so gewonnenen Allgemeinheit bis jetzt völlig aus. Erst durch die letzten Arbeiten von Hasse[7]) ist hierin eine gewisse Änderung eingetreten, und es scheint nunmehr wünschenswert, den Riemann-Rochschen Satz sogleich für einen algebraischen Funktionenkörper mit beliebigem Körper k zu besitzen. Die vorliegende Arbeit erfüllt diese Forderung. Zugleich bietet die Beweisanordnung, die sie enthält, aber auch in den bisher schon behandelten Fällen Vorteile. Gerade die Schwierigkeiten, die bei Zulassung

---

[3]) E. Artin, Quadratische Körper im Gebiet der höheren Kongruenzen I und II, Math. Zeitschr. 19 (1924), S. 153—246.

[4]) F. K. Schmidt, Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p, Math. Zeitschr. 33 (1931), S. 1—32.

[5]) H. Hasse, Über die Kongruenzzetafunktionen, Sitz.-Ber. Preuß. Akad. d. Wiss., Phys.-Math. Kl. 1934. XVII.

[6]) E. Witt, Riemann-Rochscher Satz und Z-Funktion in Hyperkomplexen, Math. Annalen 110 (1935), S. 12—28.

[7]) H. Hasse, Abstrakte Begründung der komplexen Multiplikation und Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern. Abh. Math. Sem. d. Hamb. Univ. 10 (1934), S. 325—348.

eines unvollkommenen k entstehen, zwingen nämlich dazu, alle überflüssigen Zwischenresultate beiseite zu lassen und ohne Umweg direkt auf den Riemann-Rochschen Satz loszusteuern. Inwieweit man dabei von dem ursprünglichen Dedekindschen Gedankengang abweichen muß, werde ich in § 1 auseinandersetzen. Hier möchte ich nur noch hervorheben, daß sich durch meine Überlegungen auch die Wittschen hyperkomplexen Ergebnisse auf den Fall eines unvollkommenen k verallgemeinern lassen. Lediglich der leichteren Lesbarkeit wegen habe ich mich bei der Darstellung auf einen algebraischen Körper $K/k(x)$ (an Stelle einer einfachen Algebra $K/k(x)$) beschränkt. — Da ich alle benötigten Hilfsmittel ausdrücklich anführe, ist die vorliegende Arbeit auch ohne Kenntnis der bisherigen Literatur verständlich. In § 3 benutze ich übrigens diese Gelegenheit, um aus bekannten Ergebnissen eine bewertungstheoretische Einführung der Divisoren zusammenzusetzen, die bei beliebigem k mit gewöhnlichen Potenzreihen auskommt, also die Henselschen p-adischen Entwicklungen vermeidet[8]).

§ 1.

Gedankengang und Ergebnis des Beweises.

1. Allgemeines. Wie üblich bezeichne ich den größten in

$$K = k(x, y_1, y_2, \ldots, y_r)$$

enthaltenen, über k algebraischen Oberkörper als den Konstantenkörper von K. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf ich offenbar annehmen, daß k schon selbst Konstantenkörper ist, indem ich eben k nötigenfalls durch einen Oberkörper ersetze, aus dem der Gesamtkörper K selbstverständlich wiederum durch Adjunktion von $x, y_1, \ldots, y_r$ entsteht. Das algebraische Verhalten von K/k wird dann bekanntlich durch folgende Tatsache charakterisiert. *Ist ξ eine beliebige, nichtkonstante Funktion aus K (d. h. ein nicht zu k gehöriges Element aus K), so ist ξ transzendent über k und $K/k(\xi)$ endlich algebraisch.*

Während man aber bei vollkommenen Konstantenkörper aus K stets ein ξ so auswählen kann, daß $K/k(\xi)$ separabel algebraisch ist, gilt dies

[8]) Diese Einführung ist verschieden von dem von Hasse ausgesprochenen Gedanken, die lokale Theorie der algebraischen Funktionen mit vollkommenem Konstantenkörper k durch Benutzung des lokalen Konstantenkörpers k_p auf die Untersuchung gewöhnlicher Potenzreihen hinauszuspielen (H. Hasse, Theorie der Differentiale in algebraischen Funktionenkörpern mit vollkommenem Konstantenkörper, J. r. a. Math. 172 (1935), S. 55—64. Siehe insbesondere den Zusatz bei der Korrektur auf S. 64.) Der lokale Konstantenkörper Hasses kann erst mit Hilfe der Henselschen p-adischen Entwicklungen definiert werden und führt bei unvollkommenem k im allgemeinen keineswegs zu einer Darstellung dieser p-adischen Entwicklungen als gewöhnliche Potenzreihen.

bei unvollkommenen Konstantenkörper im allgemeinen nicht mehr. Gerade dieser Umstand verursacht wesentliche Schwierigkeiten, da die „separable Erzeugbarkeit" bei den bisherigen Untersuchungen als entscheidendes Hilfsmittel benutzt wird. Für den folgenden Beweis kann daher von den üblichen Methoden nur das übernommen werden, was sich auf das vorhin geschilderte, allgemeingültige Verhalten von K/k gründet; es ist das in erster Linie die Erklärung der Divisoren von K mit Hilfe der Bewertungen und der Begriff der Normalbasis. Dagegen zwingt die Unmöglichkeit der separablen Erzeugbarkeit in dreifacher Hinsicht zu Abweichungen: Bei der Definition des Geschlechts, bei der Konstruktion einer Modulbasis für die Ideale aus dem Integritätsbereich $\mathfrak{o}$ aller in ξ ganzen Funktionen und bei der Bildung des komplementären Moduls. Alle diese Abweichungen werden dadurch verursacht, daß die Diskriminante einer Basis von $K/k(\xi)$ im inseparablen Fall gleich 0 ist und mithin die üblichen Diskriminantenschlüsse versagen. Demgegenüber spielt das Fehlen eines primitiven Elements, d. h. die Unmöglichkeit, den Körper K in der Form $K = k(\xi, y)$ zu erzeugen, nur eine untergeordnete Rolle.

2. Definition des Geschlechts. Daß die üblichen arithmetischen Definitionen des Geschlechts bei unvollkommenem Konstantenkörper hinfällig werden, ist leicht einzusehen. Infolge des Verschwindens der Diskriminante gibt es nämlich im allgemeinen unendlich viele Primdivisoren von $k(\xi)$, die in K verzweigt sind. Die Verzweigungszahl von $K\,k(\xi)$ kann daher nicht mehr durch Summation über alle lokalen Verzweigungen gewonnen werden, und die Riemannsche Geschlechtsformel verliert zunächst jeden Sinn. Aber auch der Ausweg, das Geschlecht unmittelbar mit Hilfe des Differentiationsprozesses einzuführen, ist versperrt, da sich im allgemeinen innerhalb des Körpers K selbst eine Differentiation nicht sinnvoll erklären läßt.

Um diese Schwierigkeiten zu umgehen, definiere ich im folgenden das Geschlecht geradezu mit Hilfe des Riemann-Rochschen Satzes. Ich werde nämlich zeigen: *Zwischen Dimension und Grad einer beliebigen Divisorenklasse C von K besteht die Beziehung*

$$\text{Dim } C = \text{Grad } C + 1 - g, \tag{1}$$

vorausgesetzt, daß der Grad von C oberhalb einer Schranke S liegt. Dabei ist g eine ganze nichtnegative Zahl, die nicht von der betrachteten Klasse, sondern lediglich von der Natur des Körpers K abhängt, und diese Zahl g nenne ich eben das *Geschlecht* von K. Die Gleichung (1) zusammen mit der Angabe des genauen Wertes der Schranke S,

$$S = 2g - 2,$$

macht dann bereits den Riemannschen Teil des Riemann-Rochschen Satzes aus, dessen Wortlaut also im allgemeinen Fall genau mit demjenigen der bisher behandelten Spezialfälle übereinstimmt. Es ist daher auch klar, daß das durch (1) definierte Geschlecht bei Spezialisierung auf einen vollkommenen Konstantenkörper in den bisherigen Geschlechtsbegriff übergeht. Das soeben geschilderte Verfahren hat aber noch den Vorteil, daß die Invarianz des Geschlechts sich unmittelbar aus dem Beweis des Riemann-Rochschen Satzes mitergibt und nicht gesondert begründet zu werden braucht. Das ist vor allem deshalb bemerkenswert, weil der übliche Invarianzbeweis durch Differentiation bei unvollkommenem Konstantenkörper sogar im Falle separabler Erzeugbarkeit nicht ohne weiteres zum Ziele führt. Historisch gesehen knüpft die angegebene Geschlechtsdefinition offenbar an Weierstraßsche Gedanken an.

3. Stärkere Heranziehung der Normalbasen. Auch der übliche Beweis der Existenz einer Modulbasis für die Ideale aus dem Integritätsbereich $\mathfrak{o}$ aller in ξ ganzen Funktionen benutzt das Nichtverschwinden der Diskriminanten. Doch verursacht das keine ernste Schwierigkeit. Die Berufung auf die Diskriminante kann nämlich im allgemeinen Fall leicht durch Benutzung des Begriffs der Normalbasis vermieden werden, indem man sich nur im Anschluß an Dedekind überlegt, daß jedes Ideal eine Normalbasis enthält, die zugleich Modulbasis für das betreffende Ideal ist. Durch Nebeneinanderstellen zweier Normalbasen läßt sich dann darüber hinaus auch ein Zwischenresultat umgehen, daß die Exponentensumme einer Normalbasis mit dem Grad der Diskriminante verbindet und das bei verschwindender Diskriminante selbstverständlich sinnlos wird. Die stärkere Heranziehung der Normalbasis hat dabei gleichzeitig den Vorteil, überflüssige Rechnungen zu vermeiden. Historisch gesehen bedeutet sie eine Ausgestaltung der Überlegungen, die bereits in meinem früheren Beweis des Riemann-Rochschen Satzes vorkommen.

4. Fastkomplementäre Basen. Von besonderer Bedeutung ist es, daß die Bildung der komplementären Basis bei verschwindender Diskriminante undurchführbar wird. Die komplementäre Basis wird bekanntlich beim Beweis des Riemann-Rochschen Satzes zur Herstellung der Ergänzungsklasse benutzt; genauer dient sie dazu, zu einem gegebenen Ideal ein zweites Ideal zu gewinnen, bei dem die Exponenten einer Normalbasis entgegengesetzt gleich den Exponenten einer Normalbasis des gegebenen Ideals sind.

Ich erreiche im folgenden dieses letzte Ziel, indem ich den Begriff der komplementären Basis durch einen schwächeren, darstellungstheoretisch fundierten Begriff ersetze. Bekanntlich wird einem beliebigen Element a aus K bei der regulären Darstellung mit Hilfe der festen Basis b_i ein-

deutig eine Matrix A zugeordnet, $a(b_i) = (b_i)A$. Sind die Basen b_i und $\check{b}_i$ komplementär im üblichen Sinne, so sind die einem beliebigen a durch b_i und $\check{b}_i$ zugeordneten Matrizen stets transponiert,

$$a(b_i) = (b_i)A, \quad a(\check{b}_i) = (\check{b}_i)A^{\mathrm{T}}.$$

Hieran knüpfe ich an und nenne allgemein zwei Basen *fastkomplementär*, wenn sie diese letzte Eigenschaft besitzen. Bei beliebigem Konstantenkörper folgt dann aus der Darstellungstheorie unmittelbar, daß zu jeder Basis von $K/k(\xi)$ eine fastkomplementäre existiert. Im Gegensatz zum Begriff der komplementären Basis ist aber die fastkomplementäre Basis nur bis auf einen von Null verschiedenen Faktor aus K bestimmt. Modultheoretisch bedeutet das offenbar, daß durch den Begriff „fastkomplementär" noch keine eindeutige Paarung von Moduln, sondern erst eine eindeutige Paarung von Modulklassen erfolgt, was aber der Natur des Riemann-Rochschen Satzes, der ja ebenfalls eine Paarung von Klassen enthält, durchaus angemessen ist.

Mit Hilfe des Begriffs der fastkomplementären Basis zeige ich: *Der Körper K enthält eine eindeutig bestimmte Divisorenklasse H^*, die kanonische Klasse, so daß für jede Divisorenklasse C gilt*

$$\mathrm{Dim}\, C = \mathrm{Dim}\, \frac{H^*}{C} + \mathrm{Grad}\, C + 1 - g.$$

Die Klasse H^* hat den Grad $2g-2$ und die Dimension g; sie ist durch diese beiden Eigenschaften charakterisiert.

Das ist dann die allgemeine Formulierung des Riemann-Rochschen Satzes. Bei seinem Beweis bietet der Begriff der fastkomplementären Basis auch noch im Falle eines vollkommenen Konstantenkörpers Vorteile. Während man nämlich bei Benutzung der komplementären Basis vorher durch eine geeignete Transformation dafür sorgen muß, daß im Unendlichen keine Verzweigung auftritt, braucht man bei Benutzung der fastkomplementären Basis über das Unendliche nichts vorauszusetzen. Historisch gesehen liegt die Heranziehung der Darstellungstheorie ganz im Sinne der klassischen Arbeit von Dedekind-Weber, in der bekanntlich die einfachen algebraischen Eigenschaften des Körpers $K/k(x)$ bereits mit hyperkomplexen Hilfsmitteln entwickelt werden.

§ 2.

Darstellungstheoretische Hilfsmittel.

1. Fastkomplementäre Basen. Ist ξ eine beliebige, nichtkonstante Funktion aus K, so setze ich $k(\xi) = \mathsf{P}$ und fasse K alls kommutatives hyperkomplexes System über P auf,

$$K = b_1 \mathsf{P} + \ldots + b_n \mathsf{P},$$

wo die b_i eine Basis von K/P bedeuten. Jeder Funktion a aus K ist bekanntlich durch die Basis b_i eindeutig eine n-reihige, quadratische Matrix A über P zugeordnet. Dabei ist $A = (\varrho_{ij})$ definiert durch die Gleichungen

$$a\,b_j = \sum_{i=1}^{n} b_i\,\varrho_{ij},$$

die man — unter (b_i) die einzeilige Matrix der b_i verstanden — auch schreiben kann in der Form

$$a\,(b_i) = (b_i)\,A. \tag{2}$$

Ist b_i' eine zweite Basis von K/P, die mit b_i durch die Transformationsgleichung

$$(b_i') = (b_i)\,S \tag{3}$$

verbunden ist, so entspricht a vermöge b_i' die Matrix $S^{\mathrm{I}}\,A\,S$[9]),

$$a\,(b_i') = (b_i')\,S^{\mathrm{I}}\,A\,S.$$

Ich nenne nun eine Basis $\check{b}_i$ von K/P zu der ursprünglichen Basis b_i *fastkomplementär*, wenn jedem a aus K durch $\check{b}_i$ die transponierte Matrix zugeordnet wird, d. h. wenn

$$a\,(\check{b}_i) = (\check{b}_i)\,A^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

ist. Zugleich mit $\check{b}_i$ ist offenbar auch $c\,\check{b}_i$ für beliebiges $c \neq 0$ aus K zu b_i fastkomplementär, denn aus (4) geht durch Multiplikation mit c die Gleichung

$$a\,(c\,\check{b}_i) = (c\,\check{b}_i)\,A^{\mathrm{T}}$$

hervor.

Satz 1. *Zu einer beliebigen Basis b_i von K/P existiert stets mindestens eine fastkomplementäre Basis $\check{b}_i$.*

Dieser Satz folgt unmittelbar aus einem Ergebnis der Darstellungstheorie, wonach die erste und zweite reguläre Darstellung äquivalent sind[10]). Da aber die allgemeinen E. Noetherschen Schlüsse bei den hier vorliegenden speziellen Verhältnissen besonders einfach werden, sei der Beweis kurz ausgeführt.

Nach dem Vorbild von E. Noether bilde ich mit n Unbestimmten x_i den P-Modul

$$\mathfrak{M} = x_1\,\mathsf{P} + \ldots + x_n\,\mathsf{P} \quad (x_i\,\varrho = \varrho\,x_i \text{ für alle } \varrho \text{ aus } \mathsf{P}),$$

---

[9]) Hinsichtlich der matrizentheoretischen Bezeichnungen schließe ich mich den systematischen Vorschlägen von Mac Duffee an (C. C. Mac Duffee, The theory of matrices. Erg. d. Math. 2, 5). Ich schreibe also: A^{I} für die Inverse von A, A^{T} für die Transponierte von A und $A^{\mathrm{K}} = A^{\mathrm{TI}} = A^{\mathrm{IT}}$ für die Komplementäre von A.

[10]) Vgl. etwa M. Deuring, Algebren, Erg. d. Math. 4, 1 (1935), insbes. S. 30.

und mache ihn zu einem K-Modul, indem ich bei beliebigem a aus K zunächst die Produkte $a x_i$ durch die Gleichung

$$a(x_i) = (x_i) A^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

definiere und danach das Produkt von a mit einem beliebigen Element $x = \Sigma x_i \varrho_i$ aus $\mathfrak{M}$ durch die Festsetzung $a \Sigma x_i \varrho_i = \Sigma a x_i \cdot \varrho_i$ erkläre. $\mathfrak{M}$ enthält dann als K-Modul den Untermodul $K x_1$. Für jedes $a \neq 0$ aus K ist $a x_1 \neq 0$, weil aus $a x_1 = 0$ auch $1 \cdot x_1 = a^{-1} a \cdot x_1 = a^{-1} \cdot a x_1 = 0$ folgen würde, während doch $1 \cdot x_1 = x_1$ ist. Die aus der Basis b_i entstehenden n Elemente $b_i x_1$ von $K x_1$ sind daher linear unabhängig über P, denn die Gleichung $\Sigma b_i x_1 \cdot \varrho_i = 0$ mit ϱ_i aus P zieht nach dem soeben gesagten die Gleichung $\Sigma b_i \varrho_i = 0$ und somit $\varrho_i = 0$ für jedes i nach sich.

Der Untermodul $K x_1$ hat also einen Rang $\geqq n$ über P und stimmt daher mit dem ganzen Modul $\mathfrak{M}$ überein, dessen Rang über P gleich n ist,

$$K x_1 = \mathfrak{M}.$$

In K muß es mithin n Funktionen $\check{b}_i$ geben, für die $\check{b}_i x_1 = x_i$ ist. Diese $\check{b}_i$ sind selbstverständlich linear unabhängig über P, d. h. die bilden eine Basis von K/P. Gemäß ihrer Definition folgt aber aus (5)

$$a(\check{b}_i x_1) = (\check{b}_i x_1) A^{\mathrm{T}}$$

und hieraus durch Wegstreichen von x_1

$$a(\check{b}_i) = (\check{b}_i) A^{\mathrm{T}}.$$

Damit ist tatsächlich eine zu b_i fastkomplementäre Basis $\check{b}_i$ von K/P gefunden.

Satz 2. *Seien b_i und b'_i zwei Basen von K/P, die durch Multiplikation der ersten mit der Matrix S ineinander übergehen,*

$$(b'_i) = (b_i) S. \tag{3}$$

Ist dann $\check{b}_i$ eine zu b_i fastkomplementäre Basis, so erhält man aus $\check{b}_i$ durch Multiplikation mit der komplementären Matrix S^{K} eine zu b'_i fastkomplementäre Basis $\check{b}'_i$,

$$(\check{b}'_i) = (\check{b}_i) S^{\mathrm{K}}. \tag{6}$$

Aus (3) und (2) folgt nämlich, wie schon festgestellt, daß

$$a(b'_i) = (b'_i) S^{\mathrm{I}} A S$$

ist. Ebenso ergeben (6) und (4) die Gleichung

$$a(\check{b}'_i) = (\check{b}'_i) S^{\mathrm{KI}} A^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{K}},$$

und es ist wirklich

$$S^{\mathrm{KI}} A^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{K}} = (S^{\mathrm{I}} A S)^{\mathrm{T}},$$

also $\check{b}'_i$ fastkomplementär zu b'_i.

2. Fastkomplementäre Ideale. Sei $\mathfrak{o}$ ein Integritätsbereich aus K, dessen Quotientenkörper mit K übereinstimmt und $\Gamma = \mathfrak{o} \frown \mathsf{P}$,

also Γ ein Integritätsbereich aus P. Unter einem Ideal i bez. o verstehe ich einen o-Modul, dessen Produkt mit einer geeigneten Funktion o' von o in o liegt, $o'\,\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{o}$.

Die Basis b_i spannt über Γ den Γ-Modul

$$\mathfrak{m} = b_1\Gamma + \ldots + b_n\Gamma$$

auf. Jedes b_i ist Quotient zweier Elemente aus o, $b_i = \frac{o_i}{o'}$, wo o' ein gemeinsamer Nenner sei, d. h. es ist $o'\,\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{o}$. Der Γ-Modul m ist daher ein Ideal bez. o, sobald er ein o-Modul ist. Andererseits ist m dann und nur dann o-Modul, wenn die Produkte einer beliebigen Funktion o aus o mit den Basiselementen b_i sämtlich zu m gehören, also

$$o\,b_j = \Sigma b_i \gamma_{ij} \quad \text{mit} \quad \gamma_{ij} \text{ aus } \Gamma$$

gilt. Daraus schließt man unmittelbar:

Satz 3. *Die Basis b_i spannt über Γ dann und nur dann ein Ideal bez.* o *auf, wenn jeder Funktion* o *aus* o *durch b_i eine Matrix O über Γ zugeordnet ist,*

$$o\,(b_i) = (b_i)O \quad \textit{mit} \quad O = (\gamma_{ij}), \quad \gamma_{ij} \textit{ aus } \Gamma.$$

Da zugleich mit O auch O^{T} eine Matrix über Γ ist, folgt weiter:

Satz 4. *Spannt die Basis b_i über Γ ein Ideal bez.* o *auf, so spannt auch eine beliebige fastkomplementäre Basis $\breve{b}_i$ über Γ ein Ideal bez.* o *auf.*

$$\breve{\mathfrak{m}} = \breve{b}_1\Gamma + \ldots + \breve{b}_n\Gamma$$

heißt dann ein zu m *fastkomplementäres* Ideal.

3. Fastkomplementäre Modulbasen von $\mathfrak{o}/\Gamma$. Wird das Ideal i durch die Basis b_i über Γ aufgespannt, so bezeichnet man b_i bekanntlich als Modulbasis von $\mathfrak{i}/\Gamma$.

Satz 5. *Ist* o *ein Hauptidealring und b_i eine Modulbasis von $\mathfrak{o}/\Gamma$, so ist mindestens eine zu b_i fastkomplementäre Basis $\breve{b}_i$ ebenfalls Modulbasis von $\mathfrak{o}/\Gamma$.*

Da b_i über Γ das Ideal o aufspannt, spannt nämlich eine beliebige, fastkomplementäre Basis $\breve{b}_i$ nach Satz 4 ebenfalls ein Ideal auf, das gemäß der Voraussetzung über o sicher ein Hauptideal ist,

$$\breve{b}_1\Gamma + \ldots + \breve{b}_n\Gamma = b\,\mathfrak{o} \quad (b \neq 0).$$

Für die fastkomplementäre Basis $b^{-1}\breve{b}_i$ gilt daher wirklich

$$\mathfrak{o} = b^{-1}\breve{b}_1\Gamma + \ldots + b^{-1}\breve{b}_n\Gamma.$$

§ 3.

Bewertungstheoretische Hilfsmittel.

1. Primdivisoren. Ich betrachte alle Exponentenbewertungen $v(K)$, bei denen 1) jeweils sämtliche Konstante den Exponenten 0 haben, 2) die Exponentengruppe mit der Additionsgruppe der ganzen Zahlen überein-

stimmt[11]). Jeder derartigen Exponentenbewertung ordne ich durch Definition einen *Primdivisor* $\mathfrak{p}$ von K zu. Dabei bezeichne ich die zu $\mathfrak{p}$ gehörige Exponentenbewertung mit $\nu_{\mathfrak{p}}$ und nenne $\nu_{\mathfrak{p}}(a)$ den $\mathfrak{p}$-*adischen Exponenten* der Funktion a. Der Restklassenkörper, der zu der Exponentenbewertung $\nu_{\mathfrak{p}}$ gehört, hat stets einen endlichen Grad über dem Konstantenkörper k; dieser Grad heißt der *Grad* von $\mathfrak{p}$.

Die arithmetische Theorie des Körpers K stützt sich auf den folgenden Existenzsatz und Unabhängigkeitssatz für die Primdivisoren von K.

Existenzsatz. *Ist ξ eine beliebige, nichtkonstante Funktion aus K, so gibt es mindestens einen Primdivisor $\mathfrak{p}$ von K, für den der $\mathfrak{p}$-adische Exponent von ξ positiv ist.*

Unabhängigkeitssatz. *Sind $\mathfrak{p}_i$ endlich viele verschiedene Primdivisoren von K, a_i gegebene Elemente aus K und μ_i ganze Zahlen, so existiert stets mindestens eine Funktion a aus K, für die*

$$\nu_{\mathfrak{p}_i}(a - a_i) = \mu_i$$

ist.

Diese beiden Sätze sind wohlbekannt. Zur Begründung des Existenzsatzes betrachtet man etwa die Funktionen von K über dem Körper aller Potenzreihen in ξ mit Koeffizienten aus k und zieht das Henselsche Lemma heran, das man hier aber nur für gewöhnliche Potenzreihen braucht[12]); die Inseparabilität von $K\,k(\xi)$ spielt dabei bekanntlich keine Rolle[13]). — Den Unabhängigkeitssatz hat A. Ostrowski besonders einfach hergeleitet, und zwar sogleich für beliebige Exponentenbewertungen[14]).

Aus dem Existenzsatz schließt man nach dem Muster des Euklidischen Beweises für die Existenz unendlich vieler Primzahlen unmittelbar: *K besitzt unendlich viele Primdivisoren.*

---

[11]) Das Element 0 besitze, wie üblich, den Exponenten $\nu(0) =$ „unendlich".

[12]) Bei der üblichen Einführung der Primdivisoren von K greift man aus K zunächst einen festen rationalen Unterkörper $k(x)$ heraus, bestimmt sämtliche Exponentenbewertungen von $k(x)$ und zeigt, daß sich jede Exponentenbewertung von $k(x)$ auf mindestens eine Weise auf den Gesamtkörper K fortsetzen läßt. Da die Primpolynome P von $k[x]$ im allgemeinen nicht sämtlich linear sind, bildet man beim Nachweis der Fortsetzbarkeit zu jedem P die zugehörigen Henselschen P-adischen Reihen und wendet auf sie das Henselsche Lemma an. Demgegenüber nehme ich im Text den Standpunkt der birationalen Transformation ein und betrachte von vornherein die Primdivisoren von K. Ich habe dann bei beliebigem nichtkonstanten ξ in der soeben eingeführten Sprechweise nur zu zeigen, daß die durch ξ erzeugte Exponentenbewertung von $k(\xi)$ sich auf K fortsetzen läßt, und dabei ist ξ ein lineares Primpolynom von $k[\xi]$, so daß ich mit gewöhnlichen Potenzreihen auskomme.

[13]) Das geht z. B. aus der Darstellung der Bewertungstheorie bei A. Ostrowski hervor. Vgl. A. Ostrowski, Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper I.—III. Math. Zeitschr. 39 (1935), S. 269—404. Insbesondere S. 291 ff.

[14]) Loc. cit. [13]), S. 310.

2. Divisoren. Unter einem *Divisor* $\mathfrak{a}$ von K verstehe ich ein über alle Primdivisoren $\mathfrak{p}$ erstrecktes formales Potenzprodukt

$$\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\mu_\mathfrak{p}},$$

wobei die Exponenten $\mu_\mathfrak{p}$ ganze Zahlen ($\gtreqless 0$) bedeuten und nur endlich viele der $\mu_\mathfrak{p}$ von 0 verschieden sind. Ich setze den $\mathfrak{p}$-*adischen Exponenten* $\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a}$ gleich $\mu_\mathfrak{p}$ und $\operatorname{Grad}\mathfrak{a} = \sum_{\mathfrak{p}} \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) \operatorname{Grad}\mathfrak{p}$. Eine Funktion a heißt ein *Multiplum* von $\mathfrak{a}$, wenn $\nu_\mathfrak{p}(a) \geqq \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})$ für jedes beliebige $\mathfrak{p}$ ist.

Die *Multiplikation* zweier Divisoren

$$\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\mu_\mathfrak{p}}, \qquad \mathfrak{a}' = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\mu'_\mathfrak{p}}$$

wird in üblicher Weise durch die Vorschrift

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}' = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\mu_\mathfrak{p} + \mu'_\mathfrak{p}}$$

erklärt. Die Divisoren stellen dann eine Gruppe dar; der Divisor $\mathfrak{e}$, in dem alle $\mathfrak{p}$ mit dem Exponenten 0 vorkommen, ist *Einheitsdivisor*.

Ich sage, ein Divisor sei *ganz*, wenn alle seine $\mathfrak{p}$-adischen Exponenten $\geqq 0$ sind. Jeder Divisor $\mathfrak{a}$ läßt sich als Quotient zweier eindeutig bestimmter ganzer Divisoren schreiben, die keinen gemeinsamen Primdivisor mit einem von 0 verschiedenen Exponenten enthalten (*Zähler-* und *Nennerdivisor* von $\mathfrak{a}$).

3. Zugehörige Ideale. Sei $\{\mathfrak{p}\}$ irgend eine Menge von Primdivisoren, zu der es in K mindestens eine nichtkonstante Funktion ξ mit $\nu_\mathfrak{p}(\xi) \geqq 0$ für alle $\mathfrak{p}$ aus $\{\mathfrak{p}\}$ gibt. Diejenigen Divisoren, deren $\mathfrak{p}$-adische Exponenten höchstens für die $\mathfrak{p}$ aus $\{\mathfrak{p}\}$ von 0 verschieden sind, bilden eine Untergruppe innerhalb der Gruppe aller Divisoren. Alle in dieser und der folgenden Nummer auftretenden Divisoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{e}$, $\breve{\mathfrak{a}}$, $\breve{\mathfrak{e}}$ stammen aus dieser Untergruppe.

Eine Funktion a heißt ein *Fastmultiplum* des Divisors $\mathfrak{a}$ bez. $\{\mathfrak{p}\}$, wenn $\nu_\mathfrak{p}(a) \geqq \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})$ für jedes $\mathfrak{p}$ aus $\{\mathfrak{p}\}$ ist. Alle Fastmultipla o des Einheitsdivisors bilden einen Integritätsbereich $\mathfrak{o}_{\{\mathfrak{p}\}}$, dessen Quotientenkörper mit K übereinstimmt. Alle Fastmultipla a eines beliebigen Divisors $\mathfrak{a}$ bilden ein Ideal $\mathfrak{i}_\mathfrak{a}$ bez. $\mathfrak{o}_{\{\mathfrak{p}\}}$, das *Ideal aller Fastmultipla* von $\mathfrak{a}$ bez. $\{\mathfrak{p}\}$. Offenbar ist $\mathfrak{i}_\mathfrak{e} = \mathfrak{o}_{\{\mathfrak{p}\}}$.

Für die arithmetische Theorie sind zwei Spezialfälle von Mengen $\{\mathfrak{p}\}$ wichtig.

Erster Spezialfall. $\{\mathfrak{p}\}$ besteht aus endlich vielen Primdivisoren. Aus dem Unabhängigkeitssatz folgt dann unmittelbar:

$\mathfrak{o}_{\{\mathfrak{p}\}}$ *ist Hauptidealring.*

Ist $\mathfrak{a}$ *ganz und faßt man den Restklassenring* $\mathfrak{o}_{\{\mathfrak{p}\}}/\mathfrak{i}_\mathfrak{a}$ *als* k*-Modul auf, so ist* $\operatorname{Grad}\mathfrak{a} = \operatorname{Rang}(\mathfrak{o}_{\{\mathfrak{p}\}}/\mathfrak{i}_\mathfrak{a} : k)$.

Für den Rang $(\mathfrak{o}_{\{\mathfrak{p}\}}/\mathfrak{i}_\mathfrak{a} : k)$ läßt sich mit Hilfe eines festgewählten Fastmultiplum ξ von $\mathfrak{a}$ leicht eine obere Schranke angeben[15]). Offenbar ist nämlich Rang $(\mathfrak{o}_{\{\mathfrak{p}\}}/\mathfrak{i}_\mathfrak{a} : k) \leqq$ Rang $(\mathfrak{o}_{\{\mathfrak{p}\}}/\xi : k)$. Da aber ein System von Elementen aus $\mathfrak{o}_{\{\mathfrak{p}\}}$, das über k mod ξ linear unabhängig ist, stets auch über $k(\xi)$ an sich linear unabhängig ist, gilt weiter: Rang $(\mathfrak{o}_{\{\mathfrak{p}\}}/\xi : k) \leqq$ Grad$\cdot(K : k(\xi))$. Man gewinnt so die Umgleichung

$$\text{Grad } \mathfrak{a} \leqq \text{Grad } (K : k(\xi)).$$

Aus ihr schließt man

Endlichkeitssatz. *Eine beliebige Funktion ξ aus K hat nur für endlich viele Primdivisoren* $\mathfrak{p}$ *einen von* 0 *verschiedenen* $\mathfrak{p}$*-adischen Exponenten.*

Ist insbesondere $\{\mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{p}_\infty\}$ die endliche Menge derjenigen $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\infty$ für die die gegebene nichtkonstante Funktion ξ einen negativen $\mathfrak{p}$-adischen Exponenten besitzt, so bezeichne ich den zugehörigen Integritätsbereich im folgenden mit $\mathfrak{o}_\infty$ und den Durchschnitt $\mathfrak{o}_\infty \frown k(\xi)$ mit Γ_∞.

Zweiter Spezialfall. $\{\mathfrak{p}\}$ besteht aus allen Primdivisoren, für die die gegebene nichtkonstante Funktion ξ einen nichtnegativen $\mathfrak{p}$-adischen Exponenten besitzt. Für den zu dieser Menge $\{\mathfrak{p}\}$ gehörigen Integritätsbereich will ich in Zukunft den Buchstaben $\mathfrak{o}$ reservieren, für seinen Durchschnitt mit $\mathsf{P} = k(\xi)$ den Buchstaben Γ, $\Gamma = \mathfrak{o} \frown \mathsf{P}$. $\mathfrak{o}$ heißt der Integritätsbereich aller in ξ ganzen Funktionen aus K; Γ stimmt offenbar überein mit dem Polynombereich $k[\xi]$.

Aus dem Unabhängigkeitssatz und dem Endlichkeitssatz folgt unmittelbar:

Für jeden Primdivisor $\mathfrak{p}$ *aus* $\{\mathfrak{p}\}$ *ist das Minimum* $\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{i}_\mathfrak{a})$ *der* $\mathfrak{p}$*-adischen Exponenten aller Funktionen aus* $\mathfrak{i}_\mathfrak{a}$ *gleich* $\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})$. *Zu einem beliebigen Ideal* $\mathfrak{i}$ *bez.* $\mathfrak{o}$ *gibt es genau einen, nur aus Primdivisoren von* $\{\mathfrak{p}\}$ *zusammengesetzten Divisor* $\mathfrak{a}$, *dessen Fastmultipla gerade das Ideal* $\mathfrak{i}$ *ausfüllen, und zwar ist*

$$\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p} \in \{\mathfrak{p}\}} \mathfrak{p}^{\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{i})}.$$

Ferner gilt:

Das Ideal $\mathfrak{i}_\mathfrak{a}$ *enthält stets* n *über* $k(\xi)$ *linear unabhängige Funktionen, wo* $n = (K : k(\xi))$ *ist.*

Besitzt $\mathfrak{o}$ *eine Modulbasis* o_i *über* Γ[16]), $\mathfrak{i}_\mathfrak{a}$ *eine Modulbasis* a_i *über* Γ, *und ist*

$$(a_i) = (o_i)\,S, \quad \det S = \Delta,$$

---

[15]) Zu dem folgenden vgl. auch H. Grell, Über die Gültigkeit der gewöhnlichen Idealtheorie in endlichen algebraischen Erweiterungen erster und zweiter Art. Math. Zeitschr. 40 (1935), S. 503—505.

[16]) Die Frage, ob $\mathfrak{o}$ (und damit jedes Ideal $\mathfrak{i}$ bez. $\mathfrak{o}$) stets eine Modulbasis über Γ besitzt, bleibt hier noch offen. In § 4, Nr. 3 wird sich ergeben, daß das tatsächlich der Fall ist.

so ist

$$\text{Grad } \mathfrak{a} = \text{Grad}_\xi \Delta.$$

Dabei denke ich mir die Funktion Δ aus $k(\xi)$ als Quotient zweier Polynome geschrieben und verstehe unter $\text{Grad}_\xi \Delta$ die Differenz aus dem Grad des Zählerpolynoms minus dem Grad des Nennerpolynoms.

4. Fastkomplementäre Divisoren. $\{\mathfrak{p}\}$ bedeute in dieser Nummer weiterhin die Menge aller Primdivisoren, für die eine gegebene nichtkonstante Funktion ξ nichtnegative $\mathfrak{p}$-adische Exponenten hat; es liege also der zweite, soeben genannte Spezialfall vor. Zwei Divisoren $\mathfrak{a}$ und $\check{\mathfrak{a}}$ sollen *fastkomplementär* heißen (genauer: fastkomplementär bez. $\{\mathfrak{p}\}$), wenn die Ideale $\mathfrak{i}_\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{i}_{\check{\mathfrak{a}}}$ ihrer Fastmultipla durch zwei fastkomplementäre Basen über Γ aufgespannt werden.

Sei nun o_i eine Modulbasis von $\mathfrak{o}/\Gamma$, a_i eine Modulbasis von $\mathfrak{i}_\mathfrak{a}/\Gamma$, also

$$\mathfrak{o} = o_1\Gamma + \ldots + o_n\Gamma,$$
$$\mathfrak{i}_\mathfrak{a} = a_1\Gamma + \ldots + a_n\Gamma$$

und

$$(a_i) = (o_i)S.$$

Zu o_i denke ich mir eine fastkomplementäre Basis $\check{o}_i$ fest gewählt. $\check{o}_i$ spannt dann nach Satz 4 ein Ideal über Γ auf, und es sei $\check{\mathfrak{e}}$ der Divisor, dessen Fastmultipla gerade dieses Ideal ausfüllen.

Satz 6. *Der Divisor* $\check{\mathfrak{e}}\mathfrak{a}^{-1}$ *ist fastkomplementär zu* $\mathfrak{a}$, *und zwar wird das Ideal seiner Fastmultipla durch die zu* a_i *fastkomplementäre Basis*

$$(\check{a}_i) = (\check{o}_i)S^K$$

über Γ *aufgespannt.*

Zum Beweis gehe ich von der fastkomplementären Basis $\check{a}_i$ aus, die jedenfalls ein Ideal aufspannt und daher eindeutig einen Divisor $\check{\mathfrak{a}}$ bestimmt. Offenbar genügt es zu zeigen, daß $\check{\mathfrak{a}} = \check{\mathfrak{e}}\mathfrak{a}^{-1}$ ist, oder was dasselbe besagt: *Für einen beliebigen Primdivisor* $\mathfrak{p}$ *aus* $\{\mathfrak{p}\}$ *besteht zwischen den* $\mathfrak{p}$*-adischen Exponenten*

$$\nu_\mathfrak{p}(\check{\mathfrak{a}}) = \check{\alpha}, \quad \nu_\mathfrak{p}(\check{\mathfrak{e}}) = \check{\varepsilon}, \quad \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) = \alpha$$

die Beziehung $\check{\alpha} = \check{\varepsilon} - \alpha$.

Diesen Nachweis führe ich mit Hilfe eines bekannten $\mathfrak{p}$-adischen Prinzips: Ich betrachte neben $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$ die endlich vielen Primdivisoren $\mathfrak{p}_i$, die die Eigenschaft haben, daß jede Funktion aus P mit positivem $\mathfrak{p}$-adischen Exponenten auch einen positiven $\mathfrak{p}_i$-adischen Exponenten besitzt. Unter $\mathfrak{o}_\pi$ verstehe ich den Integritätsbereich aller Fastmultipla des Einheitsdivisors bez. dieser endlichen Menge $\{\mathfrak{p}_i\}$ und setze $\Gamma_\pi = \mathfrak{o}_\pi \cap \mathsf{P}$. $\mathfrak{o}_\pi$ stellt dann nach Nr. 3 einen Hauptidealring dar. Bekanntlich ist:

$$o_1\Gamma_\pi + \ldots + o_n\Gamma_\pi = \mathfrak{o}_\pi \tag{7}$$

und

$$(8) \qquad a_1\Gamma_\pi + \ldots + a_n\Gamma_\pi = a\mathfrak{o}_\pi \quad \text{mit} \quad \nu_\mathfrak{p}(a) = \alpha.$$

Dementsprechend ist ferner

$$(9) \qquad \breve{o}_1\Gamma_\pi + \ldots + \breve{o}_n\Gamma_\pi = \breve{o}\,\mathfrak{o}_\pi \quad \text{mit} \quad \nu_\mathfrak{p}(\breve{o}) = \breve{\varepsilon},$$

$$(10) \qquad \breve{a}_1\Gamma_\pi + \ldots + \breve{a}_n\Gamma_\pi = \breve{a}\,\mathfrak{o}_\pi \quad \text{mit} \quad \nu_\mathfrak{p}(\breve{a}) = \breve{\alpha}.$$

Sei nun a mit Hilfe der Basis o_i die Matrix A zugeordnet,

$$a(o_i) = (o_i)A,$$

so daß

$$a^{-1}(o_i) = (o_i)A^{\mathrm{I}}$$

und gemäß der Definition der fastkomplementären Basis

$$a^{-1}(\breve{o}_i) = (\breve{o}_i)A^{\mathrm{K}}$$

ist. Nach (8) und (7) spannen die Basen a_i und ao_i über Γ_π den gleichen Modul auf. Die Matrix $S^{\mathrm{I}}A$, die den Übergang von

$$(a_i) = (o_i)S \quad \text{zu} \quad (ao_i) = (o_i)A$$

vermittelt, ist daher unimodular bez. Γ_π. Folglich ist auch die komplementäre Matrix $(S^{\mathrm{I}}A)^{\mathrm{K}}$ unimodular bez. Γ_π, d. h. die Basen

$$(\breve{a}_i) = (\breve{o}_i)S^{\mathrm{K}} \quad \text{und} \quad (a^{-1}\breve{o}_i) = (\breve{o}_i)A^{\mathrm{K}},$$

die durch Multiplikation der ersten mit $(S^{\mathrm{I}}A)^{\mathrm{K}}$ ineinander übergehen, spannen über Γ_π ebenfalls den gleichen Modul auf. Unter Berücksichtigung von (10) und (9) erhält man daher

$$\breve{a}\,\mathfrak{o}_\pi = \breve{a}_1\Gamma_\pi + \ldots + \breve{a}_n\Gamma_\pi = a^{-1}(\breve{o}_1\Gamma_\pi + \ldots \breve{o}_n\Gamma_\pi) = a^{-1}\breve{o}\,\mathfrak{o}_\pi,$$

d. h. es ist wirklich $\breve{\alpha} = \nu_\mathfrak{p}(\breve{a}) = \nu_\mathfrak{p}(\breve{o}) - \nu_\mathfrak{p}(a) = \breve{\varepsilon} - \alpha$.

5. Divisorenklassen. Ist $\xi \neq 0$ eine beliebige Funktion aus K, so ist das Potenzprodukt $\prod_\mathfrak{p} \mathfrak{p}^{\nu_\mathfrak{p}(\xi)}$ ein Divisor, der *Divisor der Funktion* ξ,

$$\xi \sim \prod_\mathfrak{p} \mathfrak{p}^{\nu_\mathfrak{p}(\xi)} = \frac{\text{Zählerdivisor von } \xi}{\text{Nennerdivisor von } \xi} = \frac{\mathfrak{n}_\xi}{\infty_\xi}.$$

Aus dem Existenzsatz folgt, daß eine Funktion durch ihren Divisor bis auf einen Faktor $\neq 0$ aus dem Konstantenkörper eindeutig bestimmt ist.

Die Divisoren der Funktionen aus K heißen *Hauptdivisoren*. Sie bilden eine Untergruppe H innerhalb der Gruppe A aller Divisoren. Die Restklassen von A nach H nennt man *Divisorenklassen*. Greift man aus einer Divisorenklasse C zwei Divisoren $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}'$ heraus, so stellt also $\mathfrak{c}'\mathfrak{c}^{-1}$ einen Hauptdivisor dar, d. h. es gibt eine Funktion $c \sim \mathfrak{c}'\mathfrak{c}^{-1}$. Im Fall eines ganzen Divisors $\mathfrak{c}' = \mathfrak{g}$ ist offenbar $c \sim \mathfrak{g}\mathfrak{c}^{-1}$ ein Multiplum von $\mathfrak{c}^{-1}$. Umgekehrt hat der Divisor eines Multiplums c von $\mathfrak{c}^{-1}$ die Form $c \sim \mathfrak{g}\mathfrak{c}^{-1}$, wo $\mathfrak{g}$ ein ganzer Divisor aus der Klasse von $\mathfrak{c}$ ist.

Seien $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_r$ Divisoren aus einer festen Divisorenklasse C, $\mathfrak{c}$ irgend ein weiterer Divisor aus C. Zu den r Hauptdivisoren $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}^{-1}, \ldots, \mathfrak{c}_r\mathfrak{c}^{-1}$

denke ich mir je eine Funktion c_i aufgesucht, so daß $c_i \sim \mathfrak{c}_i \mathfrak{c}^{-1}$ ist. Ersetzt man $\mathfrak{c}$ durch einen beliebigen Divisor $\mathfrak{c}'$ von C und wählt zu den r Hauptdivisoren $\mathfrak{c}_i \mathfrak{c}'^{-1}$ wiederum je eine Funktion c_i' mit $c_i' \sim \mathfrak{c}_i \mathfrak{c}'^{-1}$, so sind die r Funktionen c_i einerseits und die r Funktionen c_i' andererseits stets gleichzeitig linear abhängig oder linear unabhängig über k. Man nennt daher die Divisoren $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_r$ aus C linear abhängig oder linear unabhängig über k, je nachdem ob die Funktionen $c_1, \ldots, c_r$ linear abhängig oder linear unabhängig über k sind. Die Maximalzahl R über k linear unabhängiger ganzer Divisoren aus C ist dann offenbar gleich der Maximalzahl über k linear unabhängiger Multipla von $\mathfrak{c}^{-1}$, wo $\mathfrak{c}$ einen beliebigen Divisor aus C bedeutet. R heißt die *Dimension* von C, $R = \mathrm{Dim}\, C$.

§ 4.

Begriff und Existenz der Normalbasis.

1. Modul der Multipla von $\mathfrak{a}$. Sei ξ eine beliebige nichtkonstante Funktion aus K, die ich für den Rest dieser Arbeit festhalte. Ich setze $\mathsf{P} = k(\xi)$, $n = (K : \mathsf{P})$ und verstehe unter ∞ den Nennerdivisor von ξ.

$\mathfrak{a}$ bedeutet einen Divisor, dessen p-adische Exponenten nur für solche Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von 0 verschieden sind, für die $\nu_\mathfrak{p}(\xi) \geqq 0$ gilt. Die Multipla von $\mathfrak{a}$ bilden einen k-Modul $\mathfrak{m}_\mathfrak{a}$. Der Riemann-Rochsche Satz befaßt sich mit dem Rang $(\mathfrak{m}_\mathfrak{a} : k)$.

Um diesen Rang zu ermitteln, zerlege ich die Menge aller Primdivisoren von K in zwei Teilmengen, nämlich:

1) Die Menge $\{\mathfrak{p}\}$ aller derjenigen $\mathfrak{p}$, für die $\nu_\mathfrak{p}(\xi) \geqq 0$ ist. Zu ihr gehört der Integritätsbereich $\mathfrak{o}$ aller in ξ ganzen algebraischen Funktionen und das Ideal $\mathfrak{i}_\mathfrak{a}$ aller Fastmultipla von $\mathfrak{a}$ bez. $\{\mathfrak{p}\}$. $\mathfrak{o} \cap \mathsf{P} = \Gamma$ besteht aus allen Polynomen in ξ über k.

2) Die Menge $\{\mathfrak{p}_\infty\}$ der endlich vielen $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\infty$, für die $\nu_\mathfrak{p}(\xi) < 0$ ist. Zu ihr gehört der Integritätsbereich $\mathfrak{o}_\infty$, der nach § 3, Nr. 3 einen Hauptidealring darstellt. $\mathfrak{o}_\infty \cap \mathsf{P} = \Gamma_\infty$ besteht aus allen Quotienten von Polynomen in ξ, bei denen Grad des Nenners $\geqq$ Grad des Zählers ist.

Für den Modul $\mathfrak{m}_\mathfrak{a}$ aller Multipla von $\mathfrak{a}$ gilt offenbar die Durchschnittsdarstellung

$$\mathfrak{m}_\mathfrak{a} = \mathfrak{i}_\mathfrak{a} \cap \mathfrak{o}_\infty .$$

Sie bildet die Grundlage der weiteren Überlegungen. Um den Durchschnitt auf der rechten Seite genauer zu bestimmen, führt man die Hilfsbewertung ν_∞ und den Begriff der Normalbasis (bzw. ∞) ein.

2. Hilfsbewertung ν_∞. Für eine beliebige Funktion $a \neq 0$ aus K wird der Exponent $\nu_\infty(a)$ bez. ∞ definiert als die größte ganze Zahl $\alpha \geqq 0$,

für die $a\,\xi^{\alpha}$ zu $\mathfrak{o}_\infty$ gehört. Für $a = 0$ wird $v_\infty(0) =$ „unendlich" gesetzt. Aus dieser Definition erkennt man ohne weiteres, daß für den Exponenten bez. ∞ folgende Tatsachen bestehen:

I) $v_\infty(ab) \geqq v_\infty(a) + v_\infty(b)$. *Gehört a zu* P, *so ist* $v_\infty(ab) = v_\infty(a) + v_\infty(b)$.

II) $v_\infty(a+b) \geqq \text{Min}\,[v_\infty(a), v_\infty(b)]$.

III) $\mathfrak{o}_\infty$ *besteht aus allen und nur den Funktionen u, für die* $v_\infty(u) \geqq 0$ *ist. Bilden n Funktionen u_i aus $\mathfrak{o}_\infty$ keine Modulbasis von $\mathfrak{o}_\infty/\Gamma_\infty$, so gibt es stets Konstante ε_i der Art, daß die Funktion* $u = \sum_{i=1}^{m} u_i \varepsilon_i$ $(m \leqq n,\ \varepsilon_m \neq 0)$ *einen Exponenten* $v_\infty(u) > 0$ *besitzt.*

IV) *Ist* $\varrho \neq 0$ *eine Funktion aus* P *und schreibt man ϱ als Quotient zweier Polynome in ξ, so ist* $v_\infty(\varrho) =$ *Grad des Nennerpolynoms — Grad des Zählerpolynoms.*

V) *Für jede Funktion o aus $\mathfrak{o}$ ist* $v_\infty(o) \leqq 0$.

VI) *Der Modul der Multipla von* $\mathfrak{a}\infty^{\nu}$ *besteht aus allen und nur den Funktionen a von* $\mathfrak{i}_\mathfrak{a}$, *für die* $v_\infty(a) \geqq \nu$ *ist.*

Schließlich gilt noch:

VII) *Die Exponenten* $v_\infty(a)$ *aller Funktionen aus* $\mathfrak{i}_\mathfrak{a}$ *sind nach oben beschränkt.*

Gemäß der Definition des Idealbegriffs gibt es nämlich in $\mathfrak{o}$ eine Funktion o, so daß $o\,\mathfrak{i}_\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}$ ist, also oa bei festem o für jedes a aus $\mathfrak{i}_\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{o}$ gehört. Es ist dann nach I) und V)

$$v_\infty(o) + v_\infty(a) \leqq v_\infty(oa) \leqq 0,$$

d. h.

$$v_\infty(a) \leqq -v_\infty(o)$$

für jedes a aus $\mathfrak{i}_\mathfrak{a}$ und festes o.

3. Normalbasis. Eine Basis b_i von K/P heißt *Normalbasis* (bez. ∞), wenn $b_i \xi^{v_\infty(b_i)}$ eine Modulbasis von $\mathfrak{o}_\infty/\Gamma_\infty$ ist[17]).

Satz 7. *Aus dem Ideal* $\mathfrak{i}_\mathfrak{a}$ *seien n Funktionen a_i in folgender Weise herausgegriffen:* $a_1 \neq 0$ *ist unter allen von 0 verschiedenen Funktionen aus* $\mathfrak{i}_\mathfrak{a}$ *eine von größtem Exponenten bez. ∞; sind $a_1, \ldots, a_{m-1}$ schon gewählt, so ist a_m unter allen von $a_1, \ldots, a_{m-1}$ über* P *linear unabhängigen Funktionen aus* $\mathfrak{i}_\mathfrak{a}$ *eine von größtem Exponenten bez. ∞.*

Dann bilden die a_i eine Normalbasis von K/P und zugleich eine Modulbasis von $\mathfrak{i}_\mathfrak{a}/\Gamma$.

Zunächst ist die in Satz 7 beschriebene Auswahl von Funktionen a_i aus $\mathfrak{i}_\mathfrak{a}$ tatsächlich möglich, weil die Exponenten $v_\infty(a)$ für alle $a \neq 0$

---

[17]) Diese Definition der Normalbasis hat auch H. Hasse nach einer freundlichen Mitteilung in einer Vorlesung während des Winters 1933/34 benutzt.

aus $\mathfrak{i}_a$ gemäß VII) nach oben beschränkt sind und weil es in $\mathfrak{i}_a$ gemäß § 3, Nr. 3 stets n über P linear unabhängige Funktionen gibt. Da die n Funktionen a_i nach ihrer Bestimmung linear unabhängig über P sind, stellen sie sicher eine Basis von K/P dar.

Den Beweis der übrigen Behauptungen des Satzes 7 führe ich indirekt. Dabei benutze ich, daß für die Exponenten $\nu_\infty(a_i) = \alpha_i$ gemäß der Wahl der a_i jedenfalls

(11) $$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots \geqq \alpha_n$$

gilt.

Angenommen, die a_i bilden keine Normalbasis, also die $a_i \xi^{\alpha_i}$ keine Modulbasis von $\mathfrak{o}_\infty/\Gamma_\infty$. Dann gibt es nach III) Konstante ε_i der Art, daß die Funktion

$$u = \sum_{i=1}^{m} a_i \xi^{\alpha_i} \cdot \varepsilon_i \quad (m \leqq n, \quad \varepsilon_m \neq 0)$$

einen Exponent $\nu_\infty(u) > 0$ besitzt. Die Funktion

$$a = u\,\xi^{-\alpha_m} = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \xi^{\alpha_i - \alpha_m} \varepsilon_i$$

gehört wegen $\alpha_i - \alpha_m \geqq 0\,(i = 1, \ldots, m)$ gemäß ihrer Summendarstellung zu $\mathfrak{i}_a$ und ist wegen $\varepsilon_m \neq 0$ sicher von $a_1, \ldots, a_{m-1}$ linear unabhängig über P. Andererseits ist aber $\nu_\infty(a) = \nu_\infty(u) + \alpha_m > \alpha_m$ und das widerspricht der Wahl von a_m.

Angenommen, die a_i bilden keine Modulbasis von $\mathfrak{i}_a/\Gamma$. Dann gibt es in $\mathfrak{i}_a$ eine Funktion von der Form

$$a = \gamma^{-1} \sum_{i=1}^{m} a_i \gamma_i,$$

wo γ und γ_i Funktionen aus Γ, also Polynome in ξ sind, und γ_m innerhalb Γ durch γ unteilbar ist. Durch Division kann jedes γ_i entweder zu 0 gemacht oder seinem Grade nach unter den Grad von γ heruntergedrückt werden (insbesondere $\gamma_m \neq 0$). Nach IV) ist dann $\nu_\infty(\gamma^{-1}\gamma_i) > 0$, folglich nach I) und (11)

$$\nu_\infty(\gamma^{-1}\gamma_i \cdot a_i) > \nu_\infty(a_i) \geqq \nu_\infty(a_m).$$

Die Funktion a besitzt also einen Exponenten $\nu_\infty(a) > \nu_\infty(a_m)$ und ist wegen $\gamma_m \neq 0$ von $a_1, \ldots, a_{m-1}$ linear unabhängig über P. Das widerspricht wiederum der Wahl von a_m.

Damit ist Satz 7 vollständig bewiesen.

Aus Satz 7 geht hervor, daß jedes Ideal $\mathfrak{i}$ bez. $\mathfrak{o}$ eine Modulbasis über Γ besitzt, die zugleich Normalbasis bez. ∞ ist. Eine solche Basis soll kurz eine Normalbasis von $\mathfrak{i}/\Gamma$ heißen.

4. Folgerung. Aus dem soeben angeführten Existenzbeweis folgt zugleich, daß bei beliebiger, nichtkonstanter Funktion ξ stets eine Modulbasis für $\mathfrak{o}_\infty/\Gamma_\infty$ existiert. Der Rang

$$(\mathfrak{o}_\infty/\infty : k) = (\mathfrak{o}_\infty/\xi^{-1} : k)$$

ist also gleich $(K : k(\xi))$ und folglich nach § 3, Nr. 3 auch der Grad des Zählerdivisors ∞ von ξ^{-1} gleich $(K : k(\xi))$. Betrachtet man an Stelle von ξ die Funktion ξ^{-1}, so folgt ebenso, daß der Grad des Zählerdivisors von ξ gleich $(K : k(\xi^{-1})) = (K : k(\xi))$ ist. Das ergibt den

Satz 8. *Der Divisor einer beliebigen Funktion aus K hat den Grad 0.*

Da danach alle Hauptdivisoren den Grad 0 besitzen, kommt offenbar sämtlichen Divisoren einer festen Divisorenklasse C derselbe Grad zu. Diesen übereinstimmenden Grad aller Divisoren von C nennt man den *Grad* von C.

§ 5.

Eigenschaften der Normalbasis.

1. Berechnung des Ranges $(\mathfrak{m}_\mathfrak{a} : k)$.

Satz 9. *Ist a_i eine Normalbasis von K/P, so gilt für den Exponenten $v_\infty(a)$ einer Funktion*

$$a = \sum_{i=1}^{n} a_i \varrho_i \qquad (\varrho_i \text{ aus } \mathsf{P})$$

stets

$$v_\infty(a) = \operatorname{Min} v_\infty(a_i \varrho_i).$$

Zum Beweis setze ich $\operatorname{Min} v_\infty(a_i \varrho_i) = \mu$, $v_\infty(a_i) = \alpha_i$ und habe dann nach II) nur zu zeigen, daß $a\,\xi^{\mu+1}$ nicht mehr zu $\mathfrak{o}_\infty$ gehört. Nun ist in

$$a\,\xi^{\mu+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i \varrho_i \xi^{\mu+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi^{\alpha_i} \cdot \varrho_i \xi^{\mu-\alpha_i+1} \tag{12}$$

für mindestens einen Summand der ersten Summe gemäß der Definition von μ

$$v_\infty(a_m \varrho_m \xi^{\mu+1}) < 0.$$

Wegen $v_\infty(a_m \xi^{\alpha_m}) = 0$ ist daher nach I)

$$v_\infty(\varrho_m \xi^{\mu-\alpha_m+1}) < 0$$

und da $a_i \xi^{\alpha_i}$ nach Voraussetzung eine Modulbasis von $\mathfrak{o}_\infty/\Gamma_\infty$ ist, zeigt die zweite Summendarstellung in (12), daß $a\,\xi^{\mu+1}$ wirklich nicht mehr in $\mathfrak{o}_\infty$ liegt.

Satz 10. *Ist a_i eine Normalbasis von $\mathfrak{i}_\mathfrak{a}/\Gamma$, $v_\infty(a_i) = \alpha_i$, so hat der Modul der Multipla von $\mathfrak{a}\infty^\nu$ über k den Rang*

$$r = (\alpha_1 - \nu + 1) + \ldots + (\alpha_m - \nu + 1),$$

wo $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ diejenigen unter den α_i bedeuten, die $\geqq \nu$ sind.

Nach Satz 9 gilt nämlich für eine beliebige Funktion $a = \Sigma a_i \gamma_i$ (γ_i aus Γ) von $\mathfrak{i}_\mathfrak{a}$

$$\nu_\infty(a) = \text{Min}\, \nu_\infty(a_i \gamma_i),$$

d. h. es ist dann und nur dann $\nu_\infty(a) \geqq \nu$, wenn jedes Polynom γ_i in ξ einen Grad $\leqq \alpha_i - \nu$ besitzt. Die Funktionen $a_i \xi^{\mu_i} (0 \leqq \mu_i \leqq \alpha_i - \nu)$ bilden daher über k eine Basis des Moduls aller derjenigen Funktionen a aus $\mathfrak{i}_\mathfrak{a}$ für die $\nu_\infty(a) \geqq \nu$ ist. Damit ist aber gemäß VI) bereits die Behauptung des Satz 10 bewiesen.

Aus Satz 10 ergibt sich für $\nu = 0$ insbesondere

Satz 11. *Ist a_i eine Normalbasis von $\mathfrak{i}_\mathfrak{a}/\Gamma$, $\nu_\infty(a_i) = \alpha_i$, so ist der Rang des Moduls $\mathfrak{m}_\mathfrak{a}$ aller Multipla von $\mathfrak{a}$*

$$(\mathfrak{m}_\mathfrak{a} : k) = (\alpha_1 + 1) + \ldots + (\alpha_m + 1),$$

wo $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ diejenigen unter den α_i bedeuten, die $\geqq 0$ sind.

2. Zwei Normalbasen.

Satz 12. *Ist a_i eine Normalbasis von $\mathfrak{i}_\mathfrak{a}/\Gamma$ mit den Exponenten $\nu_\infty(a_i) = \alpha_i$ und o_i eine Normalbasis von $\mathfrak{o}/\Gamma$ mit den Exponenten ω_i, so gilt*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i - \text{Grad } \mathfrak{a}.$$

Multipliziert man nämlich die zwischen den a_i und o_i bestehenden Übergangsgleichungen

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} o_i \varrho_{ij} \quad (\varrho_{ij} \text{ aus } \mathsf{P})$$

mit ξ^{α_j}, so erhält man

$$a_j \xi^{\alpha_j} = \sum_{i=1}^{n} o_i \xi^{\omega_i} \cdot \varrho_{ij} \xi^{\alpha_j - \omega_i}.$$

Da $a_j \xi^{\alpha_j}$ und $o_i \xi^{\omega_i}$ nach Voraussetzung je eine Modulbasis von $\mathfrak{o}_\infty/\Gamma_\infty$ bilden, ist die sie verbindende Transformation notwendig unimodular bez. Γ_∞, d. h.

$$\det(\varrho_{ij} \xi^{\alpha_j - \omega_i}) = \xi^{\Sigma \alpha_i - \Sigma \omega_i} \det(\varrho_{ij})$$

hat den Exponenten 0 bez. ∞. Setzt man also $\Delta = \det(\varrho_{ij})$, so ist

$$\Sigma \omega_i - \Sigma \alpha_i + \nu_\infty(\Delta) = \Sigma \omega_i - \Sigma \alpha_i - \text{Grad}_\xi \Delta = 0$$

und da nach § 3, Nr. 3 $\text{Grad}_\xi \Delta = \text{Grad } \mathfrak{a}$ ist, kommt wirklich

$$\Sigma \alpha_i = \Sigma \omega_i - \text{Grad } \mathfrak{a}.$$

3. Fastkomplementäre Normalbasen. Ist a_i eine Normalbasis von $K\,\mathsf{P}$ mit den Exponenten $\nu_\infty(a_i) = \alpha_i$, so bildet $u_i = a_i \xi^{\alpha_i}$ nach

Definition eine Modulbasis von $\mathfrak{o}_\infty/\Gamma_\infty$. Die Transformationsgleichung zwischen den a_i und u_i schreibe ich mit Hilfe der Matrix

$$X = \begin{pmatrix} \xi^{-\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \xi^{-\alpha_n} \end{pmatrix} \tag{13}$$

in der Form $(u_i) = (a_i) X^{\mathrm{I}}$ bzw. $(a_i) = (u_i) X$.

Satz 13. *Zu einer Normalbasis a_i von K/P mit den Exponenten $\nu_\infty(a_i) = \alpha_i$ erhält man in folgender Weise eine fastkomplementäre Normalbasis $\breve{a}_i$ von K/P: Man suche zu der Modulbasis $(u_i) = (a_i) X^{\mathrm{I}}$ des Hauptidealrings $\mathfrak{o}_\infty/\Gamma_\infty$ eine fastkomplementäre Modulbasis $\breve{u}_i$ auf und setze $(\breve{a}_i) = (\breve{u}_i) X^{\mathrm{K}}$.*

Für diese Basis a_i gilt $\nu_\infty(\breve{a}_i) = -\alpha_i$.

Daß zu der Modulbasis u_i des Hauptidealrings $\mathfrak{o}_\infty/\Gamma_\infty$ tatsächlich eine fastkomplementäre Basis $\breve{u}_i$ existiert, die wiederum Modulbasis von $\mathfrak{o}_\infty/\Gamma_\infty$ ist, entnimmt man aus Satz 5. Da zwischen a_i und u_i die Transformationsgleichung $(a_i) = (u_i) X$ besteht, ist $(\breve{a}_i) = (\breve{u}_i) X^{\mathrm{K}}$ nach Satz 2 jedenfalls fastkomplementär zu a_i. Es ist also nur noch zu zeigen, daß $\breve{a}_i$ ebenfalls eine Normalbasis darstellt, d. h. daß $\breve{a}_i \xi^{\nu_\infty(\breve{a}_i)}$ eine Modulbasis von $\mathfrak{o}_\infty/\Gamma_\infty$ ist.

Aus der Definition der Matrix X liest man ab, daß $\breve{a}_i = \breve{u}_i \xi^{\alpha_i}$ ist Für die Modulbasis $\breve{u}_i$ von $\mathfrak{o}_\infty/\Gamma_\infty$ ist notwendig $\nu_\infty(\breve{u}_i) = 0$, folglich

$$\nu_\infty(\breve{a}_i) = \nu_\infty(\breve{u}_i) - \alpha_i = -\alpha_i.$$

Es ist daher

$$\breve{a}_i \xi^{\nu_\infty(\breve{a}_i)} = \breve{a}_i \xi^{-\alpha_i} = \breve{u}_i,$$

d. h. $\breve{a}_i \xi^{\nu_\infty(\breve{a}_i)}$ bildet wirklich eine Modulbasis von $\mathfrak{o}_\infty/\Gamma_\infty$.

Damit ist Satz 13 vollständig bewiesen. Aus ihm fließt unmittelbar:

Folgerung: *Ist a_i eine Normalbasis von K/P mit den Exponenten $\nu_\infty(a_i) = \alpha_i$, also $(u_i) = (a_i) X^{\mathrm{I}}$ eine Modulbasis von $\mathfrak{o}_\infty/\Gamma_\infty$, so ist eine zu a_i fastkomplementäre Basis $\breve{a}_i$ sicher eine Normalbasis, wenn $(\breve{u}_i) = (\breve{a}_i) X^{\mathrm{IK}}$ eine Modulbasis von $\mathfrak{o}_\infty/\Gamma_\infty$ bildet. In diesem Fall ist $\nu_\infty(\breve{a}_i) = -\alpha_i$.*

4. Quasidifferente bez. ξ. Sei o_i eine Normalbasis von $\mathfrak{o}/\Gamma$ mit den Exponenten $\nu_\infty(o_i) = \omega_i$ und

$$X_0 = \begin{pmatrix} \xi^{-\omega_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \xi^{-\omega_n} \end{pmatrix},$$

so daß $(v_i) = (o_i) X_0^{\mathrm{I}}$ eine Modulbasis von $\mathfrak{o}_\infty/\Gamma_\infty$ darstellt. Zu o_i bestimme ich nach Satz 13 eine fastkomplementäre Normalbasis $\breve{o}_i$, indem ich zunächst zu v_i eine fastkomplementäre Modulbasis $\breve{v}_i$ von $\mathfrak{o}_\infty/\Gamma_\infty$ aufsuche und dann $(\breve{o}_i) = (\breve{v}_i) X^{\mathrm{K}}$ setze. $\breve{o}_i$ spannt nach Satz 4 über Γ ein Ideal

bez. $\mathfrak{o}$ auf. $\check{\mathfrak{e}}$ sei der Divisor, dessen Fastmultipla gerade dieses Ideal ausfüllen. Ich nenne $\mathfrak{d} = \check{\mathfrak{e}}^{-1}$ eine *Quasidifferente* von K bez. ξ.

Früher habe ich bereits gezeigt, daß das Ideal $\mathfrak{i}_{\check{\mathfrak{a}}}$ aller Fastmultipla von $\check{\mathfrak{a}} = \check{\mathfrak{e}}\,\mathfrak{a}^{-1}$ über Γ durch die Basis $\check{\mathfrak{a}}_i$ aufgespannt wird, die man aus einer Modulbasis

$$(a_i) = (o_i)\,S$$

von $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}/\Gamma$ durch den Ansatz

$$(\check{a}_i) = (\check{o}_i)\,S^{\mathrm{K}}$$

erhält. Jetzt füge ich hinzu:

Satz 14. *Ist a_i eine Normalbasis von $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}/\Gamma$, mit den Exponenten $\nu_\infty(a_i) = \alpha_i$, so ist $\check{a}_i$ ebenfalls eine Normalbasis von $\mathfrak{i}_{\check{\mathfrak{a}}}$, und es ist $\nu_\infty(\check{a}_i) = -\alpha_i$.*

Nach der Folgerung aus Satz 13 brauche ich nur nachzuweisen, daß $(\check{u}_i) = (\check{a}_i)\,X^{\mathrm{IK}}$ eine Modulbasis von $\mathfrak{o}_\infty/\Gamma_\infty$ ist, wo X durch (13) definiert wird.

Nun bilden aber

$$(v_i) = (o_i)\,X_0^{\mathrm{I}} \quad \text{und} \quad (u_i) = (a_i)\,X^{\mathrm{I}} = (o_i)\,S\,X^{\mathrm{I}}$$

gemäß der Voraussetzung über o_i und a_i je eine Modulbasis von $\mathfrak{o}_\infty/\Gamma_\infty$. Die Matrix $X_0\,S\,X^{\mathrm{I}}$, die v_i in u_i überführt, ist daher unimodular bez. Γ_∞ und dasselbe gilt mithin von der komplementären Matrix $(X_0\,S\,X^{\mathrm{I}})^{\mathrm{K}}$.

Andererseits liest man aus den Gleichungen

$$(\check{v}_i) = (\check{o}_i)\,X_0^{\mathrm{IK}} \quad \text{und} \quad (\check{u}_i) = (\check{a}_i)\,X^{\mathrm{IK}} = (\check{o}_i)\,S^{\mathrm{K}}\,X^{\mathrm{IK}}$$

ab, daß $\check{v}_i$ durch Multiplikation mit $(X_0\,S\,X^{\mathrm{I}})^{\mathrm{K}}$ in $\check{u}_i$ übergeht. Da $\check{v}_i$ nach der Wahl von $\check{o}_i$ eine Modulbasis von $\mathfrak{o}_\infty/\Gamma_\infty$ darstellt, ist also für $\check{u}_i$ tatsächlich das Gleiche der Fall.

§ 6.

Riemann-Rochscher Satz.

1. Formulierung des Satzes. Ich beweise nunmehr den Riemann-Rochschen Satz in folgender schon in § 1 angeführten Fassung:

Satz 15. *Für eine beliebige Divisorenklasse C von K gilt:*

$$\text{Dim } C = \text{Dim } \frac{H^*}{C} + \text{Grad } C + 1 - g. \tag{14}$$

Hierin ist

1. *g eine durch K eindeutig bestimmte nichtnegative ganze Zahl, und zwar ist g gekennzeichnet durch die Tatsache, daß für jede Klasse C von einem Grad $> 2g - 2$*

$$\text{Dim } C = \text{Grad } C + 1 - g$$

ist. g heißt das Geschlecht von K,

2. *H^* eine durch K eindeutig bestimmte Divisorenklasse; H^* hat den Grad $2g-2$ und die Dimension g und ist durch diese beiden Eigenschaften charakterisiert. H^* heißt die kanonische Klasse von K.*

2. Beweis von (14). Die Dimension von C ist nach § 3, Nr. 5 gleich dem Rang $(\mathfrak{m}_{\mathfrak{c}^{-1}} : k)$ des Moduls der Multipla von $\mathfrak{c}^{-1}$, wo $\mathfrak{c}$ ein beliebiger Divisor aus C ist. Nach dem Unabhängigkeitssatz kann ich insbesondere aus C einen Divisor $\mathfrak{c}$ so herausgreifen, daß $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{c}) = 0$ ist für die endlich vielen $\mathfrak{p}$, für die die festgewählte, nichtkonstante Funktion ξ einen negativen $\mathfrak{p}$-adischen Exponenten hat. Setze ich dann $\mathfrak{c}^{-1} = \mathfrak{a}$, so finde ich aus Satz 11

$$\text{(15)} \qquad \operatorname{Dim} C = (\alpha_1 + 1) + \ldots + (\alpha_m + 1).$$

Dabei bedeuten $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ diejenigen unter den Exponenten α_i einer Normalbasis a_i von $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}/\Gamma$, für die $\alpha_i + 1 > 0$, also $\alpha_i > -1$ ist, so daß $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$ gerade sämtlich $\leqq -1$ sind.

Neben C betrachte ich die Klasse $H^* = \frac{\mathfrak{d}}{\infty^2} H$, wo $\mathfrak{d} = \check{\mathfrak{e}}^{-1}$ eine nach § 5, Nr. 4 festgewählte Quasidifferente von K bez. ξ, ∞ der Nennerdivisor von ξ und H die Klasse der Hauptdivisoren ist. Die Dimension der Klasse $\frac{H^*}{C}$ stimmt überein mit dem Rang des Moduls aller Multipla von $\frac{\infty^2 \mathfrak{c}}{\mathfrak{d}} = \check{\mathfrak{e}}\,\mathfrak{a}^{-1}\infty^2$. Nach Satz 14 wird nun das Ideal $\mathfrak{i}_{\check{\mathfrak{a}}}$ aller Fastmultipla von $\check{\mathfrak{a}} = \check{\mathfrak{e}}\,\mathfrak{a}^{-1}$ über Γ durch eine Normalbasis $\check{a}_i$ mit den Exponenten $\nu_\infty(\check{a}_i) = -\alpha_i$ aufgespannt. Um den Rang des Moduls aller Multipla von $\check{\mathfrak{a}}\infty^2$ zu bestimmen, habe ich daher nach Satz 10 diejenigen α_i herauszugreifen, für die

$$-\alpha_i - 2 + 1 = -\alpha_i - 1 \geqq 0, \quad \text{also} \quad \alpha_i \leqq -1$$

ist, und das sind nach meiner Numerierung gerade $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$. Es ist mithin

$$\text{(16)} \qquad \operatorname{Dim} \frac{H^*}{C} = -[(\alpha_{m+1}) + \ldots + (\alpha_n + 1)].$$

Aus (15) und (16) ergibt sich zunächst

$$\operatorname{Dim} C - \operatorname{Dim} \frac{H^*}{C} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + n.$$

Zwischen der Exponentensumme $\sum \alpha_i$ und der Exponentensumme $\sum \omega_i$ einer festen Normalbasis von $\mathfrak{o}_\infty/\Gamma_\infty$ besteht aber nach Satz 12 die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = -\operatorname{Grad} \mathfrak{a} + \sum_{i=1}^{n} \omega_i = \operatorname{Grad} \mathfrak{c} + \sum_{i=1}^{n} \omega_i.$$

Setzt man daher noch

$$g = -\sum_{i=1}^{n} \omega_i - n + 1, \tag{17}$$

so hat man schließlich

$$\operatorname{Dim} C = \operatorname{Dim} \frac{H^*}{C} + \operatorname{Grad} C + 1 - g.$$

3. Kennzeichnung von g. Zum vollen Beweis von Satz 15 habe ich nun nur noch die Behauptungen über g und H^* zu bestätigen.

Daß g eine nichtnegative ganze Zahl ist, geht unmittelbar aus (17) hervor. Die Funktionen o aus $\mathfrak{o}$ haben nämlich, abgesehen von den Konstanten, sämtlich einen Exponenten $\nu_\infty(o) \leqq -1$. Da in einer Basis nicht mehr als eine Konstante vorkommen kann, ist also $-\sum \omega_i \geqq n-1$ und mithin $g \geqq 0$.

Nach der Formel (17) hängt g von ξ, nicht aber von C ab. Ebenso hängt die Klasse $H^* = \frac{\mathfrak{d}}{\infty^2} H$ nach ihrer Einführung von ξ, nicht aber von C ab. Wählt man nun für C eine Klasse, deren Grad größer als der Grad S von H^* ist, so hat $\frac{H^*}{C}$ einen negativen Grad und enthält daher sicher keinen ganzen Divisor, d. h. es ist $\operatorname{Dim} \frac{H^*}{C} = 0$. Das gibt für alle C mit $\operatorname{Grad} C > S$ die Gleichung

$$\operatorname{Dim} C = \operatorname{Grad} C + 1 - g. \tag{18}$$

g ist demnach auch von ξ unabhängig, also eine Invariante des Körpers K und kann durch (18) definiert werden.

4. Kennzeichnung von H^*. Für den Grad von H^* gilt

$$\operatorname{Grad} H^* = \operatorname{Grad} \frac{\mathfrak{d}}{\infty^2} = \operatorname{Grad} \frac{1}{\mathfrak{e}\,\infty^2} = -\operatorname{Grad} \mathfrak{e} - 2n.$$

Nach der Definition in § 5, Nr. 4 wird das Ideal $\mathfrak{i}_\mathfrak{e}$ über Γ durch eine Normalbasis $\mathfrak{o}_i$ mit den Exponenten $\nu_\infty(\mathfrak{o}_i) = -\omega_i$ aufgespannt, und nach Satz 12 ist daher

$$-\sum_{i=1}^{n} \omega_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i - \operatorname{Grad} \mathfrak{e},$$

d. h.

$$-\operatorname{Grad} \mathfrak{e} = -2\sum_{i=1}^{n} \omega_i.$$

Daraus folgt:

$$\operatorname{Grad} H^* = -\operatorname{Grad} \mathfrak{e} - 2n = -2\sum_{i=1}^{n} \omega_i - 2n = 2g - 2.$$

Für $C = H^*$ ergibt sich ferner aus (14) wegen $\frac{H^*}{H^*} = H$ und $\operatorname{Dim} H = 1$ die Gleichung

$$\operatorname{Dim} H^* = 1 + (2g-2) + 1 - g = g.$$

Versteht man schließlich unter C_{2g-2} eine von H^* verschiedene Klasse vom Grade $2g-2$, so daß $\frac{H^*}{C_{2g-2}} = C_0$ eine von H verschiedene Klasse vom Grad 0, also Dim $C_0 = 0$ ist, so findet man aus (14)

$$\text{Dim } C_{2g-2} = (2g-2) + 1 - g = g - 1.$$

H^* ist also wirklich die einzige Klasse vom Grade $2g-2$, deren Dimension gleich g ist. Damit ist Satz 15 vollständig bewiesen.

4. Ergänzungen. Aus dem Beweis des Satzes 15 entnimmt man noch:

Satz 16: *Das Geschleeht g von K läßt sich mit Hilfe einer beliebigen nichtkonstanten Funktion ξ aus K folgendermaßen berechnen: Ist o_i eine Normalbasis des Integritätsbereichs $\mathfrak{o}$ aller in ξ ganzen Funktionen, $v_\infty(o_i) = \omega_i$ und $(K : k(\xi)) = n$, so ist*

$$g = -\sum_{i=1}^{n} \omega_i - n + 1.$$

Das ist offenbar das Analogon der Riemannschen Geschlechtsformel.

Satz 17: *Die kanonische Klasse H^* von K läßt sich mit Hilfe einer beliebigen nichtkonstanten Funktion ξ aus K folgendermaßen bestimmen: Ist $\mathfrak{d}_\xi$ eine Quasidifferente von K bez. ξ und ∞_ξ der Nennerdivisor von ξ, so ist*

$$H^* = \frac{\mathfrak{d}_\xi}{\infty_\xi^{g}} H.$$

Die Divisoren $\frac{\mathfrak{d}_\xi}{\infty_\xi^{g}}$ und $\frac{\mathfrak{d}_\eta}{\infty_\eta^{g}}$, die mit Hilfe zweier beliebiger nichtkonstanter Funktionen ξ und η gebildet sind, liegen also stets in der gleichen Klasse. Das ist offenbar das Analogon eines bekannten Satzes über die Divisoren der Differentiale, der bei vollkommenem Konstantenkörper mit Hilfe der Differentiation bewiesen wird und die Grundlage für den üblichen Invarianzbeweis des Geschlechts bildet.

(Eingegangen am 1. März 1936.)

Eine Bemerkung zur vorstehenden Arbeit von F. K. Schmidt.

Von

Hans Reichardt in Jena.

Der Begriff der fastkomplementären Basis, den F. K. Schmidt in der vorstehenden Arbeit über algebraische Funktionenkörper eingeführt hat, läßt sich folgendermaßen auf allgemeinere Bereiche übertragen: R_1 sei ein Ring, der in bezug auf einen Ring R eine endliche Rechtsbasis besitzt, d. h. in dem es Elemente $b_1, \ldots, b_n$ gibt, so daß jedes Element a von R_1 sich als $a = \sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_\varkappa b_\varkappa$ mit $\alpha_\varkappa \subset R$ darstellen läßt und daß diese Darstellung eindeutig ist. Wenn nun eine R-Linksbasis $\check{b}_1, \ldots, \check{b}_n$ von R_1 existiert derart, daß für beliebiges $a \subset R_1$ zugleich mit

$$b_\varkappa a = \sum_{\lambda} \alpha_{\varkappa\lambda} b_\lambda \quad (\varkappa, \lambda = 1, \ldots, n; \quad \alpha_{\varkappa\lambda} \subset R)$$

die Gleichungen

$$a \check{b}_\lambda = \sum_{\varkappa} \check{b}_\varkappa \alpha_{\varkappa\lambda}$$

gelten, so soll die Basis $\check{b}_1, \ldots, \check{b}_n$ fastkomplementär zur Basis $b_1, \ldots, b_n$ heißen.

Über diese fastkomplementären Basen gilt folgender Satz, der vor allem für die Theorie der Relativ-Quasidifferenten halbeinfacher Algebren über algebraischen Funktionenkörpern von Bedeutung ist: *R_2 sei ein Ring mit einer R_1-Rechtsbasis $B_1, \ldots, B_m$. Zu den beiden Basen $b_1, \ldots, b_n$ und $B_1, \ldots, B_m$ möge je eine fastkomplementäre Basis $\check{b}_1, \ldots, \check{b}_n$ und $\check{B}_1, \ldots, \check{B}_m$ existieren. Dann bilden $b_\varkappa B_\varrho$ ($\varkappa = 1, \ldots, n$; $\varrho = 1, \ldots, m$) eine R-Rechtsbasis, und $\check{B}_\varrho \check{b}_\varkappa$ bilden eine dazu fastkomplementäre Basis.*

Beweis: Jedes Element A von R_2 läßt sich offenbar darstellen als $A = \sum_{\varkappa,\varrho} \beta_{\varkappa\varrho} b_\varkappa B_\varrho$ mit $\beta_{\varkappa\varrho} \subset R$. Dabei sind die $\beta_{\varkappa\varrho}$ eindeutig durch A bestimmt; denn wegen der Basiseigenschaft der B_ϱ ist $\sum_{\varkappa} \beta_{\varkappa\varrho} b_\varkappa$ für jedes ϱ eindeutig bestimmt, also wegen der Basiseigenschaft der $b_\varkappa$ auch $\beta_{\varkappa\varrho}$ selbst. $b_\varkappa B_\varrho$ ist also R-Rechtsbasis von R_2. Ebenso ist $\check{B}_\varrho \check{b}_\varkappa$ eine R-Linksbasis

von R_2. Ist nun

$$b_\varkappa B_\varrho A = \sum_\sigma b_\varkappa x_{\varrho\sigma} B_\sigma \quad \text{mit} \quad x_{\varrho\sigma} \subset R_1$$

$$= \sum_{\sigma,\lambda} \xi_{\varkappa\lambda}^{(\varrho\sigma)} b_\lambda B_\sigma \quad \text{mit} \quad \xi_{\varkappa\lambda}^{(\varrho\sigma)} \subset R,$$

so ist nach der Definition der fastkomplementären Basis

$$A \check{B}_\pi \check{b}_\lambda = \sum_\varrho \check{B}_\varrho x_{\varrho\sigma} \check{b}_\lambda$$

$$= \sum_{\varrho,\varkappa} \check{B}_\varrho \check{b}_\varkappa \xi_{\varkappa\lambda}^{(\varrho,\sigma)}.$$

Das heißt aber gerade, die Basis $\check{B}_\varrho \check{b}_\varkappa$ ist fastkomplementär zur Basis $b_\varkappa B_\varrho$.

Ist nun speziell R ein Körper K und ist K_1 eine endliche algebraische Erweiterung von K, so reduziert sich durch wiederholte Anwendung dieses Satzes der Nachweis der Existenz der fastkomplementären Basis auf den Fall, daß K_1 eine einfache Erweiterung von K ist. In diesem Falle ist nun, wie F. K. Schmidt bemerkte, die Existenz direkt zu sehen. Ist nämlich $K_1 = K(y)$ und ist y Nullstelle des irreduziblen Polynoms $x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_n$ über K, so bilden die Elemente

$$\begin{aligned}
\check{b}_1 &= \alpha_n y^{n-2} \\
\check{b}_2 &= \alpha_n y^{n-3} + \alpha_{n-1} y^{n-2} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\check{b}_{n-1} &= \alpha_n + \alpha_{n-1} y + \ldots\ldots + \alpha_2 y^{n-2} \\
\check{b}_n &= -y^{n-1}
\end{aligned}$$

eine fastkomplementäre Basis zu $b_\varkappa = y^{\varkappa-1}$, wie man mühelos verifiziert. *Ist also jetzt K_1 wieder eine beliebige endliche algebraische Erweiterung von K, so gibt es eine Basis von K_1/K, zu der eine fastkomplementäre existiert, und somit gibt es nach Satz 2 der vorstehenden Arbeit zu jeder Basis eine fastkomplementäre. — Daß die fastkomplementäre Basis bis auf einen Faktor aus K_1 eindeutig bestimmt ist*, sieht man leicht so: Ist

$$b_\varkappa b_\lambda = \sum_\mu \beta_{\varkappa\lambda\mu} b_\mu \quad \text{mit} \quad \beta_{\varkappa\lambda\mu} \subset K,$$

so ist

$$b_\lambda \check{b}_\mu = \sum_\varkappa \check{b}_\varkappa \beta_{\varkappa\lambda\mu}.$$

Fasse ich das als Gleichungssystem für die $\check{b}_\varkappa$ auf, so genügt es zu zeigen, daß es höchstens eine unabhängige Lösung gibt. Gäbe es zwei unabhängige Lösungen, so gäbe es auch eine Lösung $\check{b}'_1, \ldots, \check{b}'_n$, bei der ein $\check{b}'_\varkappa$, etwa

$\check{b}'_n = 0$ und ein anderes $\check{b}'_\varkappa$, etwa $\check{b}'_1 = 1$ wäre. Dann wäre aber für $\mu = 1$

$$b_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{n-1} \check{b}'_\varkappa \beta_{\varkappa\lambda 1},$$

und das ist ein Widerspruch.

Ich will nun noch zeigen, *daß zu jeder Basis einer halbeinfachen Algebra $\mathfrak{A}$ über einem Körper K stets eine fastkomplementäre existiert*[1]). Da Satz 2 der vorstehenden Arbeit auch hier gilt, genügt es wieder, eine spezielle Basis anzugeben, zu der es eine fastkomplementäre gibt. $\mathfrak{A}$ ist direkte Summe von einfachen Algebren $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m$. $b_1^{(\nu)}, \ldots, b_{n_\nu}^{(\nu)}$ sei eine Basis von $\mathfrak{A}_\nu$. Existiert dazu je eine fastkomplementäre $\check{b}_1^{(\nu)}, \ldots, \check{b}_{n_\nu}^{(\nu)}$, so ist offenbar $\check{b}_1^{(1)}, \ldots, \check{b}_{n_1}^{(1)}, \ldots, \check{b}_1^{(m)}, \ldots, \check{b}_{n_m}^{(m)}$ fastkomplementär zur Basis $b_1^{(1)}, \ldots, b_{n_1}^{(1)}, \ldots, b_1^{(m)}, \ldots, b_{n_m}^{(m)}$ von $\mathfrak{A}$. Es genügt also, die Behauptung für einfache Algebren zu beweisen. Ist speziell $\mathfrak{A}$ volle Matrixalgebra über K und bilden $\varepsilon_{\varkappa\lambda}$ die übliche Basis von $\mathfrak{A}$, so bilden $\breve{\varepsilon}_{\varkappa\lambda} = \varepsilon_{\lambda\varkappa}$ eine dazu fastkomplementäre, wie man ohne weiteres bestätigt. Da jede einfache Algebra direktes Produkt einer vollen Matrixalgebra mit einer Divisionsalgebra ist, genügt es daher nach dem zu Anfang bewiesenen Satz, die Behauptung nur noch für Divisionsalgebren über K zu beweisen. (Damit wird dann auch ein weiterer Beweis für die Existenz der fastkomplementären Basis bei endlichen algebraischen Erweiterungen von K geliefert sein.)

Es sei also jetzt $\mathfrak{A}$ Divisionsalgebra. Ist

$$b_\varkappa b_\lambda = \sum_\mu \beta_{\varkappa\lambda\mu} b_\mu \quad \text{mit} \quad \beta_{\varkappa\lambda\mu} \subset K,$$

und fasse ich die $b_\varkappa$ als Rechtsbasis auf, so wird dem Element $a = \sum_\varkappa \xi_\varkappa b_\varkappa$ die Darstellungsmatrix

$$P(a) = (\sum_\lambda \xi_\lambda \beta_{\varkappa\lambda\mu})_{\varkappa,\mu}$$

zugeordnet; nehme ich die $b_\varkappa$ als Linksbasis, so gehört zu a die Darstellungsmatrix

$$Q(a) = (\sum_\lambda \xi_\lambda \beta_{\lambda\mu\varkappa})_{\varkappa,\mu}.$$

Dabei ist $|P(a)| \neq 0$ und $|Q(a)| \neq 0$ für $a \neq 0$. Ich habe nun zu zeigen, daß diese beiden Darstellungen ähnlich sind. Ist $b = \sum_\varkappa \eta_\varkappa b_\varkappa$ mit $\eta_\varkappa \subset K$, so setze ich

$$R(b) = (\sum_\lambda \eta_\lambda \beta_{\varkappa\mu\lambda})_{\varkappa,\mu}.$$

---

[1]) Das ist offenbar gleichbedeutend damit, daß die beiden zu einer festen Basis gehörenden regulären Darstellungen ähnlich sind, und das ist schon bekannt (vgl. Deuring, Algebren, Ergebn. d. Math. 4_1, S. 30); ich möchte aber zeigen, daß dazu schon die Wedderburnschen Strukturs\"atze ausreichen.

Dann ist

$$P(a)\,R(b) = R(b)\,Q(a),$$

wie ohne weiteres aus den Relationen zwischen den $\beta_{\varkappa\lambda\mu}$ folgt, die sich aus der Assoziativität der Multiplikation in $\mathfrak{A}$ ergeben[2]). Es genügt daher zu zeigen, daß $R(b)$ nicht immer 0 ist. Ist $R(b) = 0$, so hat das Gleichungssystem $\sum_{\varkappa,\lambda} \zeta_\varkappa \eta_\lambda \beta_{\varkappa\mu\lambda} = 0$ eine nicht-triviale Lösung $\zeta_\varkappa$ in K. Fasse ich dies aber als Gleichungssystem für die η_λ auf, so ist seine Determinante $|\sum_\varkappa \zeta_\varkappa \beta_{\varkappa\mu\lambda}| = |Q(c)| \neq 0$ mit $c = \sum_\varkappa \zeta_\varkappa b_\varkappa$, also ist $\eta_\lambda = 0$, $b = 0$. Für $b \neq 0$ ist also $R(b) \neq 0$. — Damit ist die Behauptung über halbeinfache Algebren bewiesen.

---

[2]) Vgl. Frobenius, Theorie der hyperkomplexen Größen, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. (1903), S. 504–537.

(Eingegangen am 29. Mai 1936.)

Über die Erhaltung der Kettensätze der Idealtheorie bei beliebigen endlichen Körpererweiterungen.

Von

Friedrich Karl Schmidt in Jena.

1. Fragestellung. E. Noether[1]) hat bekanntlich die Gültigkeit der gewöhnlichen Idealtheorie auf das Bestehen einfacher idealtheoretischer Kettensätze zurückgeführt. Sie hat nämlich gezeigt: In einem Integritätsbereich $\mathfrak{o}$ ist dann und nur dann jedes (vom Null- und Einsideal verschiedene) Ideal gleich einem Potenzprodukt endlich vieler Primideale, wenn $\mathfrak{o}$ drei Postulaten genügt:

1. (Teilerkettensatz). Jede echte Teilerkette von Idealen aus $\mathfrak{o}$ bricht im Endlichen ab.

2. (Abgeschwächter Vielfachenkettensatz.) Jede echte Vielfachenkette von Idealen aus $\mathfrak{o}$, die sämtlich Teiler eines festen Ideals sind, bricht im Endlichen ab.

3. $\mathfrak{o}$ ist ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper k.

Von diesem Standpunkt aus erhebt sich offenbar die Frage, ob zugleich mit $\mathfrak{o}$ auch die Hauptordnung $\mathfrak{O}$ einer beliebigen endlichen algebraischen Erweiterung von k ebenfalls die Forderungen 1. bis 3. befriedigt. $\mathfrak{o}$ besitze also jetzt die Eigenschaften 1. bis 3., und $\mathfrak{O}$ bestehe aus allen von $\mathfrak{o}$ ganz algebraisch abhängigen Elementen einer endlichen algebraischen Erweiterung K von k. Dann ist 3. für $\mathfrak{O}$ sicherlich erfüllt. Es ist also nur noch zu entscheiden:

a) Gilt für die Ideale aus $\mathfrak{O}$ wiederum der Teilerketten- und der abgeschwächte Vielfachenkettensatz?

b) Gilt sogar für die $\mathfrak{o}$-Moduln aus $\mathfrak{O}$ wiederum der Teilerketten- und abgeschwächte Vielfachenkettensatz?

Das ist die Frage nach der Erhaltung der idealtheoretischen Kettensätze, wobei b) selbstverständlich a) umfaßt. Eine positive Antwort auf die erste Frage (schwacher Erhaltungssatz) besagt nach E. Noether bereits, daß in $\mathfrak{O}$ die gewöhnliche Idealtheorie herrscht. Eine bejaende Antwort auf die zweite Frage (starker Erhaltungssatz) ist gleichwertig

[1]) E. Noether, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, Math. Annalen 96 (1926), S. 16—61; vgl. auch van der Waerden, Moderne Algebra, Bd. II; Berlin 1931, S. 97.

mit der Existenz einer endlichen Modulbasis von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ und zieht daher für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{o}$ die bekannte Gradrelation nach sich, d. h. ist

$$\mathfrak{O}\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \dots \mathfrak{P}_g^{e_g}$$

die Primidealzerlegung von $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{O}$ und f_i der Relativgrad von $\mathfrak{P}_i$, so ist

$$\sum_{i=1}^{g} e_i f_i = (K:k). \tag{1}$$

Bekannt ist bisher folgendes.

Schon E. Noether hat nachgewiesen, daß im Falle einer separabeln Erweiterung K/k stets der starke Erhaltungssatz besteht. Dagegen laufen die Antworten, die im Falle einer inseparabeln Erweiterung auf die Fragen a) und b) gegeben worden sind, nicht mehr völlig parallel. Einerseits erkennt man bewertungstheoretisch mühelos, daß der schwache Erhaltungssatz ohne alle Einschränkung immer behauptet werden kann[2]), was neuerdings von H. Grell[3]) auch auf Dedekindscher Grundlage bestätigt wurde. Andererseits ist der starke Erhaltungssatz nach Artin und van der Waerden[4]) sicher richtig, wenn $\mathfrak{o}^{1/p}$ eine endliche Modulbasis über $\mathfrak{o}$ besitzt, wobei p die Charakteristik von $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}^{1/p}$ in üblicher Weise den Integritätsbereich aller p-ten Wurzeln aus Elementen von $\mathfrak{o}$ bedeutet. Bisher ist aber noch unbekannt, wie es mit dem starken Erhaltungssatz bestellt ist, wenn $\mathfrak{o}$ nicht der Artin-van der Waerdenschen Bedingung genügt.

2. Ergebnisse. In den folgenden Zeilen, zu deren Veröffentlichung ich durch die kürzlich erschienene Note von Grell angeregt wurde, möchte ich zunächst diese Lücke durch Angabe eines Gegenbeispiels schließen. Ich zeige nämlich:

I. *Es gibt einen Integritätsbereich* $\mathfrak{o}$, *der den Postulaten* 1. *bis* 3. *genügt und eine Hauptordnung* $\mathfrak{O}$ *über* $\mathfrak{o}$, *die keine endliche Modulbasis über* $\mathfrak{o}$ *besitzt.*

Dabei kann man $\mathfrak{o}$ *und* $\mathfrak{O}$ *noch so wählen, daß entweder für alle Primideale aus* $\mathfrak{o}$ *die Gradgleichung* (1) *gilt, oder daß für mindestens ein Primideal aus* $\mathfrak{o}$ *die Gradgleichung* (1) *nicht gilt.*

---

[2]) Das habe ich bereits in meinem Habilitationsvortrag (Erlangen 1927) auseinandergesetzt. Inzwischen sind die erforderlichen Schlüsse von A. Ostrowski in anderem Zusammenhang dargestellt worden; vgl. A. Ostrowski, Teilbarkeitstheorie in allgemeinen Körpern I. bis III., Math. Zeitschr. 39 (1934), S. 269—404, insbesondere S. 302 ff.

[3]) H. Grell, Über die Gültigkeit der gewöhnlichen Idealtheorie in endlichen algebraischen Erweiterungen erster und zweiter Art, Math. Zeitschr. 40 (1935), S. 503—505.

[4]) E. Artin und B. L. van der Waerden, Die Erhaltung der Kettensätze der Idealtheorie bei beliebigen endlichen Körpererweiterungen, Nachr. Ges. d. Wiss., Göttingen (1926), S. 23—27.

Ich werde diese Integritätsbereiche $\mathfrak{o}$ jedes Mal einem unendlichen algebraischen Funktionenkörper k in einer Unbestimmten entnehmen, während $\mathfrak{O}$ selbstverständlich einer endlichen inseparabeln Erweiterung von k entstammt.

Zum Schluß betrachte ich den praktisch wichtigen Fall, daß

$$\mathfrak{o} = C[x_1, \ldots, x_m]$$

der Integritätsbereich aller Polynome in m Unbestimmten mit Koeffizienten aus einem beliebigen Körper C ist. Selbstverständlich genügt der Integritätsbereich $\mathfrak{o}$ dann im allgemeinen nur den Postulaten 1. und 3., während er für $m > 1$ gegen 2. verstößt. Von diesem Fall eines Polynombereichs gehen auch Artin und van der Waerden in der Einleitung ihrer Arbeit aus. Ich setze aber im Gegensatz zu ihnen keineswegs voraus, daß $\mathfrak{o}$ die Artin-van der Waerdensche Bedingung erfüllt[5]). Vielmehr beweise ich allgemein:

II. *Die Hauptordnung $\mathfrak{O}$ aus einer beliebigen endlichen algebraischen Erweiterung des Körpers $k = C(x_1, \ldots, x_m)$ besitzt stets eine endliche Modulbasis über $\mathfrak{o}$.*

Ich gewinne diese Modulbasis mit Hilfe des Begriffs der Normalbasis, der aus der Theorie der algebraischen Funktionen in einer Unbestimmten bekannt ist, und den ich dort schon für die Bildung einer Modulbasis benutzt habe[6]).

3. Beweis von I. Für die in I. angeführten Integritätsbereiche $\mathfrak{o}$ gebe ich zunächst eine gemeinsame Konstruktion, die ich nachträglich so spezialisiere, daß die verschiedenen Aussagen des zweiten Teiles von I. herauskommen.

Ich gehe aus von einem rationalen Funktionenkörper

$$C(x)$$

in einer Unbestimmten x, dessen Konstantenkörper

$$C = \Gamma(t, t_1, \ldots, t_n, \ldots)$$

seinerseits aus einem beliebigen, unendlichen Körper Γ der Charakteristik p durch Adjunktion abgezählt vieler Unbestimmten entstanden sei. Über $C(x)$ bilde ich den unendlichen algebraischen Funktionenkörper

$$k = C(x, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$$

---

[5]) Für den Polynombereich $\mathfrak{o} = C[x_1, \ldots, x_m]$ ist die Artin-van der Waerdensche Bedingung gleichwertig damit, daß $(C : C^p)$ endlich ist.

[6]) F. K. Schmidt, Beweis des Riemann-Rochschen Satzes für algebraische Funktionen mit beliebigem Konstantenkörper, Math. Zeitschr. 41 (1936), S. 415—438.

wo die ξ_n den Gleichungen

$$(2)\qquad \begin{aligned} \xi_1^p + t &= t_1 (x + a_1)^p, \ a_1 \text{ aus } \Gamma \\ \xi_2^p + t_1 &= t_2 (x + a_2)^p, \ a_2 \text{ aus } \Gamma \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_n^p + t_{n-1} &= t_n (x + a_n)^p, \ a_n \text{ aus } \Gamma \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

genügen. Diesem Körper k werde ich den Integritätsbereich $\mathfrak{o}$ entnehmen, während die Hauptordnung $\mathfrak{O}$ dem Körper

$$K = k(\sqrt[p]{t})$$

entstammen wird.

Ich betrachte zunächst K und zeige:

a) *K ist vom Grade p über k, d. h. $\sqrt[p]{t}$ kommt in k noch nicht vor.*

Das folgt sofort daraus, daß man k aus Γ durch Adjunktion unabhängiger Transzendenter gewinnen kann, unter denen sich das Element t befindet. Nach Definition ist nämlich

$$k = \Gamma(t, t_1, \ldots, t_n, \ldots, x, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$$

und daher nach den Gleichungen (2)

$$k = \Gamma(t, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots, x),$$

wobei die Elemente $t, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots, x$ über Γ algebraisch unabhängig sind. $\sqrt[p]{t}$ kommt also wirklich in k noch nicht vor.

b) *K ist ein rationaler Funktionenkörper in x,*

$$K = C^*(x),$$

mit dem Konstantenkörper

$$C^* = \Gamma(\sqrt[p]{t}, \sqrt[p]{t_1}, \ldots, \sqrt[p]{t_n}, \ldots),$$

der offenbar ein algebraischer Oberkörper von C ist.

In der Tat, aus den Gleichungen (2) ergibt sich

$$\begin{aligned} \xi_1 + \sqrt[p]{t} &= \sqrt[p]{t_1}\,(x + a_1) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_n + \sqrt[p]{t_{n-1}} &= \sqrt[p]{t_n}\,(x + a_n) \end{aligned}$$

und hieraus liest man unmittelbar die Gleichung $K = C^*(x)$ ab.

Nunmehr definiere ich den Integritätsbereich $\mathfrak{o}$ und die Hauptordnung $\mathfrak{O}$. Zu diesem Zwecke betrachte ich die ganzzahligen Exponentenbewertungen $\nu_n(K)$, die durch die linearen Polynome $x + a_n$ in dem rationalen Funktionenkörper $K = C^*(x)$ erzeugt werden und bei denen

sämtliche Elemente des Konstantenkörpers C^* den Exponenten 0 haben. Dabei lasse ich durchaus zu, daß die Polynome $x + a_n$ alle oder teilweise übereinstimmen und die zugehörigen Bewertungen daher äquivalent sind. $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{O}$ bestehe aus allen Elementen von k bzw. K, die bei den sämtlichen Bewertungen ν_n einen nichtnegativen Exponenten haben.

Ich behaupte:

c) *In* $\mathfrak{o}$ *gilt die gewöhnliche Idealtheorie, d. h.* $\mathfrak{o}$ *genügt den Postulaten* 1. *bis* 3.

Da k ein Körper algebraischer Funktionen in einer Unbestimmten mit dem Konstantenkörper C ist und $\mathfrak{o}$ aus allen Elementen von k besteht, die bei einem System ganzzahliger Bewertungen von k/C einen nichtnegativen Exponenten besitzen, braucht man dazu lediglich nachzuweisen, daß jedes Element aus $\mathfrak{o}$ nur für endlich viele ν_n einen von 0 verschiedenen Exponenten hat. Diese Endlichkeitsaussage gilt nun aber sicher für die Elemente des rationalen Funktionenkörpers $K = C^*(x)$ und folglich auch für die Elemente des Integritätsbereichs $\mathfrak{o}$, der ja ganz in K enthalten ist.

d) $\mathfrak{O}$ *besteht aus lauter von* $\mathfrak{o}$ *ganz algebraisch abhängigen Elementen aus* K, *d. h.* $\mathfrak{O}$ *ist eine Hauptordnung über* $\mathfrak{o}$[7]).

Es ist zu zeigen, daß unter den Bewertungen von K, die zur Definition von $\mathfrak{O}$ verwendet werden, sämtliche Fortsetzungen derjenigen Bewertungen von k vorkommen, die zur Definition von $\mathfrak{o}$ dienen. Ich werde daher feststellen, daß die durch ν_n in k erzeugte Bewertung ihrerseits ν_n als einzige Fortsetzung auf K besitzt. Das erkennt man so: Bei der durch ν_n in k erzeugten Bewertung hat das Element $x + a_n$ von k den Exponenten 1 und jedes Element aus C den Exponenten 0. Diese beiden Eigenschaften müssen bei Fortsetzung der Bewertung auf K selbstverständlich erhalten bleiben. ν_n ist aber die einzige Bewertung von $K = C^*(x)$, die diese beiden Eigenschaften hat, weil mit den Elementen aus C notwendig auch die über C algebraischen Elemente aus C^* den Exponenten 0 haben. Damit ist d) bereits bestätigt.

e) $\mathfrak{O}$ *besitzt keine endliche Modulbasis über* $\mathfrak{o}$.

Beweis indirekt. Setzt man $\sqrt[p]{t} = \tau$, so bilden $1, \tau, \ldots, \tau^{p-1}$ nach a) eine Körperbasis von K/k. Angenommen $\mathfrak{O}$ besitze eine endliche Modulbasis über $\mathfrak{o}$. Dann gibt es ein festes δ in $\mathfrak{o}$, so daß

$$\delta\mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{o} + \mathfrak{o}\tau + \ldots + \mathfrak{o}\tau^{p-1}$$

ist. In der eindeutig bestimmten Darstellung eines Elements Ω aus $\mathfrak{O}$ durch die Körperbasis $1, \tau, \ldots, \tau^{p-1}$ mit Koeffizienten aus k müssen also die Koeffizienten nach Multiplikation mit δ nach $\mathfrak{o}$ fallen. Das gilt

[7]) Beachte, daß $\mathfrak{O}$ gemäß seiner Definition sicher in K ganz abgeschlossen ist.

insbesondere für die Elemente $\Omega_n = \sqrt[p]{t_n}$, die zu C^* und damit zu $\mathfrak{O}$ gehören. Nach (2) ist aber

$$\sqrt[p]{t_1} = (x+a_1)^{-1}(\xi_1 + \sqrt[p]{t}) = (x+a_1)^{-1}(\omega_1 + \tau),\ \omega_1 \text{ aus } \mathfrak{o},$$
$$\sqrt[p]{t_2} = (x+a_2)^{-1}(\xi_2 + \sqrt[p]{t_1}) = (x+a_1)^{-1}(x+a_2)^{-1}(\omega_2 + \tau),\ \omega_2 \text{ aus } \mathfrak{o}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

allgemein

$$\sqrt[p]{t_n} = (x+a_n)^{-1}(\xi_n + \sqrt[p]{t_{n-1}} = (x+a_n)^{-1}\ldots(x+a_n)^{-1}(\omega_n + \tau),$$
$$\omega_n \text{ aus } \mathfrak{o}.$$

Damit also der Koeffizient von τ in der Darstellung von $\delta\sqrt[p]{t_n}$ nach $\mathfrak{o}$ fällt, muß δ für jedes n innerhalb $\mathfrak{o}$ durch

$$(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)$$

teilbar sein. Da die $x+a_n$ Nichteinheiten in $\mathfrak{o}$ sind, verstößt das gegen die schon festgestellte Gültigkeit des abgeschwächten Vielfachenkettensatzes in $\mathfrak{o}$.

Durch c), d) und e) ist der erste Teil von I. bereits hergeleitet.

Um auch den zweiten Teil von I. zu bestätigen, beachte ich, daß die verschiedenen Primideale $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{o}$ umkehrbar eindeutig den inäquivalenten Bewertungen von k entsprechen, mit deren Hilfe $\mathfrak{o}$ definiert worden ist. Ebenso entsprechen die verschiedenen Primideale $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{O}$ umkehrbar eindeutig den inäquivalenten Bewertungen von K, mit deren Hilfe $\mathfrak{O}$ erklärt wurde. Ich bezeichne mit $\mathfrak{p}_n$ das Primideal von $\mathfrak{o}$, das zu der durch v_n erzeugten Bewertung von k gehört und mit $\mathfrak{P}_n$ das zu v_n gehörige Primideal von $\mathfrak{O}$. Dann ist

$$\mathfrak{O}\mathfrak{p}_n = \mathfrak{P}_n,$$

weil die durch v_n in k erzeugte Bewertung ihrerseits v_n als einzige Fortsetzung auf K gestattet, und weil das Element $x+a_n$ von k bei v_n den Exponenten 1 besitzt. Die Gradgleichung (1) gilt also für $\mathfrak{p}_n$ dann und nur dann, wenn der Relativgrad von $\mathfrak{P}_n$ gleich p ist.

Ich wähle nun erstens die bisher willkürlichen a_n aus Γ alle untereinander verschieden, so daß die durch $x+a_n$ erzeugten Bewertungen alle inäquivalent sind. Der Körper

$$k = \Gamma(t, t_1, \ldots, t_n, \ldots, x, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$$

kann nach den Gleichungen (2) auch in der Form

$$k = \Gamma(\xi_1, \ldots, \xi_n, t_n, \xi_{n+1}, \ldots, x)$$

geschrieben werden, wo die Elemente $\xi_1, \ldots, \xi_n, t_n, \xi_{n+1}, \ldots, x$ über Γ algebraisch unabhängig sind. Es ist also $k = C'(x)$ mit

$$C' = \Gamma(\xi_1, \ldots, \xi_n, t_n, \xi_{n+1}, \ldots).$$

Da die a_n alle untereinander verschieden sind, sind die Elemente $\xi_1, \ldots, \xi_n, t_n, \xi_{n+1} \ldots$ nach (2) sogar mod $\mathfrak{p}_n$ über Γ algebraisch unabhängig. Die durch ν_n in k induzierte Bewertung stimmt daher überein mit der durch $x + a_n$ erzeugten Bewertung des rationalen Funktionenkörpers $k = C'(x)$, bei der alle Elemente von C' den Exponenten 0 haben. Andererseits haben bei der Bewertung ν_n von $K = C^*(x)$ alle Elemente des Konstantenkörpers C^* den Exponenten 0 und dabei enthält C^* das Element $\sqrt[p]{t_n}$, das über C' vom Grad p ist. $\mathfrak{P}_n$ besitzt daher wirklich den Relativgrad p. Bei der gegenwärtigen Spezialisierung ist die Gradgleichung (1) mithin für alle Primideale aus $\mathfrak{o}$ erfüllt.

Ich wähle zweitens alle a_n untereinander gleich, etwa alle $a_n = 0$. Dann sind die Bewertungen ν_n alle äquivalent. $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{O}$ enthalten deshalb je nur ein Primideal $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{P}$,

$$\mathfrak{O}\mathfrak{p} = \mathfrak{P}.$$

Wäre nun der Relativgrad von $\mathfrak{P}$ gleich p, so gäbe es p Elemente in $\mathfrak{O}$, die mod $\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{o}$ linear unabhängig wären. Diese Elemente bildeten notwendig eine Modulbasis von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$, weil $\mathfrak{O}$ ja nur das eine Primideal $\mathfrak{P}$ besitzt. Da wir schon wissen, daß keine Modulbasis von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ existiert, ist also der Relativgrad von $\mathfrak{P}$ sicher $< p$, d. h. die Gradgleichung (1) ist für $\mathfrak{p}$ bei der gegenwärtigen Spezialisierung nicht erfüllt[8]).

4. Beweis von II. Ich behandle zuerst den Fall eines Polynomringes $\mathfrak{o} = C[x]$ in einer Unbestimmten.

f) *Ist* $\mathfrak{o} = C[x]$, *so besitzt die Hauptordnung* $\mathfrak{O}$ *aus einer beliebigen endlichen algebraischen Erweiterung* K *des Körpers* $k = C(x)$ *stets eine endliche Modulbasis über* $\mathfrak{o}$.

Zum Beweis ordne ich jedem Element $A \neq 0$ aus K einen Exponenten $\nu_\infty(A)$ zu, indem ich aus k den Integritätsbereich $\mathfrak{o}_\infty$ aller Quotienten von Polynomen aus $C[x]$ herausgreife, bei denen Grad des Nenners $\geqq$ Grad des Zählers ist, und unter $\nu_\infty(A)$ die größte ganze Zahl $a\,(\geqq 0)$ verstehe, für die $x^a A$ von $\mathfrak{o}_\infty$ ganz algebraisch abhängt. Außerdem setze ich $\nu_\infty(0) =$ „unendlich". Der Exponent bezüglich ∞ besitzt dann die Eigenschaften:

1. Für jedes Element $\Omega \neq 0$ aus $\mathfrak{O}$ ist $\nu_\infty(\Omega) \leqq 0$; ist ϱ ein Element aus k, also Quotient zweier Polynome aus $C[x]$, so ist $\nu_\infty(\varrho)$ = Grad des Nennerpolynoms − Grad des Zählerpolynoms.

[8]) Auf die hiermit realisierte Möglichkeit, daß die Gradgleichung (1) für ein Primideal $\mathfrak{p}$ bei inseparabler Erweiterung nicht gilt, hat bereits A. Ostrowski (loc. cit. 2, S. 308) hingewiesen. Doch gibt Ostrowski keine Realisierung an. Daß diese Realisierung nicht trivial ist, geht aus der Artin-v. d. Waerdenschen Bedingung hervor, aus der man leicht schließt, daß man zur Realisierung notwendig unendlich viele Transzendente braucht.

2. $v_\infty(A + B) \geqq \text{Min}[v_\infty(A), v_\infty(B)]$.

3. Für ϱ aus k, A aus K ist $v_\infty(\varrho A) = v_\infty(\varrho) + v_\infty(A)$.

Ich denke mir nun n über k linear unabhängige Elemente Ω_i in $\mathfrak{O}$ folgendermaßen bestimmt: $\Omega_1 \neq 0$ ist unter allen von 0 verschiedenen Elementen aus $\mathfrak{O}$ eines von größtem Exponenten, bezüglich ∞; sind $\Omega_1, \ldots, \Omega_j$ schon gewählt, so ist Ω_{j+1} unter allen von $\Omega_1, \ldots, \Omega_j$ über k linear unabhängigen Elementen aus $\mathfrak{O}$ eines von größtem Exponenten bezüglich ∞.

Da $\mathfrak{O}$ sicher n über k linear unabhängige Elemente enthält, und da für die von 0 verschiedenen Elemente aus $\mathfrak{O}$ der Exponent bezüglich ∞ nach oben beschränkt ist, können die Elemente Ω_i aus $\mathfrak{O}$ jedenfalls in der angegebenen Weise ausgewählt werden. Von ihnen zeigt man nach bekanntem Muster, daß sie eine Modulbasis von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ bilden[9]).

Um nun II. allgemein, also für einen Polynombereich $[\mathfrak{o} = C[x_1, \ldots, x_m]$ in m Unbestimmten zu beweisen, gehe ich von einer Körperbasis B_i des Körpers K/k aus. Bekanntlich ist die Existenz einer Modulbasis von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ gleichbedeutend mit der Existenz eines festen Elements δ in $\mathfrak{o}$ von der Art, daß

$$\delta\mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{o}B_1 + \ldots + \mathfrak{o}B_n \tag{4}$$

ist. Ein solches Element δ werde ich bilden.

Dazu setze ich $\mathfrak{o}_i = C_i[x_i]$, wo der Koeffizientenkörper

$$C_i = C(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)$$

ist und verstehe unter $\mathfrak{O}_i$ alle von $\mathfrak{o}_i$ ganz algebraisch abhängigen Elemente aus K. Da $\mathfrak{O}_i/\mathfrak{o}_i$ nach f) eine endliche Modulbasis besitzt, gibt es in $\mathfrak{o}_i$ ein Element δ_i, so daß

$$\delta_i\mathfrak{O}_i \subseteq \mathfrak{o}_i B_1 + \ldots + \mathfrak{o}_i B_n \tag{5}$$

gilt. Dabei kann ich δ_i nicht nur als Polynom in x_i mit Koeffizienten aus C_i, sondern offenbar sogleich als Polynom in $x_1, \ldots, x_m$ mit Koeffizienten aus C, d. h. als Polynom aus $\mathfrak{o}$ voraussetzen. Das Element $\delta = \delta_1\,\delta_2 \ldots \delta_m$ liegt dann jedenfalls in $\mathfrak{o}$. Da ein beliebiges Element Ω von $\mathfrak{O}$ zu den sämtlichen $\mathfrak{O}_i$ gehört, sind die Koeffizienten α_i aus k, die in der eindeutig bestimmten, linearen Darstellung von $\delta\Omega$ durch die Basis B_i auftreten,

$$\delta\Omega = \alpha_1 B_1 + \ldots + \alpha_n B_n,$$

nach (5) Polynome in jedem x_i, also Polynome aus $\mathfrak{o}$. Für $\delta = \delta_1 \ldots \delta_m$ ist mithin tatsächlich (4) erfüllt.

[9]) Vgl. loc. cit. 6., § 4.

(Eingegangen am 8. März 1936)

Ein Beitrag zur Theorie der charakteristischen Invarianten *).

Von

Feodor Theilheimer in Berlin.

Der Gegenstand dieser Untersuchungen ist eine Aufgabe, die man kurz als Umkehrung des Invariantenproblems bezeichnen könnte. Dabei ist unter dem Invariantenproblem — im allgemeinsten Sinne — das folgende verstanden: Zu einer gegebenen Gruppe $\mathfrak{G}$ von linearen homogenen Substitutionen sind solche Funktionen [1]) gesucht, die sich bei Ausführung einer Substitution aus $\mathfrak{G}$ nicht ändern [2]). Die umgekehrte Aufgabe wäre, zu einer gegebenen Funktion F diejenigen linearen homogenen Substitutionen aufzusuchen, die F invariant lassen. Wir behandeln hier dieses Problem in einer weniger allgemeinen Form und gehen nicht von einer beliebigen Funktion aus, sondern von einer Funktion I, die Invariante einer gegebenen Gruppe $\mathfrak{G}$ ist und untersuchen, ob $\mathfrak{G}$ alle I invariant lassenden Substitutionen enthält; ist dies der Fall, so ist $\mathfrak{G}$ durch I eindeutig bestimmt; man nennt dann I eine charakteristische Invariante von $\mathfrak{G}$.

Die Gruppen, deren Invarianten wir hier untersuchen, sind aus der Formentheorie bekannt. Die Substitution, die die Koeffizienten A einer n-ären Form k-ten Grades $f(A, x)$ erfahren, wenn man auf die Veränderlichen x eine lineare homogene Transformation ausübt, wird als die durch die x-Transformation „induzierte" bezeichnet. Unter einer Invariante der Form $f(A, x)$ versteht man bekanntlich eine Funktion der A, die gegenüber induzierten Substitutionen invariant bleibt. Man bezeichnet daher eine Invariante $I(A)$ der Form $f(A, x)$ als eine charakteristische Invariante dieser Form, wenn es neben den induzierten Substitutionen keine weiteren linearen homogenen Substitutionen gibt, die $I(A)$ invariant lassen.

---

*) Diese Arbeit wurde von der Philosophischen Fakultät der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin als Dissertation genehmigt.

[1]) Unter Funktion bzw. Invariante ist hier stets eine ganze rationale homogene Funktion bzw. Invariante verstanden.

[2]) Abgesehen von einem Faktor, der nicht von den Veränderlichen der Funktion, sondern nur von der Substitution abhängt.

Für binäre Formen haben bereits die Herren Ostrowski und Schur[3]) gezeigt, daß — bis auf gewisse Ausnahmen[4]) — sämtliche Invarianten charakteristische Invarianten sind, nachdem vorher schon Herr Ostrowski dies für die Diskriminanten nachgewiesen hat[5]).

Hier sollen hinreichende Bedingungen dafür angegeben werden, daß eine Invariante einer n-ären Form eine charakteristische Invariante ist, und dann soll gezeigt werden, daß sämtliche Invarianten der ternären kubischen Form diesen Bedingungen genügen und somit charakteristische Invarianten sind.

I. Hinreichende Bedingungen für charakteristische Invarianten.

§ 1.

Wir gehen von einer n-ären Form k-ten Grades aus:

$$(1) \qquad f(A, x) = \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k} \frac{k!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} A_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Substituiert man

$$(2) \qquad x_\varkappa = \sum_{\lambda = 1}^{n} g_{\lambda \varkappa} \bar{x}_\lambda, \qquad \varkappa = 1, 2, \ldots, n$$

oder, wie wir kurz schreiben, $x = g'(\bar{x})$, wobei g' die Transponierte der Matrix $g = (g_{\varkappa\lambda})$ bedeutet[6]), dann wird $f(A, x)$ gleich einer Form $f(\bar{A}, \bar{x})$ in den neuen Veränderlichen $\bar{x}$ mit neuen Koeffizienten $\bar{A}$:

$$f(\bar{A}, \bar{x}) = \sum_{\beta_1 + \ldots + \beta_n = k} \frac{k!}{\beta_1! \ldots \beta_n!} \bar{A}_{\beta_1 \ldots \beta_n} \bar{x}_1^{\beta_n} \ldots \bar{x}_n^{\beta_n},$$

wobei die $\bar{A}_{\beta_1 \ldots \beta_n}$ aus den $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ durch die durch (2) induzierte Substitution hervorgegangen sind. Wir schreiben $\bar{A} = G(A)$ und dabei besteht bekanntlich zwischen g und G folgender Zusammenhang: Wendet man auf

---

[3]) „Über eine fundamentale Eigenschaft der Invarianten einer allgemeinen binären Form." Math. Zeitschr. 15 (1922) S. 81—105. Einen weiteren Beweis desselben Satzes lieferte Herr Ostrowski im Jahresbericht der D. M. V. 33 (1925), S. 174—184.

[4]) Ausnahmen bilden nur die Potenzen der quadratischen Invariante der Formen vom Grade k, für $k = 2m$ und $m > 1$.

[5]) „Über eine neue Eigenschaft der Diskriminanten und Resultanten binärer Formen." Math. Annalen 79, S. 360—387. Diese Arbeit enthält S. 385 einen weiteren Beweis des Frobeniusschen Satzes über die allgemeinsten linearen Transformationen, die eine allgemeine symmetrische Determinante in sich überführen, und daraus folgt dann, daß alle Invarianten einer quadratischen Form charakteristische Invarianten sind.

[6]) Die Determinanten der in dieser Arbeit vorkommenden Substitutionen werden als von Null verschieden vorausgesetzt.

Veränderliche $y_1, \ldots, y_n$ die Transformation $\bar{y} = g(y)$ an, so erfahren die Potenzprodukte k-ter Dimension $y_1^{\gamma_1} \ldots y_n^{\gamma_n}$, $(\gamma_1 + \ldots + \gamma_n = k)$, die Transformation G; man nennt daher G die k-te Potenztransformation von g. Durchläuft g die allgemeine projektive Gruppe, so durchläuft G eine Gruppe $\mathfrak{G}$, die vielfach als die Fundamentalgruppe der Form $f(A, x)$ bezeichnet wird. Eine Invariante der Form (1) ist somit eine Funktion $I(A)$, für die gilt

$$I(\bar{A}) = \text{const. } I(A), \tag{3}$$

wobei $\bar{A} = G(A)$ und $G \subset \mathfrak{G}$. Die Substitutionen P, die $I(A)$ invariant lassen, für die also (3) gilt, wenn $\bar{A} = P(A)$, bilden eine Gruppe $\mathfrak{P}$, da ja das Produkt aus zwei solchen Substitutionen auch diese Eigenschaft besitzt. Die Frage, ob $I(A)$ eine charakteristische Invariante ist oder nicht, ist nun gleichbedeutend mit der Frage, ob $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{P}$ übereinstimmt, oder ob $\mathfrak{G}$ eine echte Untergruppe von $\mathfrak{P}$ ist.

Die Relation (3), die eine Identität in den A darstellt, gilt auch dann, wenn wir den A gewisse Bedingungen auferlegen. Wir denken uns die A auf folgende Weise spezialisiert[7]): $a_1, \ldots, a_n$ seien n beliebige Veränderliche und die A seien so gewählt, daß

$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n}.$$

Koeffizienten A, die einer solchen Bedingung genügen, wollen wir kurz „spezialisierte" A nennen. Setzt man die a in $I(A)$ ein, so erhält man eine Funktion der a

$$I(A) = i(a_1, \ldots, a_n)$$

und nach (3)

$$I(\bar{A}) = \text{const. } i(a_1, \ldots, a_n).$$

Es ist aber keineswegs gesagt, daß die in der letzten Gleichung auftretenden $\bar{A}$ ebenfalls spezialisiert sind, daß es also Funktionen $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ der $a_1, \ldots, a_n$ gibt, so daß

$$\bar{A}_{\beta_1 \ldots \beta_n} = \bar{a}_1^{\beta_1} \ldots \bar{a}_n^{\beta_n}. \tag{4}$$

Es wird vielmehr später untersucht werden, wann spezialisierte A in spezialisierte $\bar{A}$ übergehen. Vorläufig werde folgender Satz bewiesen.

Satz I. *Führt eine Transformation P spezialisierte A in spezialisierte $\bar{A}$ über, dann gehört P zur Gruppe $\mathfrak{G}$.*

Beweis: Die $\bar{A}_{\beta_1 \ldots \beta_n}$, die Formen k-ten Grades in den $a_1, \ldots, a_n$ sind, müssen wegen des Nichtverschwindens der Determinante von P linear unabhängig sein in den A und damit auch in den a. Man setze

$$\bar{A}_{k-\nu, \nu, 0, \ldots, 0} = \Phi_\nu, \qquad (\nu = 0, \ldots, k)$$

---

[7]) Für den binären Fall wendet eine solche Spezialisierung bereits Herr Ostrowski an, a. a. O. [5]).

und da nach Voraussetzung die Beziehung (4) besteht, wird

$$\Phi_\nu = \bar{a}_1^{k-\nu}\, \bar{a}_2^{\nu}.$$

Hieraus folgt insbesondere

$$\frac{\bar{a}_2}{\bar{a}_1} = \frac{\Phi_{\nu+1}}{\Phi_\nu} = \frac{g}{h},$$

wo g und h ganze rationale Funktionen desselben Grades in den a sind, die keinen gemeinsamen irreduziblen Faktor besitzen. Also ist

$$\Phi_k\, h^k = \Phi_0\, g^k;$$

da h zu g teilerfremd ist, muß Φ_0 durch h^k teilbar sein, und da Φ_0 k-ten Grades in den a ist, kann der Grad von h höchstens 1 sein; wäre er gleich Null, so wäre auch g konstant und Φ_0 und Φ_k linear abhängig, was nicht eintreten darf. Folglich gilt $\bar{a}_1^k = \Phi_0 = \text{const.}\ h^k$ mit linearem homogenem h. Also ist auch $\bar{a}_1$ und analog $\bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ linear und homogen in den a, und diese Funktionen sind linear unabhängig, da sonst auch die $\bar{A}$ linear abhängig wären. Also ist P die k-te Potenztransformation derjenigen linearen homogenen Transformation, die a in $\bar{a}$ überführt und gehört somit zu $\mathfrak{G}$.

Aus Satz I folgt unmittelbar

Satz Ia. *Führt jede $I(A)$ invariant lassende Transformation spezialisierte A in spezialisierte $\bar{A}$ über, so ist $I(A)$ eine charakteristische Invariante.*

Satz Ia gestattet bereits die Untersuchung der Invariante

$$I(A) = A_0 A_2 - A_1^2$$

der binären quadratischen Form

$$f(A, x) = A_0 x^2 + 2 A_1 x y + A_2 y^2.$$

Für $A_0 = a_1^2$, $A_1 = a_1 a_2$, $A_2 = a_2^2$ wird $I(A) = 0$, also auch $I(\bar{A}) = 0$. Wählt man $\bar{a}_1$ und $\bar{a}_2$ so, daß $\bar{a}_1^2 = \bar{A}_0$ und $\bar{a}_1 \bar{a}_2 = \bar{A}_1$, dann folgt aus $\bar{A}_0 \bar{A}_2 - \bar{A}_1^2 = 0$, daß $\bar{A}_2 = \bar{a}_2^2$; die $\bar{A}$ sind also spezialisiert. $I(A)$ somit charakteristische Invariante[8]).

Bei Spezialisierung der A wird — wie weiter gezeigt wird — auch in allen anderen Fällen $I(A)$ verschwinden, aber aus der Gleichung $I(\bar{A}) = 0$ allein wird man — abgesehen vom eben behandelten Fall — noch nicht schließen können, daß die $\bar{A}$ spezialisiert sind. Es wird sich aber ergeben, daß bei Spezialisierung der A gewisse Ableitungen von $I(A)$ nach den A verschwinden, und damit lassen sich weitergehende Resultate erreichen.

---

[8]) Dieses Resultat ist bereits in den Ergebnissen der unter [3]) und [5]) zitierten Arbeiten inbegriffen.

§ 2.

Die Koeffizienten von (1) mögen nun mit fortlaufenden Indizes — etwa in lexikographischer Anordnung — versehen werden: $A_1, \ldots, A_N$. $I(A)$ sei vom Grade r[9]). Durch $(r-1)$-faches Anwenden des Aronholdschen Prozesses gewinnen wir aus $I(A)$ eine Simultaninvariante

$$(5) \qquad J(A, B, \ldots, H) = \sum_{\varkappa, \lambda, \ldots, \sigma}^{1 \ldots N} \frac{\partial^{r-1} I(A)}{\partial A_\varkappa \partial A_\lambda \ldots \partial A_\sigma} B_\varkappa \ldots H_\sigma$$

der Formen $f(A, x)$, $f(B, x)$, $\ldots$, $f(H, x)$, wo $f(B, x), \ldots, f(H, x)$ ebenso wie $f(A, x)$ n-äre Formen k-ten Grades sind, die statt

$$A_1, \ldots, A_N$$

als Koeffizienten

$$B_1, \ldots, B_N,$$
$$\ldots\ldots$$
$$H_1, \ldots, H_N$$

enthalten. Spezialisiert man neben den A auch die $B, \ldots, H$ durch Einführung von Größen

$$b_1, \ldots, b_n,$$
$$\ldots\ldots$$
$$h_1, \ldots, h_n,$$

so wird

$$J(A, B, \ldots, H) = j(a, b, \ldots, h)$$

eine Simultaninvariante der r Linearformen

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n,$$
$$b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$h_1 x_1 + \ldots + h_n x_n$$

und somit nach einem bekannten Hauptsatz der Invariantentheorie[10]) eine ganze rationale Funktion der Determinanten Δ_λ, die aus den Koeffizienten von je n Linearformen gebildet sind:

$$j(a, b, \ldots, h) = F(\Delta_1, \ldots, \Delta_l).$$

Sicher wird $j(a, b, \ldots, h) = 0$, wenn man darin alle Veränderlichenreihen einander gleichsetzt, also wenn $a_\nu = b_\nu = \ldots = h_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$; wäre $j(a, b, \ldots, h) \neq 0$ bei Gleichsetzen der q ersten Veränderlichenreihen, so enthielte $F(\Delta_1, \ldots, \Delta_l)$ mindestens ein Determinantenprodukt Q, in dem keine Determinante vorkommt, die zwei der gleichgesetzten Veränderlichenreihen enthält; da aber $j(a, b, \ldots, h)$ und ebenso Q in jeder der Veränderlichenreihen $a, b, \ldots, h$ vom Grade k ist, so müßten in Q

[9]) Wir nehmen $r > 1$ an, da für $n > 1$ stets $n \leqq r$ ist und der Fall $n = 1$ trivial ist.

[10]) Vgl. etwa Weitzenböck: Invariantentheorie (Groningen 1923), S. 18.

mindestens $q \cdot k$ Determinanten vorkommen. Der Gesamtgrad von $j(a, b, \ldots, h)$ ist $k \cdot r$, also müßte $q \cdot k \cdot n \leqq k \cdot r$ sein. Setzt man aber $\left[\frac{r}{n}\right] + 1$ oder mehr — etwa q_0 — Veränderlichenreihen einander gleich, dann wird

$$j(\underbrace{a, \ldots, a}_{q_0}, e, \ldots, h) = 0$$

und für spezialisierte $A, \ldots, H$ auch

$$J(\underbrace{A, \ldots, A}_{q_0}, E, \ldots, H) = 0$$

und aus (5) folgt durch mehrmaliges Anwenden der Eulerschen Formel für homogene Funktionen

$$\sum_{\mu, \ldots, \sigma}^{1 \ldots N} \frac{\partial^{r - q_0} I(A)}{\partial A_\mu \ldots \partial A_\sigma} E_\mu \ldots H_\sigma = 0.$$

Da auch die spezialisierten $E, \ldots, H$ linear unabhängig sind, folgt

Satz II. *Für spezialisierte A verschwinden alle partiellen Ableitungen von $I(A)$ nach den A bis zur Ordnung $r - 1 - \left[\frac{r}{n}\right]$.*

§ 3.

Von der linearen homogenen Transformation $A^* = M(A)$ sei bekannt, daß sie die Invariante $I(A)$ in eine Invariante $J(A)$ überführt: $I(A^*) = J(A)$. Die partiellen Ableitungen von $I(A^*)$ nach den A^* drücken sich linear aus durch die Ableitungen gleicher Ordnung von $J(A)$ nach den A, und da $J(A)$ ebenso wie $I(A)$ den Grad r hat, so verschwinden nach Satz II die Ableitungen von $J(A)$ nach den A und damit die von $I(A^*)$ nach den A^* bis zur Ordnung $r - 1 - \left[\frac{r}{n}\right]$. Genügen den Gleichungen

$$(6) \qquad \frac{\partial^\varrho I(A)}{\partial A_\varkappa \partial A_\lambda \ldots} = 0, \qquad \varrho = 0, 1, \ldots, r - 1 - \left[\frac{r}{n}\right]$$

nur spezialisierte A, so sind auch die A^* spezialisiert, die aus spezialisierten A durch M hervorgegangen sind[11]), und M gehört nach Satz I zur Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$; daß jede Transformation, die $I(A)$ wieder in eine Invariante überführt, zu $\mathfrak{G}$ gehört, ist aber hinreichend dafür, daß $I(A)$ eine charakteristische Invariante ist.

---

[11]) Da die A^* ganze rationale homogene, linear unabhängige Funktionen k-ten Grades der a sind, braucht man nur zu zeigen, daß Funktionen *dieser Art* von n Veränderlichen spezialisiert sein müssen, wenn sie (6) identisch erfüllen.

Satz III. *Eine Invariante $I(A)$ ist eine charakteristische Invariante, wenn die zugehörigen Gleichungen* (6) *nur von spezialisierten A erfüllt werden.*

Zusatz. *Sind sämtliche Lösungen von* (6) *spezialisiert und ist von einer linearen homogenen Transformation M nur bekannt, daß sie $I(A)$ in eine Invariante überführt, so gehört M zu $\mathfrak{G}$.*

§ 4.

Eine für die Behandlung konkreter Beispiele wichtige Erweiterung von Satz III gewinnt man, wenn man von der bekannten Tatsache Gebrauch macht, daß jeder irreduzible Faktor einer Invariante der Form (1) selbst eine Invariante von (1) ist, was man auf folgende Art beweisen kann:

$$I(A) = J_1^{\gamma_1}(A) \ \ldots \ J_m^{\gamma_m}(A)$$

sei eine Zerlegung von $I(A)$ in Potenzen von untereinander verschiedenen irreduziblen Faktoren. Eine Transformation $\bar{A} = G(A)$ aus der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ liefert

$$I(\bar{A}) = J_1^{\gamma_1}(\bar{A}) \ \ldots \ J_m^{\gamma_m}(\bar{A}) = \text{const}\, J_1^{\gamma_1}(A) \ \ldots \ J_m^{\gamma_m}(A),$$

und da $J_\mu(\bar{A})$ auch in den A irreduzibel ist, wird

$$J_1(\bar{A}) = c_1 J_{\alpha_1}(A), \ \ldots, \ J_m(\bar{A}) = c_m J_{\alpha_m}(A).$$

Die Transformation G^l läßt also, wenn $l = m!$ ist, jedes einzelne J_μ fest. Da die Gruppe aller linearen homogenen Transformationen in n Veränderlichen erzeugt wird von den Transformationen

$$\bar{x}_\nu = c \cdot x_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

und

$$\bar{x}_\varkappa = x_\varkappa + t_\lambda x_\lambda \qquad (\varkappa, \lambda = 1, \ldots, n),$$

so ist jede erzeugende Substitution als l-te Potenz — nämlich von $\bar{x}_\nu = c^{\frac{1}{l}} \cdot x_\nu$ bzw. von $\bar{x}_\nu = x_\varkappa + \frac{t_\lambda}{l} x_\lambda$ — darstellbar, und somit ist jede $\mathfrak{G}$ erzeugende Transformation die l-te Potenz eines Elements von $\mathfrak{G}$; also bleibt jedes J_μ bei jeder $\mathfrak{G}$ erzeugenden Transformation fest und ist daher Invariante von (1).

Läßt $A^* = P(A)\ I(A)$ invariant, so können dabei die irreduziblen Faktoren nur permutiert werden; da diese aber selbst Invarianten sind, so muß nach dem Zusatz zum Satz III P zu $\mathfrak{G}$ gehören, wenn für jeden irreduziblen Faktor die zugehörigen Gleichungen (6) nur spezialisierte Lösungen haben.

Satz IV. *Eine Invariante $I(A)$ ist eine charakteristische Invariante, wenn für jeden irreduziblen Faktor die zugehörigen Gleichungen* (6) *nur von spezialisierten A erfüllt werden.*

Handelt es sich also darum, für eine gegebene Form nachzuweisen, daß alle ihre Invarianten charakteristische sind, so genügt es, unsere Methode nur auf die irreduziblen Invarianten dieser Form anzuwenden.

II. Anwendung der hinreichenden Bedingungen auf die Invarianten der ternären kubischen Form.

§ 1.

Jetzt sollen die Invarianten der ternären kubischen Form

$$(7) \qquad f(A, x) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3} \frac{3!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!} A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3}$$

untersucht werden. (7) besitzt bekanntlich eine Invariante S vom Grade 4 und eine Invariante T vom Grade 6, und jede andere Invariante von (7) ist eine ganze rationale Funktion von S und T[12]). Da $I(A)$ homogen in den A sein muß, wird

$$I(A) = S^{\varkappa} T^{\lambda} \cdot \sum_{\mu=0}^{m} \varrho_\mu S^{3(m-\mu)} T^{2\mu}, \quad (\varrho_0 \neq 0,\ \varrho_m \neq 0)$$

wobei die ϱ_μ Konstanten sind. Die Summe läßt sich darstellen als Produkt von Funktionen der Gestalt $U_\nu = S^3 + c_\nu T^2$; die U_ν sind, falls $c_\nu \neq 0$, irreduzible Funktionen der A, da sonst jeder ihrer irreduziblen Faktoren selbst Invariante sein müßte. Nach Satz IV können wir uns auf die Untersuchung der Invarianten S, T und $U = S^3 + c\,T^2$ — mit $c \neq 0$ — beschränken.

Die Invarianten S und T sind in symbolischer Schreibweise:

$$S = (a\,b\,c)\,(a\,b\,d)\,(a\,c\,d)\,(b\,c\,d)$$
$$T = (a\,b\,c)\,(a\,b\,d)\,(a\,c\,e)\,(b\,c\,f)\,(d\,e\,f)^2.$$

Explizit ergeben sich sehr komplizierte Ausdrücke in den A; wir werden hier nur eine kleine Anzahl von Ableitungen von S und T heranziehen, ohne S und T selbst anzuschreiben. Wir ordnen (7) nach Potenzen von z und führen eine neue Bezeichnung der Koeffizienten ein:

$$\begin{aligned} f(A, x) = z^3\,&\alpha \\ &+ 3\,z^2(\beta_0 x + \beta_1 y) \\ &+ 3\,z(\gamma_0 x^2 + 2\,\gamma_1 x y + \gamma_2 y^2) \\ &+ \delta_0 x^3 + 3\,\delta_1 x^2 y + 3\,\delta_2 x y^2 + \delta_3 y^3. \end{aligned}$$

---

[12]) Ein Beweis hierfür findet sich bei Sylvester: Collected math. Papers, Vol. I, S. 599—608.

Dabei ist:

$$\begin{aligned} \alpha &= A_{003}; \\ \beta_\varkappa &= A_{1-\varkappa,\,\varkappa,\,2}, & \varkappa &= 0,\ 1; \\ \gamma_\lambda &= A_{2-\lambda,\,\lambda,\,1}, & \lambda &= 0,\ 1,\ 2; \\ \delta_\mu &= A_{3-\mu,\,\mu,\,0}, & \mu &= 0,\ 1,\ 2,\ 3 \end{aligned}$$

Eine Invariante $I(A)$ von $f(A, x)$ sei nach Potenzen von α angeordnet, etwa

$$I(A) = \sum_\nu \alpha^\nu \varphi_\nu(\beta, \gamma, \delta).$$

Wendet man auf die Veränderlichen von (7) eine Transformation an, die z nicht ändert, so bleibt auch α ungeändert, und daraus folgt, daß jedes $\varphi_\nu(\beta, \gamma, \delta)$ eine Simultaninvariante der binären Formen

$$\begin{aligned} &\beta_0 x + \beta_1 y, \\ &\gamma_0 x^2 + 2\gamma_1 xy + \gamma_2 y^2, \\ &\delta_0 x^3 + 3\delta_1 x^2 y + 3\delta_2 x y^2 + \delta_3 y^3 \end{aligned} \tag{8}$$

ist und zwar vom gleichen Gewicht wie $I(A)$ selbst. Eine zyklische Vertauschung der Veränderlichen von (7) ruft eine Permutation der Koeffizienten hervor, die in Zyklen geschrieben folgende Gestalt hat:

$$(\delta_3, \delta_0, \alpha)(\delta_2, \gamma_0, \beta_1)(\delta_1, \beta_0, \gamma_2)(\gamma_1). \tag{9}$$

Also bleibt $I(A)$ bei dieser Permutation ungeändert. Daraus folgt zunächst, daß α in $I(A)$ vorkommen muß; denn sonst könnte auch δ_0 und δ_3 nicht in $I(A)$ vorkommen. Da aber, falls α nicht auftreten würde, $I(A) = \varphi_0(\beta, \gamma, \delta)$ wäre, so müßte es als Simultaninvariante der Formen (8) den Cayley-Aronholdschen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} D\varphi &= \sum_{\mu=1}^{3} \mu \frac{\partial \varphi}{\partial \delta_\mu} \delta_{\mu-1} + \sum_{\mu=1}^{2} \mu \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_\mu} \gamma_{\mu-1} + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_1} \beta_0 = 0 \\ \Delta\varphi &= \sum_{\mu=0}^{2} (3-\mu) \frac{\partial \varphi}{\partial \delta_\mu} \delta_{\mu+1} + \sum_{\mu=0}^{1} (2-\mu) \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_\mu} \gamma_{\mu+1} + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_0} \beta_1 = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

genügen, und daraus folgt, daß auch δ_1 und δ_2 in $\varphi_0(\beta, \gamma, \delta)$ nicht auftreten können, wenn δ_0 und δ_3 nicht darin vorkommen. Wegen der Vertauschbarkeit (9) kämen dann auch $\gamma_0, \gamma_2, \beta_0, \beta_1$ nicht in φ_0 vor; $I(A)$ könnte dann nur noch von γ_1 allein abhängen, was wiederum mit den Cayley-Aronholdschen Differentialgleichungen (10) unvereinbar wäre. Also muß α in $I(A)$ vorkommen. Da die Invariante S vom Gewicht 4 und T vom Gewicht 6 ist, so kann δ_3 und gemäß (9) auch α in S höchstens in der 1. Potenz und in T höchstens in der 2. Potenz auftreten; also kommt α in S genau in der 1. Potenz und in T in der 1. oder 2. Potenz vor.

Wir können also setzen: $S = \alpha\,\varphi_1 + \varphi_0$. Dabei ist φ_1 eine Simultaninvariante der Formen (8) vom Gesamtgrad 3 und vom Gewicht 4; wir denken uns φ_1 als Summe von Simultaninvarianten geschrieben, die in den Koeffizienten einer jeden der drei Formen (8) homogen sind und bezeichnen den Einzelgrad eines solchen eigentlich homogenen Summanden in den β mit r_1, in den γ mit r_2, in den δ mit r_3. Dann bestehen folgende Bedingungen:

$$r_1 + r_2 + r_3 = 3,$$
$$r_1 + 2r_2 + 3r_3 = 8.$$

Hierfür gibt es nur eine Lösung:

$$r_1 = 0; \quad r_2 = 1; \quad r_3 = 2.$$

Also ist φ_1 eigentlich homogen; setzt man eine Funktion vom Grade 1 in den γ und vom Grade 2 in den δ und vom Gewichte 4 mit unbestimmten Koeffizienten an, so findet man mit Hilfe der Cayley-Aronholdschen Differentialgleichungen (10), daß es bis auf einen konstanten Faktor nur eine Invariante dieser Art gibt. Es ist

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \varphi_1 = k_1 \begin{vmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{vmatrix}, \qquad k_1 = \text{const} \neq 0.$$

Die Invariante T ist von der Gestalt: $T = \alpha^2\,\psi_2 + \alpha\,\psi_1 + \psi_0$, wobei noch nicht feststeht, ob nicht eine der Funktionen ψ_2 und ψ_1 identisch verschwindet. Ehe wir dies entscheiden, untersuchen wir, welche Funktionen für ψ_2 und ψ_1 überhaupt in Frage kommen. ψ_2 müßte vom Gesamtgrad 4 und vom Gewicht 6 sein. Für jeden eigentlich homogenen Bestandteil gilt also:

$$r_1 + r_2 + r_3 = 4;$$
$$r_1 + 2r_2 + 3r_3 = 12.$$

Einzige Lösung ist:

$$r_1 = r_2 = 0; \quad r_3 = 4.$$

Die Simultaninvariante ψ_1 müßte vom Gesamtgrad 5 und vom Gewicht 6 sein. Die Bedingungen:

$$r_1 + r_2 + r_3 = 5;$$
$$r_1 + 2r_2 + 3r_3 = 12,$$

denen jeder eigentlich homogene Bestandteil von ψ_1 genügen müßte, besitzen zwei Lösungen:

$$r_1 = 1; \quad r_2 = 1; \quad r_3 = 3$$

und

$$r_1 = 0; \quad r_2 = 3; \quad r_3 = 2.$$

Würde nun α in T nur in der 1. Potenz auftreten, so käme — da T die Permutation (9) zuläßt — δ_0 und δ_3 in ψ_1 und ψ_0 nur in der 1. Potenz vor. Eine einfache Folgerung aus (10) besagt, daß als Faktor der

höchsten vorkommenden Potenz von δ_μ weder $\delta_{\mu+1}$ noch $\delta_{\mu-1}$ auftreten kann. T dürfte demnach kein Potenzprodukt enthalten, in dem $\delta_0\delta_1$ oder $\delta_2\delta_3$ auftritt, und gemäß (9) auch keines mit $\alpha\beta_0$ oder $\alpha\beta_1$. Die Simultaninvariante mit $r_1 = 1$, $r_2 = 1$, $r_3 = 3$ könnte somit nicht Bestandteil von ψ_1 sein. Da aber α doch in T vorkommen muß, so müßte ψ_1 gleich einer Invariante mit $r_1 = 0$, $r_2 = 3$, $r_3 = 2$ sein, die aber kein Potenzprodukt mit $\delta_0^2, \delta_0\delta_1, \delta_2\delta_3, \delta_3^2$ enthalten dürfte. Eine Invariante, die alle diese Bedingungen erfüllt, gibt es aber nicht, wie man durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten mittels (10) nachweist. Die Annahme, daß α in T nur in der 1. Potenz auftritt, führte zum Widerspruch; also muß α in T vorkommen. Für ψ_2 erhielten wir $r_3 = 4$, und von dieser Art gibt es bis auf einen konstanten Faktor nur eine Invariante, die Diskriminante der binären kubischen Form. Also wird

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial\alpha^2} = \psi_2 = k_2(\delta_0^2\delta_3^2 - 6\,\delta_0\delta_1\delta_2\delta_3 - \delta_1^3\delta_3 + 2\,\delta_1^2\delta_2^2 - \delta_2^3\delta_0),$$
$$k_2 = \text{const} \neq 0.$$

Folglich enthält T das Potenzprodukt $\alpha^2\delta_0\delta_1\delta_2\delta_3$ und wegen (9) auch $\alpha\beta_0\gamma_0\delta_0\delta_3^2$ und $\alpha\beta_1\gamma_2\delta_0^2\delta_3$. Also muß eine Simultaninvariante mit $r_1 = 1$, $r_2 = 1$, $r_3 = 3$ in ψ_1 auftreten. Die Ableitung dieser Invariante nach β_1 nennen wir η; da die nicht berücksichtigten Glieder von ψ_1 sowie ψ_2 die Größe β_1 nicht enthalten, ist

$$\frac{\partial^2 T}{\partial\alpha\,\partial\beta_1} = \frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_1}.$$

Wir setzen

$$\psi_1 = \beta_1\eta + \psi^*,$$

also

$$T = \alpha^2\psi_2 + \alpha\beta_1\eta + \alpha\psi^* + \psi_0.$$

Für die weiteren Untersuchungen genügt es, nur η auszurechnen; mit Hilfe von (10) ergibt sich:

$$\eta = k_3(\gamma_0(\delta_0\delta_2\delta_3 - 2\,\delta_1^2\delta_3 + \delta_1\delta_2^2) + 2\,\gamma_1(\delta_0\delta_1\delta_3 - 2\,\delta_0\delta_2^2 + \delta_1^2\delta_2) + \gamma_2(-\delta_0^2\delta_3 + 3\,\delta_0\delta_1\delta_2 - 2\,\delta_1^3)), \quad k_3 = \text{const} \neq 0.$$

§ 2.

Ehe wir Satz IV auf die Invarianten S, T und U anwenden, schicken wir folgenden Hilfssatz voraus:

Hilfssatz. *Die Koeffizienten von* (7) *sind spezialisiert, wenn zwischen ihnen folgende Bedingungen bestehen:*

(a) $$\frac{A_{300}}{A_{210}} = \frac{A_{210}}{A_{120}} = \frac{A_{120}}{A_{030}},$$

(b) $$A_{201}A_{120} - 2\,A_{111}A_{210} + A_{300}A_{021} = 0.$$

Beweis. Wir setzen a_2 gleich einer der drei dritten Wurzeln von A_{030} und wählen a_1 so, daß

$$\frac{A_{120}}{A_{030}} = \frac{a_1}{a_2}$$

wird. Dann ist

$$A_{\varkappa, 3-\varkappa, 0} = a_1^{\varkappa} \cdot a_2^{3-\varkappa}, \qquad \varkappa = 0, 1, 2, 3 \tag{11}$$

und insbesondere

$$A_{300} = a_1^3.$$

Nun sei a_3 so gewählt, daß

$$\frac{A_{201}}{A_{300}} = \frac{a_3}{a_1}$$

wird, und da aus (a) wegen der Vertauschbarkeit (9) folgt, daß auch

$$\frac{A_{003}}{A_{102}} = \frac{A_{102}}{A_{201}} = \frac{A_{201}}{A_{300}}$$

ist, so wird

$$A_{3-\varkappa, 0, \varkappa} = a_1^{3-\varkappa} \cdot a_3^{\varkappa}, \qquad \varkappa = 0, 1, 2, 3 \tag{12}$$

und insbesondere

$$A_{003} = a_3^3.$$

Aus (a) folgt noch gemäß (9), daß auch

$$\frac{A_{030}}{A_{021}} = \frac{A_{021}}{A_{012}} = \frac{A_{012}}{A_{003}}$$

ist, und da $A_{030} = a_2^3$, $A_{003} = a_3^3$ ist, folgt, daß

$$\frac{A_{012}}{A_{003}} = \varepsilon \cdot \frac{a_2}{a_3}$$

gesetzt werden kann, wobei ε eine dritte Einheitswurzel ist. Somit wird

$$A_{0, \varkappa, 3-\varkappa} = \varepsilon^{\varkappa} a_2^{\varkappa} a_3^{3-\varkappa}. \tag{13}$$

Setzt man (11), (12), (13) in (b) ein, so wird

$$a_1^2 a_3 \cdot a_1 a_2^2 - 2 A_{111} \cdot a_1^2 a_2 + a_1^3 \cdot \varepsilon^2 \cdot a_2^2 a_3 = 0,$$

$$A_{111} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (1 + \varepsilon^2). \tag{14}$$

Die Permutation (9) auf (b) angewandt liefert

$$A_{012} A_{201} - 2 A_{111} A_{102} + A_{003} A_{210} = 0$$

und unter Berücksichtigung von (11), (12), (13)

$$\varepsilon \cdot a_2 a_3^2 \cdot a_1^2 a_3 - 2 A_{111} \cdot a_1 a_3^2 + a_3^3 \cdot a_1^2 a_2 = 0$$

$$A_{111} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \tfrac{1}{2} (\varepsilon + 1). \tag{15}$$

Vergleicht man (14) und (15), so folgt, daß die dritte Einheitswurzel ε nur $+1$ sein kann. Die A sind also spezialisiert.

§ 3.

Nun muß nur noch gezeigt werden, daß aus dem Nullsetzen der Ableitungen von S, T und U bis zur Ordnung $r-1-\left[\frac{r}{n}\right]$ die Bedingungen (a) und (b) folgen. Bei $S=\alpha\varphi_1+\varphi_0$ (vgl. S. 10), wo $r=4$ ist, können wir die Ableitungen bis zur Ordnung 2 gleich Null setzen; Bedingung (a) ist gleichbedeutend mit

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma_\nu}=0,\quad \nu=0,1,2.$$

Aus $\frac{\partial\varphi_1}{\partial\delta_0}=0$ folgt

$$\gamma_1\delta_3-\gamma_2\delta_2=0$$

und aus $\frac{\partial\varphi_1}{\partial\delta_3}=0$ folgt

$$\gamma_0\delta_1-\gamma_1\delta_0=0$$

und hieraus ergeben sich, wenn man (a) heranzieht, die beiden Gleichungen

$$\gamma_1\delta_1-\gamma_2\delta_0=0$$

und

$$\gamma_0\delta_2-\gamma_1\delta_1=0,$$

aus denen man (b) durch Subtraktion erhält.

Bei $T=\alpha^2\psi_2+\alpha\beta_1\eta+\alpha\psi^*+\psi_0$ (vgl. S. 11), wo $r=6$ ist, kann man die Ableitungen bis zur Ordnung $r-1-\left[\frac{r}{n}\right]=3$ gleich Null setzen. Da $\frac{\partial^3 T}{\partial\alpha\,\partial\beta_1}=\eta$, kann man alle ersten Ableitungen von η heranziehen. Da

$$\frac{\partial\eta}{\partial\gamma_0}=\frac{\partial\eta}{\partial\gamma_1}=0$$

und somit auch

$$\delta_0\frac{\partial\eta}{\partial\gamma_0}+\frac{1}{2}\delta_1\frac{\partial\eta}{\partial\gamma_1}=0,$$

folgt

$$(\delta_0\delta_2-\delta_1^2)(\delta_0\delta_3-\delta_1\delta_2)=0$$

und aus $\frac{\partial\eta}{\partial\gamma_2}=0$ folgt

$$2\delta_1(\delta_0\delta_2-\delta_1^2)-\delta_0(\delta_0\delta_3-\delta_1\delta_2)=0,$$

so daß die beiden Klammern verschwinden müssen, was mit (a) gleichbedeutend ist. Die Gleichung $\frac{\partial\eta}{\partial\delta_3}=0$ liefert

$$\gamma_0\delta_0\delta_2-2\gamma_0\delta_1^2+2\gamma_1\delta_0\delta_1-\gamma_2\delta_0^2=0$$

und bei Benutzung von (a) erhält man daraus (b):

$$\gamma_0\delta_2-2\gamma_1\delta_1+\gamma_2\delta_0=0.$$

Die Invariante

$$U = S^3 + c\,T^2 = (\alpha\,\varphi_1 + \varphi_0)^3 + c\,(\alpha^2\,\psi_2 + \alpha\,\beta_1\,\eta + \alpha\,\psi^* + \psi_0)^2$$
$$= \alpha^4 \cdot c\,\psi_2^2 + \alpha^3\,(\varphi_1^3 + 2\,c\,\beta_1\,\psi_2\,\eta + 2\,c\,\psi_2\,\psi^*) + \alpha^2\,(\ldots) + \ldots$$

ist vom Grade 12; man kann also hier die Ableitungen bis zur Ordnung $r - 1 - \left[\frac{r}{n}\right] = 7$ gleich Null setzen. Da $\frac{\partial^4 T}{\partial \alpha^4} = 24\,c\,\psi_2^2$, folgt, daß ψ_2 nebst seinen ersten Ableitungen gleich Null gesetzt werden darf; dagegen ist aber

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial\,\delta_3^2} = 2\,k_2\,\delta_0^2 \neq 0.$$

Berücksichtigt man diese Ergebnisse, wenn man $\frac{\partial^4 T}{\partial\,\alpha^3\,\partial\,\beta_1} = 12\,c\,\psi_2\,\eta$ noch zweimal nach δ_3 und dann noch einmal nach γ_ν oder δ_ν differenziert, so sieht man, daß alle ersten Ableitungen von η gleich Null gesetzt werden dürfen, und daraus haben wir bereits bei der Untersuchung von T geschlossen, daß (a) und (b) erfüllt sind.

Damit ist also gezeigt, daß die zu jedem irreduziblen Faktor einer Invariante der ternären kubischen Form gehörigen Gleichungen (6) nur durch spezialisierte A erfüllt werden. Aus Satz IV folgt also

Satz V. *Jede Invariante der ternären kubischen Form ist eine charakteristische Invariante.*

(Eingegangen am 10. März 1936.)

Integralgeometrie 13.

Zur Kinematik.

Von

Wilhelm Blaschke in Hamburg.

Ist $\mathfrak{K}$ ein Eikörper (= beschränkter konvexer Körper) im Euklidischen $\mathfrak{E}_3$ und $\mathfrak{K}_h$ ein Parallelkörper im Abstand $h > 0$, so ist, wie zuerst J. Steiner[1]) bemerkt hat, der Rauminhalt $V(h)$ von $\mathfrak{K}_h$ ein Polynom dritten Grades in h

$$V(h) = V + hO + h^2 M + h^3 \frac{4\pi}{3}. \tag{1}$$

Darin ist O die Oberfläche von $\mathfrak{K}$ und M die von Steiner eingeführte „Kantenkrümmung" oder — im regulären Fall — das Integral der mittleren Krümmung

$$M = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \cdot \text{Oberflächenelement} \tag{2}$$

für die Begrenzungsfläche von $\mathfrak{K}$.

L. A. Santaló hat eine Verallgemeinerung von Steiners Formel (1) gefunden[2]), indem er die „Anzahl" von Lagen eines starr beweglichen konvexen Körpers $\mathfrak{K}$ berechnet hat, die einen festen $\mathfrak{K}_0$ treffen. Er findet dafür

$$\int_{\mathfrak{K}_0 \mathfrak{K}_1 \neq 0} \dot{\mathfrak{K}}_1 = 8\pi^2 (V_0 + V_1) + 2\pi (M_0 O_1 + O_0 M_1). \tag{3}$$

Darin bedeutet $\dot{\mathfrak{K}}_1$ die von Poincaré eingeführte kinematische Dichte von $\mathfrak{K}_1$[2]) und $\mathfrak{K}_0 \mathfrak{K}_1$ den Durchschnitt von $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_1$.

Hier möchte ich eine Verallgemeinerung der Formel (3) von Santaló auf beliebig gestaltete Gebiete erbringen, von denen eines, nämlich $\mathfrak{G}_0$, fest und das andere $\mathfrak{G}_1$ starr beweglich gedacht wird. Neben den Funktionalen M, O und V tritt darin als viertes die von Gauß eingeführte Gesamtkrümmung C einer geschlossenen Fläche ein, nämlich

$$C = \int \text{Krümmungsmaß} \cdot \text{Flächenelement}. \tag{4}$$

---

[1]) J. Steiner, Über parallele Flächen, Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1840), S. 114—118 = Werke 2 (1882), S. 171—176.

[2]) L. A. Santaló, Integralgeometrie 5, Über das kinematische Maß im Raum, Actualités Scientifiques et Industrielles 357, Paris 1936. Über die kinematische Dichte vgl. auch W. Blaschke, Integralgeometrie 1, Ermittlung oder Dichten für lineare Unterräume im E_n, Actualités 252, (1935).

Bei Gauß heißt C *Curvatura Integra* (Fläche des sphärischen Bildes) und bei Steiner die *Eckenkrümmung*.

Für orientierbare geschlossene Flächen mit dem *Geschlecht* p gilt bekanntlich [3])

$$C = 4\pi(1-p). \tag{5}$$

Ist die Begrenzung des Gebiets „trianguliert", d. h. in Dreiecke aufgeteilt mit der Flächenzahl φ, der Kantenzahl $\varkappa$ und der Eckenzahl ε, so ist [3])

$$C = 2\pi(\varphi - \varkappa + \varepsilon). \tag{6}$$

Unsere Formel, die wir „*kinematische Hauptformel*" nennen wollen, lautet dann so

$$\boxed{\int C(\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{G}_1)\,\dot{\mathfrak{G}}_1 = 8\pi^2\{C_0 V_1 + M_0 O_1 + O_0 M_1 + V_0 C_1\}.} \tag{7}$$

Darin bedeutet $\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{G}_1$ den Durchschnitt von $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G}_1$ und $C(\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{G}_1)$ die Gesamtkrümmung der Begrenzungsfläche dieses Durchschnitts, $\dot{\mathfrak{G}}_1$ die kinematische Dichte von $\mathfrak{G}_1$. Die Integration ist über *alle* Lagen von $\mathfrak{G}_1$ zu erstrecken und es ist $C = 0$ zu setzen, wenn $\mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}_1$ sich nicht treffen. C_i, M_i, O_i, V_i sind Gesamtkrümmung = Eckenkrümmung = Curvatura Integra, Kantenkrümmung, Oberfläche und Rauminhalt von $\mathfrak{G}_i$. Im Laufe des folgenden Beweises, der an Verfahren erinnert, die in der kombinatorischen Topologie üblich sind, werden sich eine Reihe verwandter Integralformeln zu (7) herausstellen.

Auf diese Weise ergibt sich ein bemerkenswerter Zusammenhang zwischen den Differentialinvarianten aus Bewegungsgeometrie und der Topologie, ein Zusammenhang, für den die klassische Beziehung (5) das einfachste Beispiel bildet [4]).

Ich werde im folgenden, um nebensächlichen Schwierigkeiten aus dem Wege zu gehen, annehmen, daß die vorkommenden Linien und Flächen *Vielecke* mit endlich vielen geradlinigen Seiten und *Vielflache* aus endlich vielen Dreiecksflächen sein sollen, und zwar ohne mehrfache Punkte. Ein „Gebiet" wird dann beschränkt sein und von einer endlichen Anzahl von Vielflachen begrenzt werden, die miteinander keine Punkte gemein haben.

---

[3]) Vgl. etwa W. Blaschke, Differentialgeometrie I, Berlin 1930, S. 166 (82).

[4]) Eine vorläufige Mitteilung über die hier behandelten Gegenstände wurde der Accademia dei Lincei unter dem Titel: „Cinematica Integrale" in der Sitzung vom 5. 4. 1936 vorgelegt. Ein Überblick über die hier behandelten Integralsätze der Kinematik und verwandte Ergebnisse erscheint als Vortrag „Über Integralgeometrie" im Jahresbericht der Deutsch. Math. Ver. 1936. Dort auch ein Schriftenverzeichnis. Wenn $\mathfrak{G}_1$ Bewegungen in sich zuläßt, so ist für die Gültigkeit von (7) notwendig, daß die Lagen entsprechend mehrfach gezählt werden.

§ 1.

Komplexe.

Wir betrachten als Elemente oder Bausteine in unserem $\mathfrak{E}_3$ zunächst die folgenden: 1. *Punkte* (= *Ecken*), 2. *Strecken* (= *Kanten*), 3. *Dreiecke* (= *Seiten*) und 4. *Vierflache* (= *Zellen*). Jede Strecke ist geradlinig und hat zwei verschiedene Ecken. Jedes Dreieck — gemeint ist die Dreiecksfläche — hat drei Ecken, die nicht auf derselben Geraden liegen, und die sie verbindenden drei Kanten. Jedes Vierflach wird begrenzt von vier Ecken, die nicht in derselben Ebene liegen, sechs Kanten und vier Seiten. Der Rand wird zu jedem Element mit dazu gerechnet.

Aus diesen Elementen wollen wir nun „Komplexe" aufbauen.

1. Endlich viele verschiedene Punkte des $\mathfrak{E}_3$ bilden einen *Punktkomplex* oder *Eckenkomplex*.

2. Ein *Streckenkomplex* oder *Graf* besteht aus endlich vielen verschiedenen Strecken, von denen je zwei entweder keinen Punkt oder eine Ecke gemein haben. Die Kanten jedes regelmäßigen Körpers von Platon bilden einen Grafen. Ein Graf heißt *geschlossen*, wenn an jeder seiner Ecken genau zwei Kanten zusammenstoßen. Die Kanten eines (unebenen) Platonischen Körpers bilden keinen geschlossenen Grafen. Wir betrachten nur Grafen, die „*rein*" sind in dem Sinne, daß der Graf nur Ecken enthält, die Kanten des Grafen beranden.

3. Ein *Dreieckskomplex* oder *Seitenkomplex* besteht aus endlich vielen verschiedenen Dreiecken. Je zwei haben entweder keinen Punkt oder eine ganze Kante gemein. Eine Kante, die nur einem Komplexdreieck angehört, heißt *frei*. Die freien Kanten bilden den *Rand* des Komplexes. Wir setzen voraus, daß er ein *geschlossener* Graf ist. Die Seiten eines regelmäßigen Zwanzigflachs bilden einen Dreieckskomplex. Bemalen wir von den Seiten eines regelmäßigen Achtflachs vier derart, daß zwei bemalte keine Kante gemein haben, dann bilden diese bemalten Seiten keinen Dreieckskomplex, da sein Rand nicht geschlossen ist. Ein Dreieckskomplex heißt *geschlossen*, wenn an jeder seiner Kanten genau zwei seiner Dreiecke zusammenstoßen.

4. Die *Vierflachkomplexe* oder *Zellkomplexe* bestehen aus endlich vielen verschiedenen Vierflachen. Je zwei davon haben entweder keinen Punkt oder eine ganze Kante oder eine ganze Seite gemein. Eine Seite heißt *frei*, wenn sie nur einem Vierflach des Komplexes angehört. Die freien Seiten bilden den *Rand* des Komplexes. Der Rand wird als geschlossener Dreieckskomplex vorausgesetzt.

Wir setzen auch unsere Dreiecks- und Vierflachkomplexe als *rein* voraus, was bei den Vierflachkomplexen bedeutet: Der Komplex enthält

keine Ecken, Kanten und Seiten außer denen, die seine Vierflache beranden[5]).

Es ist zweckmäßig, sowohl bei Punkten, Strecken, Dreiecken und Vierflachen den Mengenfunktionen V, O, M und C folgende Werte zu erteilen:

(8)

	V	O	M	C
Punkt	0	0	0	4π
Strecke	0	0	πL	4π
Dreieck	0	$2F$	$\frac{\pi}{2} U$	4π
Vierflach	V	O	M	4π

Darin ist $L > 0$ die Länge der Strecke, $F > 0$ die Dreiecksfläche, $U > 0$ der Umfang des Dreiecks. Für Vierflache ist nach Steiner

$$M = \tfrac{1}{2} \sum_{\varkappa} \alpha\, l, \tag{9}$$

wenn l eine Kantenlänge bedeutet und α (mit $0 < \alpha < \pi$) den Winkel der äußeren Normalen an die Dreiecke, die in der betrachteten Kante zusammenstoßen. Die Summe ist über alle Kanten zu erstrecken.

Wir fordern nun: V, O, M, C sollen folgender Rechenregel genügen:

$$\Phi(\mathfrak{G}') + \Phi(\mathfrak{G}'') = \Phi(\mathfrak{G}' + \mathfrak{G}'') + \Phi(\mathfrak{G}' \cdot \mathfrak{G}''), \tag{10}$$

wenn $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}''$ etwa zwei Vierflache und $\mathfrak{G}' \cdot \mathfrak{G}''$ ihren Durchschnitt, also etwa ein Dreieck bedeutet. Dann folgt für unsere Komplexe folgendes:

1. Bei einem *Punktkomplex* ist:

$$V = O = M = 0, \quad C = 4\pi n, \tag{11}$$

wenn n die Punktzahl des Komplexes ist.

2. Bei einem *Grafen* ist

$$V = O = 0, \quad M = \pi L, \tag{12}$$

[5]) In der Topologie betrachtet man Komplexe von etwas verwickelterer Art (und meist ohne auf ihre Einbettung in den Raum Rücksicht zu nehmen). Man benutzt nämlich eine „Ausrichtung" oder „Orientierung" seiner Elemente und läßt auch mehrfache Bedeckungen zu. Vgl. H. Seifert und W. Threlfall, Lehrbuch der Topologie, Leipzig und Berlin bei B. G. Teubner 1935. Die Ausdehnung unserer Untersuchung auf die Komplexe der Topologie dürfte keine erheblichen Schwierigkeiten bereiten.

wenn L die Gesamtlänge des Grafen ist. Für C ergibt sich [6])

$$C = \sum_{\varepsilon} 2\pi(2 - \nu). \tag{13}$$

Diese Summe ist über alle Ecken des Grafen zu erstrecken, und ν bedeutet die Zahl der Kanten, die an den betrachteten Ecken zusammenstoßen. Für den Grafen, der aus den Kanten eines Würfels besteht, ist demnach $C = -16\pi$. Ein Graf, der keinen geschlossenen Grafen enthält und zusammenhängt, heißt ein *Baum*. Für einen Baum gilt

$$C = 4\pi. \tag{13 b}$$

Für jeden geschlossenen Grafen ist nach (13) wegen $\nu = 2$

$$C = 0. \tag{13 c}$$

3. Bei einem *Dreieckskomplex* ist $V = 0$, $O = 2F$, wenn F die Summe der Dreiecksflächen bedeutet. Ferner ist

$$M = \sum_{\varkappa} \frac{\pi}{2}(2 - \nu)\, l. \tag{14}$$

Dabei ist die Summe über alle Kanten zu erstrecken, l bedeutet die Kantenlänge und ν die Anzahl der Dreiecke, die diese Kante gemein haben. So ergibt sich $M = 0$ für alle geschlossenen Dreieckskomplexe. Allgemeiner: Wenn bei einem Komplex stets entweder $\nu = 2$ oder $= 1$ ist, so ergibt sich für M

$$M = \frac{\pi}{2} U, \tag{15}$$

wenn U der Umfang des Randes, d. h. die Summe der Kantenlängen der freien Kanten ist ($\nu = 1$). Für die Gesamtkrümmung ergibt sich

$$C = 4\pi(\varphi - \varkappa + \varepsilon), \tag{16}$$

wenn φ die Anzahl der Dreiecksflächen, $\varkappa$ die Kantenzahl und ε die Eckenzahl des Komplexes ist.

4. Bei Vierflachkomplexen ist V die Summe der (positiven) Zellinhalte. O ist die Summe der freien Dreiecksflächen des Komplexes, die nur einem Komplexvierflach angehören. Für die Kantenkrümmung ergibt sich die Formel von Steiner

$$M = \sum \tfrac{1}{2} \alpha' l'. \tag{17}$$

Dabei ist die Summe über alle „Außenkanten" zu erstrecken, d. h. die Kanten, die freie Komplexdreiecke beranden, also dem Rande des Komplexes an-

---

[6]) Nennt man λ die Anzahl der zusammenhängenden Teilgrafen, so ist $\mu = \varkappa - \varepsilon + \lambda$ die 1847 von G. Ch. v. Staudt und G. Kirchhoff eingeführte „*Zusammenhangszahl*". Es ist

$$C = 4\pi(1 - \mu).$$

Über Grafen vergleiche man das kürzlich erschienene Buch: D. König, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig 1936.

gehören. l' bedeutet die Kantenlänge und α' ($|\alpha'| < \pi$) den Winkel der äußeren Normalen der an der betrachteten Kante zusammenstoßenden freien Dreiecke. Dabei ist $\alpha > 0$ für „erhabene" und $\alpha < 0$ für „einspringende" Kanten zu nehmen. Für C erhalten wir

$$C = 2\pi(\varphi' - \varkappa' + \varepsilon'), \tag{18}$$

wenn φ', $\varkappa'$, ε' die Anzahlen der Flächen, Kanten und Ecken des Komplexes sind, die auf seiner Berandung liegen. Somit ist

$$C = \tfrac{1}{2}\bar{C}, \tag{19}$$

wenn $\bar{C}$ die Gesamtkrümmung des Dreieckskomplexes bedeutet, der unseren Vierflachkomplex berandet.

Stellen wir die letzten Ergebnisse noch in einer Tafel zusammen!

(20)

	V	O	M	C
Eckenkomplex	0	0	0	$4\pi n$
Kantenkomplex . . .	0	0	πL	$\Sigma\, 2\pi(2-\nu)$
Dreieckskomplex . . .	0	$2F$	$\sum_{\varkappa} \frac{\pi}{2}(2-\nu)\, l$	$4\pi(\varphi - \varkappa + \varepsilon)$
Zellkomplex	V	O	$\sum_{\varkappa'} \frac{1}{2}\alpha' l'$	$2\pi(\varphi' - \varkappa' + \varepsilon')$

Wir bemerken: V, O, M und C hängen bei einem Zellkomplex nur von seinem Rande ab.

§ 2.

Ein Graf mit einem Seitenkomplex [7]).

Wir behaupten nun: Unsere Hauptformel (7) ist richtig, wenn man darin für die $\mathfrak{G}_i$ beliebige Komplexe einsetzt. Beginnen wir mit dem Beweis für den Fall, daß $\mathfrak{G}_0$ ein Dreieckskomplex und $\mathfrak{G}_1$ ein Graf ist! Unter Benutzung der Tafel (20) erhält dann (7) die folgende Gestalt:

$$\boxed{\int n\, \dot{\mathfrak{G}}_1 = 4\pi^2 F_0 L_1.} \tag{21}$$

Darin ist $C(\mathfrak{G}_0\, \mathfrak{G}_1) = 4\pi n$ gesetzt. n ist also die Schnittpunktzahl $\mathfrak{G}_0\, \mathfrak{G}_1$ [8]). F_0 ist die Gesamtfläche von $\mathfrak{G}_0$ und L_1 die Gesamtlänge von $\mathfrak{G}_1$. Zum

[7]) Ich bitte, diesem Titel keine psychologische Deutung zu geben.

[8]) $\mathfrak{G}_0\, \mathfrak{G}_1$ ist nämlich im allgemeinen ein Eckenkomplex. Die Ausnahmen haben das Maß Null: $\int \dot{\mathfrak{G}}_1 = 0$.

Beweis genügt es, die Formel für den einfachsten Fall nachzurechnen, daß $\mathfrak{G}_0$ ein Dreieck und $\mathfrak{G}_1$ eine Strecke ist[2]). Baut man dann aus den Dreiecken einen Dreieckskomplex auf, so gilt wegen

$$\Sigma n^{(i)} = n, \quad \Sigma F_0^{(i)} = F \tag{22}$$

die Formel auch für den Fall, daß $\mathfrak{G}_0$ ein Dreieckskomplex und $\mathfrak{G}_1$ eine Strecke ist. Im zweiten Schritt dehnt man die Gültigkeit von (21) dann in derselben Weise auf den Fall aus, daß $\mathfrak{G}_1$ ein Graf ist. Damit ist (21) bewiesen.

Ist insbesondere $\mathfrak{G}_1$ eine sehr lange Strecke und $\mathfrak{g}_1$ die Dichte dieser Geraden, d. h. wenn s die Verschiebung längs der Geraden und τ die Drehung um die Gerade mißt[2]),

$$\dot{\mathfrak{G}}_1 = \dot{\mathfrak{g}}_1 \, \dot{s} \, \dot{\tau}, \tag{23}$$

so ergibt sich aus (21) durch Division durch $2\pi L_1$ und $L_1 \to \infty$

$$\int n \, \mathfrak{g}_1 = 2\pi F_0$$

für gerichtete und

$$\boxed{\int n \, \dot{\mathfrak{g}}_1 = \pi F_0} \tag{24}$$

für nicht gerichtete Geraden. Diese Formel (24) geht schon auf M. W. Crofton 1868 zurück. Die Fläche eines Seitenkomplexes ist also (abgesehen von einem Zahlenfaktor) gleich der „Anzahl" seiner Treffgeraden, jede mit der richtigen Vielfachheit gezählt.

§ 3.

Ein Graf mit einem Zellkomplex.

Es sei jetzt $\mathfrak{G}_0$ ein Zellkomplex und $\mathfrak{G}_1$ ein Graf. Der Durchschnitt $\mathfrak{G}_0 \, \mathfrak{G}_1$ ist im allgemeinen wieder ein Graf und aus (7) und (20) ergibt sich wegen $V_1 = O_1 = 0$

$$\boxed{\int C(\mathfrak{G}_0 \, \mathfrak{G}_1) \, \dot{\mathfrak{G}}_1 = 8\pi^2 (O_0 M_1 + V_0 C_1).} \tag{25}$$

Wir wollen diese Formel jetzt beweisen. Im einfachsten Fall, daß $\mathfrak{G}_0$ eine Zelle (also ein Vierflach) ist und $\mathfrak{G}_1$ eine Strecke, wird man die Behauptung (25) leicht nachprüfen[2]). Somit gilt für die Zellen $\mathfrak{G}_0^i$ von $\mathfrak{G}_0$ und die Kanten $\mathfrak{G}_1^k$ von $\mathfrak{G}_1$

$$\int C(\mathfrak{G}_0^i \, \mathfrak{G}_1^k) \, \dot{\mathfrak{G}}_1 = 8\pi^2 (O_0^i M_1^k + V_0^i C_1^k), \tag{26}$$

worin i, k keine Exponenten, sondern nur Unterscheidungsmarken bedeuten. Es sei nun $\overline{\mathfrak{G}}_0$ die Gesamtheit, welche aus den unfreien Begrenzungsdreiecken der Zellen von $\mathfrak{G}_0$ besteht, an denen je zwei Zellen von $\mathfrak{G}_0$ aneinanderschließen. $\overline{\mathfrak{G}}_0$ ist nach unserer Erklärung in § 1 im allgemeinen

kein Dreieckskomplex, da der Rand von $\overline{\mathfrak{G}}_0$ im allgemeinen kein geschlossener Graf sein wird. Nehmen wir aber zunächst an, $\overline{\mathfrak{G}}_0$ sei ein Dreieckskomplex! Dann ist nach (21)

$$\int C(\overline{\mathfrak{G}}_0 \mathfrak{G}_1^k)\, \mathfrak{G}_1 = 8\pi^2 \overline{O}_0 M_1^k \tag{27}$$

mit

$$C(\overline{\mathfrak{G}}_0 \mathfrak{G}_1^k) = 4\pi n, \quad \overline{O}_0 = 2\overline{F}_0, \quad M_1^k = \pi L_1. \tag{28}$$

Aus (26), (27) folgt wegen (10)

$$\begin{aligned} \int C(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_i^k)\, \dot{\mathfrak{G}}_1 &= \int \{[\sum_i C(\mathfrak{G}_0^i \mathfrak{G}_1^k)] - C(\overline{\mathfrak{G}}_0 \mathfrak{G}_1^k)\}\, \dot{\mathfrak{G}}_1 \\ &= 8\pi^2 \{[(\sum_i O_0^i) - \overline{O}_0] M_1^k + (\Sigma V_0^i) C_1^k\} \end{aligned} \tag{29}$$

und unter nochmaliger Benutzung von (10)

$$\int C(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1^k)\, \dot{\mathfrak{G}}_1 = 8\pi^2 \{O_0 M_1^k + V_0 C_1^k\}. \tag{30}$$

Wenn $\overline{\mathfrak{G}}_0$ kein Komplex ist, so kann man das Ergebnis (30) durch schrittweisen Aufbau von $\mathfrak{G}_0$ erreichen.

Es sei nun $\overline{\mathfrak{G}}_1$ der Eckenkomplex aus den unfreien Ecken von $\mathfrak{G}_1$, an denen mindestens zwei Kanten des Grafen $\mathfrak{G}_1$ zusammenstoßen. Dann ist

$$\int C(\mathfrak{G}_0 \overline{\mathfrak{G}}_1)\, \dot{\mathfrak{G}}_1 = 8\pi^2 V_0 \overline{C}_1. \tag{31}$$

Darin bedeutet $\overline{C}_1$ die Eckenzahl von $\overline{C}_1$ mal 4π und $C(\mathfrak{G}_0 \overline{\mathfrak{G}}_1)$ die Zahl der Ecken von $\overline{\mathfrak{G}}_1$ in $\mathfrak{G}_0$ mal 4π. (31) ist die Anwendung von (7) auf den einfachen Fall: Zellkomplex mit Punktkomplex. Nun ist wie vorhin

$$\begin{aligned} \int C(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1)\, \dot{\mathfrak{G}}_1 &= \int \{[\sum_k C(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1^k)] - C(\mathfrak{G}_0 \overline{\mathfrak{G}}_1)\}\, \dot{\mathfrak{G}}_1 \\ &= 8\pi^2 \{O_0 \sum_k M_1^k + V_0 [\sum_k C_1^k - \overline{C}_1]\} \\ &= 8\pi^2 \{O_0 M_1 + V_0 C_1\}, \end{aligned} \tag{32}$$

womit (25) bewiesen ist.

Betrachten wir jetzt einige *Sonderfälle* von (25)! Für einen *geschlossenen Grafen* $\mathfrak{G}_1$ haben wir nach (13 c) und (20)

$$\boxed{\int C(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1)\, \dot{\mathfrak{G}}_1 = 8\pi^2 O_0 L_1} \tag{33}$$

und, wenn $\mathfrak{G}_1$ ein *Baum* ist, nach (13 b)

$$\int C(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1)\, \dot{\mathfrak{G}}_1 = 8\pi^2 (O_0 L_1 + 4 V_0). \tag{34}$$

Ist n die Anzahl der Bäume $\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1$, so haben wir

$$C(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1) = 4\pi n \tag{35}$$

und somit ist

$$\boxed{\int n\, \dot{\mathfrak{G}}_1 = 2\pi^2 (O_0 L_1 + 4 V_0).} \tag{36}$$

§ 4.

Zwei Dreieckskomplexe.

Nehmen wir jetzt an, $\mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}_1$ seien Dreieckskomplexe! Dann ist $V_0 = V_1 = 0$ und der Durchschnitt $\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{G}_1$ ist im allgemeinen ein Graf. Dann nimmt für $O_i = 2F_i$ (7) die Gestalt an

$$\boxed{\int C(\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{G}_1)\,\dot{\mathfrak{G}}_1 = 16\pi^2\{M_0F_1 + F_0M_1\}.} \tag{37}$$

Man hat zum Beweise von (37) nur festzustellen, daß diese Formel im einfachsten Fall, nämlich, wenn $\mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}_1$ Dreiecke sind, stimmt[2]) und kann dann genau wie in § 3 ihre Allgemeingültigkeit auf die von (21) zurückführen.

Betrachten wir einige Sonderfälle von (37)! Es sei $\mathfrak{G}_0$ geschlossen, dann ist $M_0 = 0$ und nach (15)

$$\boxed{\int C(\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{G}_1)\,\dot{\mathfrak{G}}_1 = 16\pi^2 F_0M_1.} \tag{38}$$

Sind beide $\mathfrak{G}_i$ geschlossen, so finden wir

$$\int C(\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{G}_1)\,\dot{\mathfrak{G}}_0 = 0, \tag{39}$$

weil dann $\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{G}_1$ im allgemeinen ein geschlossener Graf ist.

Wenn die Anzahl ν der Dreiecke, die an einer Kante zusammenstoßen, bei $\mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}_1$ immer entweder $\nu = 1$ oder $\nu = 2$ ist und die Summe der Längen der Randseiten mit U bezeichnet wird, so ist nach (15) und (37)

$$\boxed{\int C(\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{G}_1)\,\dot{\mathfrak{G}}_1 = 8\pi^3\{U_0F_1 + F_0U_1\}.} \tag{40}$$

§ 5.

Ein Dreieckskomplex mit einem Zellkomplex.

Nehmen wir etwa $\mathfrak{G}_0$ als Zellkomplex und $\mathfrak{G}_1$ als Dreieckskomplex! Dann ist der Durchschnitt $\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{G}_1$ im allgemeinen ein Dreieckskomplex und die zu beweisende Formel erhalten wir aus (7) für $V_1 = 0$, nämlich

$$\boxed{\int C(\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{G}_1)\,\dot{\mathfrak{G}}_1 = 8\pi^2\{M_0O_1 + O_0M_1 + V_0C_1\}.} \tag{41}$$

Der Beweis gelingt wie in § 3 durch Unterteilung von $\mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}_1$ auf Grund von (37) und (25) und der Richtigkeit von (41) für den einfachsten Fall, daß $\mathfrak{G}_0$ eine Zelle und $\mathfrak{G}_1$ ein Dreieck ist[2]).

Betrachten wir den Sonderfall, daß $\mathfrak{G}_1$ ein Dreieck ist, $\mathfrak{R}_1$ sei sein Rand. Dann folgt aus (41) wegen (8)

$$\int C(\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{G}_1)\,\dot{\mathfrak{G}}_1 = 4\pi^2\{4M_0F_1 + \pi O_0U_1 + 8\pi V_0\}. \tag{42}$$

Dividieren wir durch F_1 und machen den Grenzübergang $F_1 \to \infty$, so folgt für die Schnitte von $\mathfrak{G}_0$ mit einer gerichteten Ebene $\mathfrak{E}_1$

$$\int C(\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{E}_1)\,\dot{\mathfrak{E}}_1 = 8\pi M_0 \tag{43}$$

und für ungerichtete Ebenen

$$\boxed{\int C(\mathfrak{G}_0\mathfrak{E}_1)\,\dot{\mathfrak{E}}_1 = 4\pi M_0.} \tag{44}$$

Ist insbesondere $\mathfrak{G}_0$ ein konvexes Vielflach, so ist für alle Treffebenen

$$C(\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{E}_1) = 4\pi \tag{45}$$

und daher nach (44) ihre „Anzahl“

$$\boxed{\int\limits_{\mathfrak{G}_0\mathfrak{E}_1 \neq 0} \dot{\mathfrak{E}}_1 = M_0,} \tag{46}$$

wie bekannt[2]).

§ 6.

Zwei Zellkomplexe.

Um jetzt den letzten Schritt zum Beweis von (7) zu tun, brauchen wir (7) nur für den Fall zu bestätigen, daß $\mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}_1$ beide nur aus einer Zelle bestehen[2]). Dann kann die Gültigkeit von (7) mit den Verfahren von § 3 auf die bereits bewiesene von (41) zurückgeführt werden. Damit ist der Beweis unserer Hauptformel (7) zu Ende geführt, indem wir folgende Stufenleiter durchlaufen haben: 1. Formel (31) für Zellkomplex-Punktkomplex. 2. Formel (21) für Dreieckskomplex-Graf. 3. Formel (25) für Zellkomplex-Graf. 4. Formel (37) für zwei Dreieckskomplexe. 5. Formel (41) für Zellkomplex-Dreieckskomplex.

§ 7.

Drei Zellkomplexe.

Es seien jetzt $\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ drei Zellkomplexe, von denen wir uns etwa $\mathfrak{G}_0$ fest und die beiden anderen unabhängig voneinander bewegt denken. Wir wollen nach einem Verfahren von Santaló[2]) das Integral berechnen:

$$J = \int C(\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{G}_1\,\mathfrak{G}_2)\,\dot{\mathfrak{G}}_1\,\dot{\mathfrak{G}}_2, \tag{47}$$

worin über alle Lagen von $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ zu integrieren ist und $\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{G}_1\,\mathfrak{G}_2$ den Durchschnitt bedeutet. Wir bemerken, daß sich mittels der sogenannten Umkehrinvarianz der kinematischen Dichte[2]) einsehen läßt, daß J in $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ symmetrisch ist.

Beginnen wir mit einigen Grenzfällen und nehmen wir erstens an $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}_2'$ sei ein Eckenkomplex, der nur aus einem einzigen *Punkt* besteht! Halten wir bei der Berechnung des zugehörigen Integrals J' zunächst $\mathfrak{G}_2'$ fest, so wird $C = 4\pi$, wenn der Punkt $\mathfrak{G}_2'$ in $\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{G}_1$ liegt, also finden wir

$$J' = 4\pi \int_{\mathfrak{G}_1\,\mathfrak{G}_2' \neq 0} \dot{\mathfrak{G}}_1 \int_{\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{G}_2'} \dot{\mathfrak{G}}_2' = 256\,\pi^5\,V_0 V_1. \tag{48}$$

Halten wir andererseits bei der Integration zuerst $\mathfrak{G}_1$ fest, so finden wir

$$J' = 4\pi \cdot 8\pi^2 \int V_{01}\,\dot{\mathfrak{G}}_1, \tag{49}$$

wenn V_{01} den Inhalt von $\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{G}_1$ bedeutet. Durch Vergleich folgt, wie schon Santaló gefunden hat[3]),

$$\boxed{\int V_{01}\,\dot{\mathfrak{G}}_1 = 8\pi^2\,V_0 V_1.} \tag{50}$$

Nehmen wir zweitens $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}_2''$ sei eine *Gerade*. Dann finden wir zunächst bei festem $\mathfrak{G}_2''$ nach (25)

$$\begin{aligned} \int C(\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{G}_1\,\mathfrak{G}_2'')\,\dot{\mathfrak{G}}_1 &= \int C(\mathfrak{G}_{02}\,\mathfrak{G}_1)\,\dot{\mathfrak{G}}_1 \\ &= 8\pi^2\,(C_{02}K_1 + M_{02}O_1). \end{aligned} \tag{51}$$

Darin ist

$$M_{02} = \pi L_{02}, \qquad C_{02} = 4\pi n_{02}, \tag{52}$$

wenn L_{02} die Gesamtlänge von $\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{G}_2''$ und n_{02} die Anzahl der Teilstrecken von $\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{G}_2''$ ist. Somit haben wir

$$J'' = 8\pi^2\,(\pi O_1 \int L_{02}\,\dot{\mathfrak{G}}_2'' + 4\pi V_1 \int n_{02}\,\dot{\mathfrak{G}}_2''). \tag{53}$$

Aus der geometrischen Deutung der Geradendichte $\mathfrak{G}_2''$ geht sofort hervor[2])

$$\int L_{02}\,\dot{\mathfrak{G}}_2'' = 2\pi V_0, \tag{54}$$

während nach (24)

$$\int n_{02}\,\dot{\mathfrak{G}}_2'' = \frac{\pi}{2} O_0 \tag{55}$$

ist. Somit folgt

$$J'' = 16\pi^4\,(V_0 O_1 + O_0 V_1). \tag{56}$$

Halten wir andererseits bei der Berechnung von J'' zunächst $\mathfrak{G}_1$ fest, so finden wir mittels (55)

$$J'' = \int C(\mathfrak{G}_{01}\,\mathfrak{G}_2'')\,\dot{\mathfrak{G}}_2''\,\dot{\mathfrak{G}}_1 = 2\pi^2 \int O_{01}\,\dot{\mathfrak{G}}_1. \tag{57}$$

Der Vergleich von (58) und (57) liefert somit

$$\boxed{\int O_{01}\,\dot{\mathfrak{G}}_1 = 8\pi^2\,(V_0 O_1 + O_0 V_1).} \tag{58}$$

Nehmen wir jetzt drittens $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}_2'''$ als eine *Ebene*. Dann finden wir zunächst bei fester Ebene nach (7)

$$\begin{aligned} J''' &= \int C\,(\mathfrak{G}_{02}\,\mathfrak{G}_1)\,\dot{\mathfrak{G}}_1\,\dot{\mathfrak{G}}_2''' \\ &= 8\pi^2\,(M_1 \int O_{02}\,\dot{\mathfrak{G}}_2''' + O_1 \int M_{02}\,\dot{\mathfrak{G}}_2''' + V_1 \int C_{02}\,\dot{\mathfrak{G}}_2'''). \end{aligned} \tag{59}$$

Darin ist nach der Bedeutung der Ebenendichte

$$\int O_{02}\,\dot{\mathfrak{G}}_2''' = 2\int F_{02}\,\dot{\mathfrak{G}}_2''' = 4\pi V_0 \tag{60}$$

und nach (44)

$$\int C_{02}\,\dot{\mathfrak{G}}_2''' = 4\pi M_0. \tag{61}$$

Es bleibt noch

$$H = \int M_{02}\,\dot{\mathfrak{G}}_2''' = \frac{\pi}{2}\int U_{02}\,\dot{\mathfrak{G}}_2''' \tag{62}$$

zu berechnen. Das gelingt am leichtesten, wenn man als Raumelement Ebene und Gerade in vereinigter Lage einführt. Man findet so[2])

$$\int U_{02}\,\dot{\mathfrak{G}}_2''' = \frac{\pi^2}{2} O_0. \tag{63}$$

Somit ergibt sich

$$J''' = 8\pi^2\left\{4\pi\,(V_0 M_1 + M_0 V_1) + \frac{\pi^3}{4}\,O_0 O_1\right\}. \tag{64}$$

Halten wir andererseits bei der Berechnung von J''' zuerst $\mathfrak{G}_1$ fest, so ist nach (44)

$$J''' = \int \mathfrak{G}_1\,\{C\,(\mathfrak{G}_{01}\,\mathfrak{G}_2''')\,\mathfrak{G}_2'''\} = \int 4\pi M_{01}\,\mathfrak{G}_1. \tag{65}$$

Somit finden wir aus (64), (65), wie ebenfalls Santaló bemerkt hat[2]),

$$\boxed{\int M_{01}\,\dot{\mathfrak{G}}_1 = 8\pi^2\left\{(V_0 M_1 + M_0 V_1) + \frac{\pi^2}{16}\,O_0 O_1\right\}.} \tag{66}$$

Kehren wir jetzt zum Integral (47) zurück! Wir halten bei der Integration zunächst $\mathfrak{G}_1$ fest und finden nach (7)

$$J = 8\pi^2 \int (V_{01} C_2 + O_{01} M_2 + M_{01} O_2 + C_{01} V_2)\,\mathfrak{G}_1. \tag{67}$$

Wenden wir darauf (50), (58), (66) und (7) an, so folgt als *Hauptergebnis für 3 Zellkomplexe*

$$\boxed{\begin{aligned} &\int C\,(\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{G}_1\,\mathfrak{G}_2)\,\dot{\mathfrak{G}}_1\,\dot{\mathfrak{G}}_2 = \\ &= 8\pi^2\left\{\begin{aligned} &8\pi^2\,(V_0 V_1 C_2 + V_0 C_1 V_2 + C_0 V_1 V_2) \\ &+ 8\pi^2\left(\begin{aligned} &V_0 O_1 M_2 + O_0 M_1 V_2 + M_0 V_1 O_2 \\ &+ V_0 M_1 O_2 + M_0 O_1 V_2 + O_0 V_1 M_2 \end{aligned}\right) + \frac{\pi^4}{2} O_0 O_1 O_2 \end{aligned}\right\}. \end{aligned}} \tag{68}$$

Nehmen wir darin $\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ alle als *Dreieckskomplexe*, so haben wir $V_i = 0$, $O_i = 2F_i$ und finden, wenn wir mit $C_{012} = 4\pi n_{012}$ setzen, worin n_{012} die Zahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{G}_1\,\mathfrak{G}_2$ bedeutet

$$\int n_{012}\,\dot{\mathfrak{G}}_1\,\dot{\mathfrak{G}}_2 = 8\pi^5 F_0 F_1 F_2. \tag{69}$$

Die Formel (68) läßt sich auch auf den Durchschnitt von n Komplexen verallgemeinern[2]).

Auf einen andern Beweis für unsere Hauptformel (7) denke ich zurückzukommen[9]).

§ 8.

Beweis der Hauptformel für die Bausteine.

In dem vorhin (§ § 1 bis 6) durchgeführten Beweis für unsere Hauptformel (7) haben wir die verwickelteren Fälle von Komplexen zurückführen können auf den einfacheren Fall, daß die in (7) auftretenden Komplexe nur „*Bausteine*" sind, aus denen wir unsere Komplexe aufbauen, daß also jedes $\mathfrak{G}_i$ entweder nur aus einem Punkt oder einer Kante oder einer Zelle besteht. Für diesen Fall hatten wir dann auf das Büchlein von Santaló[2]) und seine Formel (3) für Eikörper verwiesen. Da aber gerade dieser Beweis bei Santaló ein wenig verwickelt ist, wird es vielleicht zweckmäßig sein zu zeigen, daß man auch den Beweis für die Bausteine mit unserem in § § 1 bis 6 dargelegten Verfahren unabhängig von Santaló führen kann. Dabei will ich mich darauf beschränken, den Gedankengang des neuen Beweises anzugeben.

Wir nehmen zuerst an, die $\mathfrak{G}_i$ seien *Quader*, also Eikörper, die von drei Paaren paralleler Ebenen begrenzt werden. Betrachten wir zu jedem solchen Paar paralleler Ebenen eine weitere zu ihnen parallele Ebene, die ihren Abstand hälftet, so zerschneiden diese drei Halbierebenen den Quader $\mathfrak{G}_i$ in acht unter sich kongruente und zu $\mathfrak{G}_i$ im Verhältnis $\frac{1}{2}$ ähnliche Teilquader $\mathfrak{G}_i^k$; $k = 1, 2, \ldots, 8$. Nun folgt aus der Betrachtung der Dimension der auftretenden Größen, d. h. aus ihrem Verhalten bei Ähnlichkeitstransformationen:

$$\int C(\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{G}_1)\,\dot{\mathfrak{G}}_1 = 8\int C(\mathfrak{G}_0^1\,\mathfrak{G}_1^1)\,\dot{\mathfrak{G}}_1.$$

Andererseits kann man mittels der Betrachtung von § 6 eine andere Beziehung zwischen denselben beiden Integralen herleiten, wenn man

$$\int C(\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{G}_1)\,\dot{\mathfrak{G}}_1$$

---

[9]) Vgl. den unter [2]) genannten Vortrag und W. Blaschke, Un contributo alla Cinematica Integrale, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, 3. 5. 1936.

berechnen kann, worin $\mathfrak{G}_1$ einen Quader und $\mathfrak{P}_0$ ein Parallelogramm bedeutet. Damit wird die Bestätigung der Grundformel für zwei Quader zurückgeführt auf den Fall: Quader und Parallelogramm. Dies kann man durch die entsprechende Betrachtung auf die Fälle zurückführen: $\mathfrak{G}_0$ Quader, $\mathfrak{G}_1$ Kante; $\mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}_1$ Parallelogramme. Der erstere Fall erledigt sich leicht und der letztere kann auf den Endfall: $\mathfrak{G}_0$ Parallelogramm, $\mathfrak{G}_1$ Kante zurückgeführt werden. Dieser Endfall wird dann mittels der Definition der kinematischen Dichte durch Integration erledigt.

Damit ist dann für Quader und alles, was man aus Quadern zusammenbauen kann, die Hauptformel bewiesen. Für Zellen, also für Vierflache, muß dann der Beweis der Gültigkeit von (7) durch Annäherung mit einem Gebäude aus Quadern erbracht werden [10]).

Hamburg, Ostern 1936.

---

[10]) In der Euklidischen Ebene läßt sich der entsprechende Beweis einfacher durchführen. Vgl. die demnächst erscheinende zweite Auflage meiner „Vorlesungen über Integralgeometrie" erstes Heft, Leipzig und Berlin 1936, insbesondere § 18.

(Eingegangen am 11. April 1936.)

Über die Buschenveloppen von H. Brunn.

Von

Julius v. Sz. Nagy in Szeged (Ungarn).

1. Einleitung.

Unter einer *Kurve* verstehen wir im folgenden ein reelles, eindeutiges, stetiges und mit stetiger Tangente versehenes Kreisbild in der projektiven Ebene. Eine *Buschenveloppe* von H. Brunn ist eine im Endlichen liegende Kurve, die in jeder Richtung genau eine einfache Tangente besitzt.

Aus dieser Definition folgt, daß eine Buschenveloppe keine singuläre Tangente haben kann. Sie kann aber Rückkehrpunkte und Doppelpunkte haben. Eine Buschenveloppe mit r Rückkehrpunkten wird im folgenden mit B_r bezeichnet.

Eine Kurve, an die aus jedem Punkte der unendlichfernen Geraden g_∞ der Ebene je eine Tangente geht, ist eine Buschenveloppe, weil sie mit g_∞ keinen gemeinsamen Punkt haben kann. Hätte sie nämlich den Punkt P_∞ mit g_∞ gemeinsam, so wäre ihre Tangente im Punkte P_∞ mindestens zweimal zu rechnen.

H. Brunn hat die Buschenveloppen auf Grund ihrer analytischen Darstellung untersucht. Er hat aber einige Eigenschaften der Kurven B_r auch geometrisch bewiesen[1]).

Im Anschluß an die Theorie der konvexen Kurven haben auch C. Jordan und R. Fiedler[2]) einige Eigenschaften der Kurven B_r mit analytischen Methoden bestimmt. Ihre Ergebnisse haben einen anderen Charakter als die unsrigen. Auch in der Arbeit von F. Schilling[3]) über die Kurven konstanter Breite spielen die Kurven B_r eine wichtige Rolle. Diese Arbeiten scheinen die Arbeit von H. Brunn nicht zu kennen.

---

[1]) H. Brunn, Über Kurven ohne Wendepunkte, München 1889, S. 1—75, insbesondere S. 16—29.

[2]) C. Jordan und R. Fiedler, Contribution a l'étude des courbes convexes fermées et de certaines courbes qui s'y rattachent, Paris 1912, S. 1—74; Courbes Orbiformes, Archiv d. Math. und Phys. 21 (1913), S. 226—235; On a particular case of closed convex curves, The Tôhoku Math. Journ. 6 (1914), S. 44—52.

[3]) F. Schilling, Die Theorie und Konstruktion der Kurven konstanter Breite, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 63 (1914), S. 67—136, insb. S. 85—119.

Unter allgemeinen Bedingungen für eine konvexe Kurve sind die von ihren verschiedenen Durchmessern eingehüllten Kurven Buschenveloppen[4]).

Die r Rückkehrpunkte einer Kurve B_r teilen die Kurve in r Konvexbogen, die von H. Brunn als *Komponenten* der Kurve bezeichnet wurden. Die Kurven B_r sind also Elementarkurven im Sinne von C. Juel[5]). Auf Grund der Eigenschaften dieser Komponenten läßt sich die Maximalanzahl der Doppelpunkte der Kurven B_r mit r Rückkehrpunkten leicht bestimmen. Wir bestimmen in einfacher Weise auch die Minimalanzahl der Doppelpunkte der Kurven B_r. Die Bestimmung dieser Minimalanzahl ist in der Arbeit von Brunn ziemlich kompliziert. Als Vermutung kommt diese Minimalanzahl auch in der Arbeit von F. Schilling vor[6]).

Es gibt auch Zusammenhänge zwischen der Ordnung bzw. der Klasse und der Anzahl der Rückkehrpunkte der Kurven B_r. Dabei wird unter der *Ordnung* einer Kurve die Maximalanzahl von reellen Punkten verstanden, welche die Kurve mit einer Geraden gemeinsam hat. In ähnlicher Weise bedeutet die *Klasse* einer Kurve die Maximalanzahl der Tangenten, die aus einem Punkte der Ebene an die Kurve gezogen werden können. Die Relationen zwischen der Ordnung, der Klasse und der Anzahl der Rückkehrpunkte der Kurven B_r sind — unseres Wissens — in der Literatur zuerst von uns untersucht worden. Durch Einführung stetiger und gewisser unstetiger Deformationen der Kurven B_r stellen wir Kurven B_r mit verschiedenen vorgeschriebenen Eigenschaften her.

Unsere Betrachtungen lassen sich auch auf den Fall übertragen, wo an Stelle einiger Rückkehrpunkte der Kurven B_r Ecken treten. Wir gehen aber auf diese Verallgemeinerung nicht näher ein.

2. Über die Komponenten der Buschenveloppen und über ihre Totalkrümmungen.

Ein von zwei Rückkehrpunkten begrenzter Bogen einer Buschenveloppe B_r, der selbst keinen Rückkehrpunkt enthält, ist eine Komponente der Kurve. Eine Kurve B_r besteht also aus r Komponenten.

Die *Totalkrümmung* einer Kurve bzw. eines Bogens der Kurve bedeutet den Winkel, um welchen die Tangente der Kurve bzw. des Bogens sich

---

[4]) K. Zindler, Über konvexe Gebilde, II. Teil, Monatshefte für Math. u. Phys. **31** (1921), S. 25—57.

[5]) C. Juel, Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung, Danske Vidensk. Selks. Skrifter, 7. R., Naturvidensk. og Math. Afd. XI. 2 (1914), S. 113—167.

[6]) Brunn, a. a. O., S. 21; Schilling, a. a. O., S. 103.

dreht, während die Kurve bzw. der Bogen von einem Punkte im selben Sinne durchlaufen wird.

Jede Buschenveloppe liegt im Endlichen und hat in jeder Richtung nur eine Tangente. Sie hat keine Wende- oder Doppeltangente. Daraus folgen die Sätze:

I. *Während eine Buschenveloppe von einem Punkte beschrieben wird, dreht sich ihre Tangente um den Winkel π. Die Totalkrümmung einer Buschenveloppe ist also π.*

II. *Das arithmetische Mittel der Totalkrümmungen der Komponenten der Buschenveloppe B_r ist $\frac{\pi}{r}$. Eine Buschenveloppe B_r kann also keine Komponente von der Totalkrümmung $\geqq \pi$ haben.*

Es gilt auch der Satz[7]):

III. *Die Komponenten jeder Buschenveloppe sind sämtlich Konvexbogen.*

Zum Beweis benutzen wir die charakteristische Eigenschaft der Konvexbogen, daß sie von jeder Geraden der Ebene in höchstens zwei Punkten getroffen werden.

Wir nehmen an, daß eine Komponente γ der Kurve B_r von der Geraden g in mehr als zwei Punkten getroffen wird. Sind $A, B, C, \ldots$ die auf γ aufeinanderfolgenden gemeinsamen Punkte der Geraden g mit γ, so haben die singularitätenfreien Bogen AB und BC von γ mindestens je eine zu g parallele Tangente. Dies ist aber unmöglich, weil die Kurve B_r in der Richtung von g nur eine einfache Tangente hat.

Aus dieser Unmöglichkeit folgt der Satz III.

Aus dem Beweise des Satzes III folgt, daß eine Komponente von B_r zu einer Geraden, von der sie in zwei Punkten getroffen wird, immer eine parallele Tangente hat.

Daraus folgen die Sätze[8]):

IV. *Von einer Geraden g kann nur eine einzige Komponente einer Buschenveloppe zweimal getroffen werden, und zwar jene, welche die zu g parallele Tangente besitzt. Die übrigen Komponenten werden von g höchstens einmal geschnitten.*

V. *Keine Komponente einer Buschenveloppe schneidet sich selbst. Zwei benachbarte Komponenten können einander nicht schneiden. Zwei nichtbenachbarte Komponenten können höchstens einen gemeinsamen Punkt haben.*

In den entgegengesetzten Fällen hätte nämlich die Buschenveloppe in einer Richtung zwei parallele Tangenten.

---

[7]) Brunn, a. a. O., S. 19; Schilling, a. a. O., S. 102.

[8]) Brunn, a. a. O., S. 19—20; Schilling, a. a. O., S. 102.

3. Die Maximalanzahl der Doppelpunkte der Buschenveloppen B_r. Über die Anzahl der Rückkehrpunkte der Buschenveloppen.

Es gilt folgender Satz[9]):

VI. *Eine Buschenveloppe B_r hat höchstens $\frac{r(r-3)}{2}$ Doppelpunkte. Es gibt für jede ungerade Zahl $r \geqq 3$ Buschenveloppen mit $\frac{r(r-3)}{2}$ Doppelpunkten.*

Der erste Teil des Satzes folgt einfach aus dem Satze V. Für den zweiten Teil des Satzes genügt es, Hypozykloiden als Beispiele heranzuziehen.

Rollt nämlich ein Kreis vom Halbmesser ϱ auf dem Rande eines festen Kreises vom Halbmesser $R = \frac{2r}{r-1}\varrho$ und zugleich innerhalb dieses Kreises, so zeichnet ein Punkt des Randes vom rollenden Kreise eine Buschenveloppe B_r mit $\frac{r(r-3)}{2}$ Doppelpunkten, wie man leicht einsehen kann.

Für die Anzahl der Rückkehrpunkte gilt der Satz[10])

VII. *Die Anzahl der Rückkehrpunkte der Buschenveloppen ist immer ungerade, und zwar mindestens drei.*

Aus einem unendlichfernen Punkte der Ebene gibt es nur eine Tangente an eine Buschenveloppe. Daraus folgt, daß die Klasse m einer Buschenveloppe B_r und damit auch die Anzahl r der Rückkehrpunkte ungerade ist. Die Klasse m einer Kurve, die aus endlichvielen Konvexbogen besteht, ist nämlich gerade bzw. ungerade, je nachdem die Anzahl r ihrer Rückkehrpunkte gerade bzw. ungerade ist[11]).

Aus dem Satze VI folgt, daß eine Buschenveloppe B_r im Falle $r \leqq 3$ keinen Doppelpunkt haben kann. In diesem Falle hat also eine Kurve B_r außer ihren Rückkehrpunkten keine andere Punkt- und Tangentensingularität. Eine Kurve von diesen Eigenschaften hat aber genau drei Rückkehrpunkte[12]). Damit ist der Satz VII bewiesen.

Die Rückkehrpunkte (Spitzen) der Kurven B_r sind alle von erster Art, weil die Tangenten der Rückkehrpunkte zweiter Art (Schnabelspitzen) Wendetangenten sind.

---

[9]) Brunn, a. a. O., S. 21; Schilling, a. a. O., S. 102.

[10]) Brunn, a. a. O., S. 13 und 17. Schilling, a. a. O., S. 94.

[11]) Juel, a. a. O., S. 127.

[12]) Julius v. Sz. Nagy, Einige Sätze über ebene Elementarkurven, Acta Lit. ac Scient. Szeged 5 (1931), S. 83—89.

4. Über die Ordnung und Klasse der Buschenveloppe B_r.

VIII. *Für die Ordnung n und für die Klasse m der Buschenveloppe B_r mit r Rückkehrpunkten besteht die Ungleichung*

$$m \leqq n - 1 \leqq r.$$

Die Ungleichung $n - 1 \leqq r$ folgt direkt aus dem Satze IV. Die Ungleichung $m \leqq n - 1$ läßt sich auf folgende Weise einsehen:

Die Ebene wird von einer Buschenveloppe B_r in gewisse Gebiete geteilt. Aus jedem Punkte eines Gebietes geht dieselbe Anzahl der Tangenten an B_r.

Bewegt sich nämlich ein Punkt in einem dieser Gebiete, so kann sich die Anzahl der von ihm an B_r gehenden Tangenten nicht verändern, weil der Punkt während dieser Bewegung die Kurve oder ihre Wendetangenten (die reell nicht existieren) nicht überschreiten kann.

Ist G_0 ein Gebiet, aus dessen Punkten die maximale Anzahl m der Tangenten an B_r gehen, so kann man aus einem inneren Punkte von G_0 nur die konvexe Seite seiner Randbogen erreichen.

Wäre nämlich die konkave Seite eines Randbogens von G_0 aus seinen inneren Punkten erreichbar, so würde die Anzahl der aus einem Punkte P an B_r gehenden Tangenten vergrößert, wenn der Punkt P, von einem Punkte von G_0 ausgehend, durch den betreffenden Randbogen von G_0 in das benachbarte Gebiet gelangt. Die Klasse von B_r wäre also größer als m, was eine Unmöglichkeit ist.

Liegt der gewöhnliche Punkt P der Buschenveloppe B_r auf dem Rande von G_0 und ist p die Tangente von B_r in diesem Punkte, so wird die Kurve B_r von p höchstens in $n - 2$ Punkten geschnitten. Liegen die Punkte, in denen B_r von p getroffen wird, sämtlich zwischen den Punkten P_1 und P_2 der Geraden p, so kann man aus den Punkten P_1 und P_2 ebenso wie aus den unendlichfernen Punkten von p an die Buschenveloppe B_r nur je eine Tangente ziehen.

Bewegt sich nun ein Punkt Q auf der Geraden p von P_1 bis P_2, so kann sich die Anzahl der Tangenten aus Q an B_r nur dann ändern, wenn der Punkt Q die Kurve überschreitet. Die Änderung ist Zunahme bzw. Abnahme um Zwei, je nachdem ein konvexer Bogen von der konkaven Seite nach der konvexen bzw. in umgekehrter Richtung überschritten wird. Daraus folgt, daß die Anzahl der Tangenten aus Q an B_r sich während der genannten Bewegung von Q ebenso oft ändert, wie die Kurve B_r von der Tangente p geschnitten wird, also höchstens $n - 2$-mal.

Die Anzahl der von Q ausgehenden Tangenten von B_r nimmt während der genannten Bewegung von Q ebenso oft zu wie ab, weil man aus den

Punkten P_1 und P_2 an B_r nur je eine Tangente ziehen kann. Daraus folgt die Ungleichung

$$m \leqq 1 + 2 \cdot \frac{n-2}{2} = n - 1.$$

Damit ist der Satz VIII bewiesen.

Aus dem Beweise folgt, daß die Klasse einer Buschenveloppe B_r bei gegebenen Werten r und n ihren Maximalwert nur dann erreicht, wenn die Kurve von der Geraden p in genau $n-2$ Punkten geschnitten wird, und wenn der von P_1 ausgehende Punkt Q die Kurve in den ersten $\frac{n-2}{2}$ Schnittpunkten auf p von der konkaven nach der konvexen Seite überschreitet.

Wir werden später beweisen, daß die Klasse einer Buschenveloppe B_r ihren Maximalwert r erreichen kann. Dann ist $r+1$ die Ordnung von B_r.

5. Die Durchschneidung eines Doppelpunktes einer Buschenveloppe.

Ein mit stetiger Tangente versehener Konvexbogen wird nach Juel Elementarbogen genannt. Die Komponenten der Buschenveloppen sind also sämtlich Elementarbogen.

Schneiden die hinreichend kleinen Elementarbogen A_1A_2 und A_3A_4 einander in einem einzigen Punkte A, so bilden die Bogenpaare AA_1 und AA_3, AA_1 und AA_4, AA_2 und AA_4, AA_2 und AA_3 vier Ecken mit dem gemeinsamen Winkelpunkt A. Unter diesen Ecken kann eine und nur eine zum Rande eines konvexen Gebietes gehören. Diese Ecke wird im folgenden eine *konvexe Ecke* genannt. Bilden die Elementarbogen AA_1 und AA_3 die konvexe Ecke, so wird von den Bogen AA_2 und AA_4 eine *konkave Ecke* gebildet.

Die *Durchschneidung* des Schnittpunktes, des Doppelpunktes A, wird auf folgende Weise definiert:

Wir trennen erst die konvexe Ecke in A von der konkaven ab. Dann beseitigen wir den Winkelpunkt der konvexen Ecke durch eine *Abrundung*[13]), wodurch die konvexe Ecke in einen Elementarbogen übergeht. Endlich wenden wir auf die konkave Ecke in A eine *Zuspitzung* an, wodurch die konkave Ecke in einen mit stetiger Tangente versehenen und einen Rückkehrpunkt enthaltenden Bogen übergeführt wird, welcher dieselben Endpunkte und in den Endpunkten dieselben Halbtangenten besitzt, wie die ersetzte konkave Ecke, und welcher den durch Abrundung vorher erhaltenen hinreichend kleinen Elementarbogen nicht schneidet.

---

[13]) Juel, a. a. O., S. 123–125.

Es ist leicht einzusehen, daß man auf den Schnittpunkt von zwei genügend kleinen Elementarbogen immer eine Durchschneidung anwenden kann.

Wir beweisen den folgenden Satz:

IX. *Eine Buschenveloppe wird durch die Durchschneidung jedes ihrer Doppelpunkte in zwei Buschenveloppen zerlegt.*

Zunächst bemerken wir, daß jeder Doppelpunkt einer Buschenveloppe ein Schnittpunkt von zwei genügend kleinen Elementarbogen der Kurve ist.

Ein solcher Bogen einer Buschenveloppe B_r, welcher den Rückkehrpunkt P_0 mit der Spitzentangente p_0 enthält, kann nämlich im Rückkehrpunkte P_0 von einem anderen Bogen der Kurve nur dann geschnitten werden, wenn dieser zweite Bogen in P_0 von p_0 berührt wird. Die Gerade p_0 ist dann eine mehrfache Tangente von B_r. Dies ist aber unmöglich.

Wir können also annehmen, daß die genügend kleinen Elementarbogen A_1A_2 und A_3A_4 im Punkte A (in einem Doppelpunkte von B_r) einander schneiden. Wir können auch annehmen, daß die konvexe Ecke in A von den Bogen AA_1 und AA_3 gebildet wird. Wir beweisen zuerst, daß die Buschenveloppe B_r in zwei geschlossene Teile, Pseudozüge Z_1 und Z_2, zerfällt, wenn man im Punkte A die konvexe Ecke von der konkaven abtrennt.

Lassen wir nun einen Punkt P auf dem Bogen AA_1, von A ausgehend, auf der Buschenveloppe B_r fortschreiten, so kehrt P zum ersten Male auf dem Bogen AA_3 zur Anfangslage A zurück.

Diese Rückkehr kann nämlich auf dem Bogen AA_2 nicht stattfinden, weil die Kurve B_r einzügig ist. Sie kann auch auf dem Bogen AA_4 nicht stattfinden, weil der Drehungssinn der Tangente von B_r im Punkte P während der Bewegung von P unverändert ist, und weil der Drehungssinn der Tangente auf den Bogen AA_1 und A_4A entgegengesetzt ist, wie man leicht einsieht.

Damit ist bewiesen, daß die Kurve B_r durch die Abtrennung der konvexen Ecke in A von der konkaven in zwei Pseudozüge Z_1 und Z_3 zerfällt. Enthält der Pseudozug Z_1 die konvexe Ecke in A und bezeichnet α den Winkel zwischen den Halbtangenten der Bogen AA_1 und AA_3 in A, so ist Z_1 bzw. Z_2 offenbar von der Totalkrümmung $\pi - \alpha$ bzw. α. Durch die Abrundung der konvexen Ecke auf Z_1 bzw. durch die Zuspitzung der konkaven Ecke auf Z_2 erhalten wir offenbar eine Buschenveloppe B_{r_1} bzw. B_{r_2}. Damit ist der Satz IX bewiesen.

6. Die Minimalanzahl der Doppelpunkte der Buschenveloppen B.

Auf Grund des Satzes IX beweisen wir den Satz

X. *Die Buschenveloppen B_r können nur die durch den Ausdruck*

$$d = \frac{r-3}{2} + 2k \left(\leqq \frac{r(r-3)}{2} \right)$$

gegebenen Anzahlen d von Doppelpunkten besitzen, wo k eine nichtnegative ganze Zahl bedeutet. Jede Buschenveloppe B_r besitzt mindestens $\frac{r-3}{2}$ Doppelpunkte.

Dieser Satz läßt sich durch vollständige Induktion beweisen.

Zunächst ist dieser Satz für $r = 3$ durch den Satz VI bewiesen. In diesem Falle ist $d = 0$ und $k = 0$.

Wir nehmen an, daß der Satz X für jede Buschenveloppe B_r gilt, wenn $r \leqq r_0$ ist. Wir wollen die Gültigkeit des Satzes X auch für die Buschenveloppen mit $r = r_0 + 2$ Rückkehrpunkten beweisen.

Wir wenden auf einen Doppelpunkt A einer Buschenveloppe B_r mit $r = r_0 + 2$ Rückkehrpunkten und mit d Doppelpunkten eine Durchschneidung an und bezeichnen mit B_{r_1} bzw. B_{r_2} die aus B_r so erhaltenen zwei Buschenveloppen, mit d_1, d_2 bzw. mit d_{12} die Anzahl der Doppelpunkte von B_{r_1}, B_{r_2} bzw. die Anzahl der gemeinsamen Punkte der Kurven B_{r_1} und B_{r_2}.

Die Anzahl der gemeinsamen Punkte der paaren Kurven B_{r_1} und B_{r_2} ist gerade. Die Durchschneidung des Doppelpunktes A läßt sich in einer so kleinen Umgebung von A durchführen, daß jeder Doppelpunkt und jeder Schnittpunkt der Kurven B_{r_1} und B_{r_2} ein Doppelpunkt von B_r ist, und daß jeder Doppelpunkt von B_r — mit Ausnahme von A — ein Doppelpunkt oder ein Schnittpunkt von B_{r_1} und B_{r_2} ist. Man erhält also die Gleichung

$$d = d_1 + d_2 + d_{12} + 1 = d_1 + d_2 + 1 + 2k_{12},$$

wo k_{12} eine nichtnegative ganze Zahl ist.

Aus den Relationen $r_1 + r_2 = r + 1 = r_0 + 3$, $r_1 \geqq 3$, $r_2 \geqq 3$ folgen die Ungleichungen $r_1 \leqq r_0$ und $r_2 \leqq r_0$. Nach unserer Annahme besteht also der Satz X für die Kurven B_{r_1} und B_{r_2}. Es bestehen also die Relationen

$$d_1 = \frac{r_1 - 3}{2} + 2k_1 \qquad \text{und} \qquad d_2 = \frac{r_2 - 3}{2} + 2k_2,$$

wo k_1 und k_2 nichtnegative ganze Zahlen sind.

Aus den vorigen Relationen ergibt sich also die Gleichung

$$d = d_1 + d_2 + 1 + 2k_{12} = \frac{(r_1 + r_2 - 1) - 3}{2} + 2(k_{12} + k_1 + k_2) = \frac{r-3}{2} + 2k.$$

Damit ist der Satz X bewiesen.

Ist $r_1 \geqq 5$ (bzw. $r_2 \geqq 5$), so kann man auch auf die Kurve B_{r_1} bzw. B_{r_2} eine Durchschneidung anwenden. Auf Grund dessen läßt sich der folgende Satz leicht einsehen:

XI. *Eine Buschenveloppe B_r läßt sich durch Durchschneidungen gewisser $\frac{r-3}{2}$ ihrer Doppelpunkte in $\frac{r-1}{2}$ Buschenveloppen mit je drei Rückkehrpunkten zerlegen.*

7. Deformationen der Buschenveloppen ohne Veränderung der Anzahl ihrer Rückkehrpunkte.

Deformiert man eine Buschenenveloppe B_r so, daß man einen konvexen Bogen von B_r durch einen solchen Elementarbogen ersetzt, der dieselben Endpunkte und in den Endpunkten dieselben Endtangenten besitzt, wie der ersetzte konvexe Bogen, so ist die erhaltene Kurve wieder eine Buschenveloppe mit r Rückkehrpunkten. Bilden die Konvexbogen AB und AC einer Buschenveloppe B_r im Punkte A einen Rückkehrpunkt und führt man durch stetige Deformationen die zwei Bogen mit der Erhaltung ihrer nicht gemeinsamen Endpunkte und Endtangenten in solche zwei Elementarbogen $A'B$ und $A'C$ über, die im gemeinsamen Punkte A' wieder einen Rückkehrpunkt erster Art bilden, so führt diese Deformation die Kurve B_r wieder in eine Buschenveloppe mit r Rückkehrpunkten über.

Diese Deformationen verändern nämlich die Anzahl der Tangenten der Kurve in keiner Richtung. Die Ordnung, die Klasse und die Anzahl der Doppelpunkte von B_r können aber durch diese Deformationen verändert werden.

Diese zweierlei Deformationen werden im folgenden Deformationen erster bzw. zweiter Art genannt werden.

Man kann durch eine Deformation zweiter Art einen Rückkehrpunkt auf ihrer Tangente in der Richtung, wohin die Spitze zeigt, so weit abschieben, wie man will. Eine solche Deformation dehnt die beiden Komponenten, von denen der Rückkehrpunkt gebildet wird, aus. Sie soll deshalb *Ausdehnung* des Rückkehrpunktes genannt werden.

Durch eine Deformation zweiter Art kann man die Spitzentangente um einen genügend kleinen Winkel drehen.

Wir verstehen unter der *gerichteten Halbtangente* eines Rückkehrpunktes A denjenigen Halbstrahl der Spitzentangente, der in die Richtung der Spitze weist, der also im Punkte A eine gemeinsame Halbtangente der beiden Komponenten ist, von denen der Rückkehrpunkt A gebildet wird. In dem Falle, daß die Buschenveloppe von der gerichteten Halbtangente

eines ihrer Rückkehrpunkte nicht geschnitten wird, kann die Ausdehnung dieses Rückkehrpunktes offenbar so geführt werden, daß die Anzahl der Doppelpunkte der Kurve dadurch nicht verändert wird.

Daraus folgt der Satz

XII. *Die gerichteten Halbtangenten der Rückkehrpunkte einer Buschenveloppe mit der Maximalanzahl* $\frac{r\,(r-3)}{2}$ *der Doppelpunkte schneiden weder die Kurve, noch einander.*

Hätten nämlich zwei gerichtete Halbtangenten von zwei Rückkehrpunkten einen Schnittpunkt P, so könnte man die Buschenveloppe B_r durch Ausdehnung der entsprechenden Rückkehrpunkte in eine andere Buschenveloppe B'_r überführen, die auch in der Nähe des Punktes P Doppelpunkte hat und die außerdem dieselben Doppelpunkte hat, wie die ursprüngliche Kurve B_r. Die Kurve B_r könnte also nicht die Maximalanzahl der Doppelpunkte haben. Schneidet die gerichtete Halbtangente eines Rückkehrpunktes die Buschenveloppe in einem Punkte P, so kann man durch geeignete Ausdehnung dieses Rückkehrpunktes die Buschenveloppe B_r wieder in eine solche Buschenveloppe B'_r überführen, die mehr Doppelpunkte besitzt, als die ursprüngliche Buschenveloppe B_r.

Damit ist der Satz XII bewiesen.

Es gilt auch der folgende Satz

XIII. *Jede Buschenveloppe* B_r *läßt sich durch geeignete Ausdehnung ihrer Rückkehrpunkte und durch geeignete Deformationen erster Art in eine neue Buschenveloppe* B' *überführen, die die Maximalanzahl der Doppelpunkte besitzt.*

Wir können annehmen, daß die Rückkehrpunkte der Buschenveloppe B_r die Winkelpunkte eines konvexen Polygons Π sind, dessen Inneres die Kurve in sich enthält. Im entgegengesetzten Fall kann man nämlich diese Lage durch geeignete Ausdehnung einiger Rückkehrpunkte offenbar immer erreichen.

Sind nun AB und CD zwei nicht benachbarte Komponenten von B_r, so schneiden die Strecken AB und CD einander. Wäre nämlich der Schnittpunkt P der Geraden AB und CD außerhalb von Π, so könnte man aus P an beide Komponenten AB und CD von B_r je eine Tangente ziehen. Dann könnte man aber aus den unendlichfernen Punkten der Ebene an B_r mindestens zwei Tangenten ziehen. Dies ist aber unmöglich.

Ist nun P der Schnittpunkt der Strecken AB und CD, so kann man durch Deformationen erster Art die Komponenten AB und CD in solche der Strecke AB bzw. CD genügend nahe liegenden Elementarbogen überführen, die einander schneiden.

Damit ist bewiesen, daß man eine Buschenveloppe B_r durch geeignete Ausdehnung der Rückkehrpunkte und dann durch geeignete Deformationen der nicht benachbarten Komponenten in eine Buschenveloppe B_r überführen kann, für die je zwei nicht benachbarte Komponenten einen Schnittpunkt haben. Diese Kurve hat also die Maximalanzahl $\frac{r(r-3)}{2}$ der Doppelpunkte.

Damit ist der Satz XIII bewiesen.

Während der Deformationen, welche die Buschenveloppe B_r in die Buschenveloppe B'_r mit der Maximalanzahl der Doppelpunkte überführen, ändert sich die Anzahl der Doppelpunkte nur dann, wenn ein ausgedehnter Rückkehrpunkt die Kurve durchsetzt, oder wenn eine deformierte Komponente durch einen Rückkehrpunkt hindurchgeht. In beiden Fällen ist die Änderung eine gerade Zahl. Daraus folgt, daß die Anzahl der Doppelpunkte einer Buschenveloppe eine gerade bzw. ungerade Zahl ist, je nachdem die Zahlen $\frac{r(r-3)}{2}$ und $\frac{r-3}{2}$ gerade bzw. ungerade sind.

8. Darstellung von Buschenveloppen.

Wir ersetzen einen Elementarbogen AB einer Buschenveloppe B_r durch einen aus drei Elementarbogen bestehenden und zwei Rückkehrpunkte erster Art und einen Doppelpunkt enthaltenden Bogen Γ mit den Endpunkten A und B, dessen Endtangenten mit den Endtangenten des Elementarbogens AB zusammenfallen und dessen Totalkrümmung mit der Totalkrümmung des Elementarbogens AB übereinstimmt. Dieses Verfahren wird im folgenden eine *X-Transformation* der Buschenveloppe B_r genannt werden.

Aus der Übereinstimmung der Totalkrümmung der beiden Bogen mit den Endpunkten A und B folgt, daß eine Buschenveloppe B_r durch eine X-Transformation in eine Buschenveloppe B_{r+2} übergeführt wird.

Wendet man auf eine dreispitzige Hypozykloide, die eine Kurve B_3 ist, eine X-Transformation an, so daß die B_3 vom Bogen Γ nicht geschnitten wird, so erhält man eine Buschenveloppe B_5 mit einem einzigen Doppelpunkte. Wendet man auf diese Kurve B_5 auf ähnliche Weise eine X-Transformation an, so wird die Kurve B_5 dadurch in eine Buschenveloppe B_7 mit zwei Doppelpunkten übergeführt. Durch entsprechende $\frac{r-3}{2}$ X-Transformationen läßt sich also eine Kurve B_3 in eine Buschenveloppe B_r mit der Minimalzahl $\frac{r-3}{2}$ von Doppelpunkten überführen.

Kein Bogen Γ der angewandten $\frac{r-3}{2}$ X-Transformationen kann aber die Buschenveloppe, auf welche die entsprechende X-Transformation angewandt wurde, schneiden.

Auf Grund der vorigen läßt sich also der Satz X durch den folgenden ergänzen:

XIV. *Für jede der Ungleichung*

$$0 \leqq k \leqq \frac{(r-1)(r-3)}{2}$$

genügende ganze Zahl gibt es Buschenveloppen mit

$$d = \frac{r-3}{2} + 2k$$

Doppelpunkten.

Wendet man auf eine Buschenveloppe B_s $\frac{r-3}{2}$ X-Transformationen so an, daß die $\frac{r-3}{2}$ Elementarbogen, welche durch je einen Bogen Γ_h $\left(h = 1, 2, \ldots, \frac{r-3}{2}\right)$ ersetzt werden, alle auch auf der ursprünglichen Kurve B_s liegen und daß die Anzahl der Doppelpunkte von jeder X-Transformation nur um einen Doppelpunkt, um den Doppelpunkt des angewandten Bogens vergrößert wird, so gehören die Bogen Γ_h alle der so dargestellten Kurve B_r an. Die $\frac{r-3}{2}$ einfach zusammenhängenden Gebiete G_h, die von den geschlossenen Teilen der Bogen Γ_h begrenzt werden, liegen alle außerhalb eines jeden und im Inneren des von B_s begrenzten Gebietes. Man erreicht daher von den Punkten von G_h aus die konvexe Seite seiner Randbogen.

Man kann aus einem unendlichfernen Punkte der Ebene die Doppelpunkte der Bogen Γ_h erreichen, ohne die Buschenveloppe übertreten zu müssen. Tritt ein Punkt P durch einen Doppelpunkt von Γ_h in ein Gebiet G_h hinein, so nimmt die Anzahl der aus P an B_r gehenden Tangenten um vier zu, weil im Doppelpunkte zwei Komponenten von der konkaven Seite nach der konvexen übertreten werden. Aus einem Punkte der Gebiete G_h gehen also fünf Tangenten an die Buschenveloppe B_r.

Daraus folgt der Satz

XV. *Für jede ungerade Zahl $r \geqq 5$ gibt es Buschenveloppen B_r fünfter Klasse.*

Die Klasse 5 ist offenbar die Minimalklasse der Buschenveloppen B_r, weil eine Kurve dritter Klasse höchstens drei Rückkehrpunkte haben kann.

9. Darstellung von Buschenveloppen B_r, die von maximaler Ordnung und entweder von maximaler oder von minimaler Klasse sind.

Man kann eine Buschenveloppe B_3 durch $\frac{r-3}{2}$ X-Transformationen in eine Buschenveloppe B_r mit $\frac{r-3}{2}$ Doppelpunkten überführen, die von $r+1$-ter Ordnung und von r-ter Klasse ist.

Die erste X-Transformation ersetzt einen Elementarbogen der Kurve B_3 durch einen Bogen Γ_1 mit einem Doppelpunkte D_1. Ist G_1 das vom geschlossenen Teile des Bogens Γ_1 begrenzte Gebiet, so ersetzt die zweite X-Transformation ein konvexes Randstück des Gebietes G_1 durch einen im Gebiete G_1 liegenden Bogen Γ_2. Ist G_2 das von Γ_2 begrenzte endliche Gebiet, so ersetzt die dritte X-Transformation einen konvexen Bogen des Randes von G_2 durch einen in G_2 liegenden Bogen Γ_3. Durch die Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man zu einer Buschenveloppe B_r von den gewünschten Eigenschaften.

Dies kann man auf folgende Weise einsehen:

Man gelangt von einem unendlichfernen Punkte der Ebene (der nur eine Tangente an die Buschenveloppe B_r sendet) nach G_1 durch den Doppelpunkt D_1 hindurch, indem man in D_1 zwei konvexe Bogen von der konkaven Seite nach der konvexen überschreitet. Von einem Punkte von G_1 kann man durch einen gewöhnlichen Punkt des Randes von G_2 auch in das Gebiet G_2 gelangen. In diesem Randpunkte von G_2 überschreitet man einen konvexen Bogen wieder von der konkaven Seite nach der konvexen. Von G_2 gelangt man auch nach G_3, wenn man einen konvexen Randbogen von G_3 von der konkaven Seite nach der konvexen überschreitet.

Von einem Punkte des innersten Gebietes G_μ mit dem Index $\mu = \frac{r-3}{2}$ gehen also

$$1 + 4 + 2\left(\frac{r-3}{2} - 1\right) = r$$

Tangenten an die Buschenveloppe B_r.

Die Klasse m und die Ordnung n der Buschenveloppen B_r genügen nach dem Satze VIII der Ungleichung $m \leqq n-1 \leqq r$. Daraus folgt, daß die vorher dargestellte Buschenveloppe von r-ter Klasse und von $r+1$-ter Ordnung ist, weil ihre Klasse mindestens r ist.

Damit ist der folgende Satz bewiesen:

XVI. *Es gibt für jede ungerade Zahl $r \geqq 3$ Buschenveloppen r-ter Klasse und $r+1$-ter Ordnung.*

Eine im dritten Paragraphen dargestellte Hypozykloide B_r mit $\frac{r(r-3)}{2}$ Doppelpunkten ist von $r+1$-ter Ordnung. Es gibt nämlich Geraden, von denen jede Komponente dieser Buschenveloppe geschnitten wird.

Die Ordnung dieser Kurve ist also $r+1$, weil sie eine gerade Zahl ist, die mindestens gleich r und höchstens gleich $r+1$ ist. Die Klasse dieser Kurve ist 3 bzw. 5, je nachdem $r=3$ bzw. $r>3$ ist.

Ist nämlich $r \geqq 5$, so teilt die Hypozykloide B_r die Ebene in ein unendlichfernes Gebiet, von dessen Punkten nur je eine Tangente an diese Kurve geht, in r solche Gebiete, deren Punkte je drei Tangenten an die Kurve senden und in ein Gebiet, dessen Punkte je fünf Tangenten an die Kurven B_r senden. Dieses letzte Gebiet enthält den Mittelpunkt der Hypozykloide.

Es gilt also der Satz

XVII. *Für jede ungerade Zahl $r>3$ gibt es Buschenveloppen von maximaler Ordnung und von minimaler Klasse.*

(Eingegangen am 18. Oktober 1935.)

Linear Functionals in the Theory of Quasi-Analytic and *D*-Analytic Classes.

By

W. J. Trjitzinsky of Urbana, USA.

1. *Introduction.* In a recent work[1]) the present author established a theory of quasi-analytic classes (and of certain other classes of functions) with the aid of certain developments, originally due to E. Schmidt, relating to systems

$$\sum_k a_{i,k}\, x_k = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

where the series

$$\sum_k a_{i,k}^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{1a}$$

all converge and a solution (x_k), if existent, is to be such that

$$\Sigma x_k^2 \tag{2}$$

converges. The results obtained in (T) could be considered as consequences of some of the properties of linear functionals in the metric space[2]) l^2, in which an element x consists of a sequence of numbers (x_k) such that (2) converges. *It is the purpose of the present paper to carry out application of some of the properties of linear functionals of the spaces L^2 and C, to the field of quasi-analytic and to the field of certain other classes of functions.* In this connection, L^2 is to denote the metric space of functions whose square is Lebesgue integrable over the interval (0, 1). On the other hand, C is to denote the metric space whose elements are functions continuous on the closed interval (0, 1). A considerable part of the results, relating to functionals in spaces L^2 and C and of use for the purposes at hand, is due to F. Riesz[3]). In place of systems (1) we shall now have certain problems of moments[4]).

---

[1]) W. J. Trjitzinsky, *A theory of quasi-analytic classes*, Math. Zeitschr. 1935, pp. 560—590. In the sequel this paper will be referred to as (T).

[2]) For details concerning l^2, as well as regarding the spaces L^2 and C, to be considered below, the reader is referred to the book of S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa, 1932, in the sequel to be indicated as (B).

[3]) Explicit references to the works of F. Riesz can be found in (B).

[4]) As remarked by T. Carlemann a problem of moments is equivalent to an integral equation.

It will be said that a class Q, of functions indefinitely differentiable on $(0, 1)$, is *quasi-analytic* at $x_0 (0 \leqq x_0 \leqq 1)$ if it contains no two functions $f(x)$, $g(x)$ such that $f^{(\nu)}(x_0) = g^{(\nu)}(x_0)$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ while $f(x)$ is not identically equal to $g(x)$ on $(0, 1)$. A class Q is quasi-analytic on $(0, 1)$ if it is quasi-analytic at every point of the interval $(0, 1)$. Q is an *additive* class if $h(x) = f(x) \pm g(x) \subset Q$, whenever $f(x) \subset Q$ and $g(x) \subset Q$. An additive class Q is quasi-analytic at $x_0 (0 \leqq x_0 \leqq 1)$ if it contains no function $f(x)$, with $f^{(\nu)}(x_0) = 0$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$, which is not identically zero on $(0, 1)$.

It is obvious that a particular function may belong to a quasi-analytic class according to one mode of defining classes, while it belongs to no quasi-analytic class according to some other mode of defining classes. Accordingly, it is seen that the method of defining classes is of considerable importance. For the present we shall put aside the problem of the connection between the results relating to the method of defining classes, as given in this paper, to those relating to Carleman's method [5]).

A class K, of functions defined on $(0, 1)$, will be said to be *D-analytic* at a point (x_ν) [6]) if it contains no two functions $f(x)$, $g(x)$ such that $f(x_\nu) = g(x_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, while $f(x)$ is not identically equal to $g(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$. An *additive* class K is D-analytic at (x_ν) if it contains no function $f(x)$, with $f(x_\nu) = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ which is not identically zero on $(0, 1)$. A class K will be said to be D-analytic on $(0, 1)$ if it is D-analytic at every point (x_ν) of the interval $(0, 1)$.

2. Quasi-analytic classes relating to the space L^2. We recall that every linear functional $U(a)$, defined for $a(t) \subset L^2$, is of the form

$$U(a) \equiv \int_0^1 \varphi(t)\, a(t)\, dt \qquad (U(a) = U_0(a)) \tag{1}$$

where $\varphi(t) \subset L^2$. If $\varphi(t) = \varphi(t, x)$ is measurable in the square $(0 \leqq t, x \leqq 1)$ and if it is such that

$$\int_0^1 \int_0^1 \varphi^2(t, x)\, dt\, dx < \infty \tag{1 a}$$

then $U(a)$ represents a function $f(x) \subset L^2$,

$$f(x) = \int_0^1 \varphi(t, x)\, a(t)\, dt, \tag{2}$$

---

[5]) T. Carleman, *Les functions quasi-analytiques*, Paris 1926. Carleman defines classes C_A as fellows. Given a sequence of positive numbers $A_0, A_1, \ldots$ the class C_A consists of the functions $f(x)$ for which $|f^{(\nu)}(x)| < f^\nu A_\nu$ $(\nu = 0, 1, \ldots; 0 \leqq x \leqq 1)$; here f may vary with the functions of the class.

[6]) A 'point' (x_ν) is to consist of a sequence $x_1, x_2, \ldots (0 \leqq x_\nu \leqq 1)$.

for every $a(t) \subset L^2$. In view of (1 a), the operation $U(a)$ will be linear [7]). *If $\varphi(t, x)$ is such that every integral*

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial^\nu \varphi(t, x)}{\partial x^\nu}\right)^2 dt \qquad (\nu = 0, 1, \ldots) \tag{3}$$

has a finite upper bound $A_\nu^2 (0 \leqq x \leqq 1)$ the function $f(x)$, defined by (2), will be indefinitely differentiable on (0, 1) for every $a(t) \subset L^2$. In fact, we shall have

$$f^{(\nu)}(x) = U_\nu(a) \equiv \int_0^1 \frac{\partial^\nu \varphi(t, x)}{\partial x^\nu} a(t)\, dt \quad (\nu = 0, 1, \ldots;\ 0 \leqq x \leqq 1). \tag{4}$$

Moreover, by the inequality of Schwarz it will follow that

$$|f^{(\nu)}(x)|^2 \equiv \int_0^1 \left(\frac{\partial^\nu \varphi(t, x)}{\partial x^\nu}\right)^2 dt\, s_a^2 \leqq s_a^2 A_\nu^2 \tag{4 a}$$

$$(0 \leqq x \leqq 1;\ \ \nu = 0, 1, \ldots)$$

whenever $a(t) \subset L^2$. Here

$$s_a^2 = \int_0^1 a^2(t)\, dt. \tag{4 b}$$

This leads to the following definition of classes.

Definition 1. *Let $\varphi(t, x)$ be a function, defined for $0 \leqq t, x \leqq 1$, such that the integrals* (3) *exist and all have finite upper bounds on the interval $(0 \leqq x \leqq 1)$. A class $C(\varphi)$ will then be defined as the totality of functions $f(x)$, defined by* (2), *for which $a(t) \subset L^2$.*

In consequence of (4) and (4 a) it is seen that *every $f(x) \subset C(\varphi)$ is indefinitely differentiable.* The class $C(\varphi)$, of functions $f(x)$, is a sub-space of L^2 into which the whole space L^2, of functions $a(t)$, is transformed by means of (2). More generally, if we let $C_\nu(\varphi)$, denote the class of the ν-th derivatives of all the functions of $C(\varphi)$, it is observed that $C_\nu(\varphi)$ is a sub-space of L^2 into which the whole space L^2 (of functions $a(t)$) is transformed by means of $U_\nu(a)$ (cf. (4); $\nu = 0, 1, \ldots$).

If $f(x) \subset C(\varphi)$ then $g(x) = cf(x) \subset C(\varphi)$. If $f(x) \subset C(\varphi)$ and $g(x) \subset C(\varphi)$ then $h(x) = f(x) + g(x) \subset C(\varphi)$; in fact, on writing

$$g(x) = \int_0^1 \varphi(t, x)\, b(t)\, dt$$

---

[7]) (B; 89).

and defining $f(x)$ by (2), we shall have

$$h(x) = \int_0^1 \varphi(t, x)\, c(t)\, dt$$

where $c(t) = a(t) + b(t) \subset L^2$. *Thus the classes $C(\varphi)$ are additive*

Definition 2. *A class $C(\varphi)$ will be termed minimal if it contains no identically vanishing function*

$$f(x) = \int_0^1 \varphi(t, x)\, a(t)\, dt$$

for which $a(t)$ does not vanish on a set of positive measure.

Consider the problem of moments

$$\int_0^1 \varphi_\nu(t)\, a(t)\, dt = \eta_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots) \tag{5}$$

where the η_ν are assigned constants and the $\varphi_\nu(t) \subset L^2$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ are known given functions. The problem consists in finding a function $a(t) \subset L^2$ which satisfies the set of equations (5). In this connection the following result due to F. Riesz[8]) will be stated.

In order that there should exist a function $a(t)$ for which

$$\int_0^1 a^2(t)\, dt \leqq M^2$$

and which satisfies (5) it is necessary and sufficient that for every finite sequence $h_0, \ldots, h_K$ of real numbers

$$|\sum_{\nu=0}^{K} h_\nu \eta_\nu|^2 \leqq M^2 \int_0^1 |\sum_{\nu=0}^{K} h_\nu \varphi_\nu(t)|^2\, dt. \tag{6}$$

Let x_0 be some point of the interval $(0 \leqq x \leqq 1)$. A function $b(t, x_0)$ will be said to be *admissible* (at x_0 with respect to $C(\varphi)$) if it belongs to L^2 and if

$$\int_0^1 b(t, x_0)\, a(t)\, dt \tag{7}$$

is not a linear combination of the integrals

$$\int_0^1 \frac{\partial^\nu \varphi(t, x_0)}{\partial x^\nu}\, a(t)\, dt \qquad (\nu = 0, 1, \ldots). \tag{7 a}$$

---

[8]) Cf., for instance (B: 75).

Consider the problem

$$\int_0^1 b(t, x_0)\, a(t)\, dt = 1, \tag{8}$$

$$\int_0^1 \frac{\partial^\nu \varphi(t, x_0)}{\partial x^\nu}\, a(t)\, dt = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots), \tag{8 a}$$

where $b(t, x_0)$ is an admissible function. In consequence of the quoted result of Riesz this problem has a solution $a(t) \subset L^2$ if and only if the

$$\text{upper bound}_{h_{-1}, \ldots, h_K;\ K=-1, 0, 1, \ldots} \left\{ \frac{h_{-1}^2}{\int_0^1 \left| h_{-1} b(t, x_0) + h_0 \varphi(t, x_0) + h_1 \frac{\partial \varphi(t, x_0)}{\partial x} + \ldots + h_K \frac{\partial^K \varphi(t, x_0)}{\partial \alpha^K} \right|^2 dt} \right\} \tag{9}$$

is finite. The following theorem will be proved.

Theorem 1. *In order that a minimal class $C(\varphi)$ should be quasi-analytic at x_0 it is necessary and sufficient that for every $b(t, x_0)$, admissible at x_0 with respect to $C(\varphi)$, the upper bound* (9) *should be infinite. The sufficient part of the theorem holds also for non minimal classes.*

Suppose first that $C(\varphi)$ is a minimal class quasi analytic at x_0. If for some admissible function $b(t; x_0)$ the problem (8), (8 a) had a solution $a(t) \subset L^2$ the corresponding function

$$f(x) = \int_0^1 \varphi(t, x)\, a(t)\, dt \tag{10}$$

would belong to $C(\varphi)$ and, in view of (8 a), it would follow that $f^{(\nu)}(x_0) = 0$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$. Consequently this function would have to be identically zero. Since equation (8) is satisfied, the function $a(t)$ occurring in (10) is distinct from zero on a set of positive measure. The class $C(\varphi)$ being minimal the function $f(x)$ could not be identically zero. Thus there arises a contradiction. Hence for every admissible $b(t, x_0)$ the problem (8), (8 a) has no solution $a(t) \subset L^2$. Therefore it follows that for every such problem the upper bound (9) would have to be infinite. This demonstrates the necesary part of the theorem.

Let $C(\varphi)$ denote now a class not necessarily minimal. Suppose that the upper bound (9) is infinite for every admissible function $b(t, x_0)$. If there existed a function

$$f(x) = \int_0^1 \varphi(t, x)\, a(t)\, dt \qquad (a(t) \subset L^2) \tag{11}$$

for which $f^{(\nu)}(x_0) = 0$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ *and which is not identically zero,* it would follow that $a(t)$ is distinct from zero on a set of positive measure

and that for some admissible function $b(t, x_0)$ the set (8), (8a) would have a solution $a(t) \subset L^2$. For this particular $b(t, x_0)$ the upper bound (9) would have to be finite Thus a contradiction arises to the assumption that the upper bound (9) is infinite for all admissible functions $b(t, x_0)$. Consequently there exists no function (11) for which the italicized statement following (11) holds. Hence every function $f(x) \subset C(\varphi)$, for which $f^{(\nu)}(x_0) = 0$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$, is necessarily zero. All classes $C(\varphi)$ being additive, this would imply that $C(\varphi)$ is a quasi-analytic class, whenever the upper bound is infinite for every admissible function $b(t, x_0)$. This establishes the theorem completely.

It is of importance to establish necessary and sufficient conditions on a set of constants

$$c_0, c_1, c_2, \ldots$$

under which there exists a function $f(x) \subset C(\varphi)$ such that $f^{(\nu)}(x_0) = c$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$. The following result will be proved.

Theorem 2. *In order that there should exist a function* $f(x) \subset C(\varphi)$ *such that*

$$f^{(\nu)}(x_0) = c_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots;\ 0 \leqq x \leqq 1) \tag{12}$$

it is necessary and sufficient that the

$$\underset{(h_0, \ldots, h_K;\ K=0, 1, \ldots)}{\text{upper bound}} \left\{ \frac{|h_0 c_0 + \ldots + h_K c_K|^2}{\int_0^1 \left| h_0 \varphi(t, x_0) + h_1 \frac{\partial \varphi(t, x_0)}{\partial x} + \ldots + h_K \frac{\partial^K \varphi(t, x_0)}{\partial x^K} \right|^2 dx} \right\} \tag{13}$$

be finite.

In fact, suppose there exists a function

$$f(x) = \int_0^1 \varphi(t, x)\, a(t)\, dt \subset C(\varphi)$$

for which (12) holds. Then the problem of moments

$$\int_0^1 \frac{\partial^\nu \varphi(t, x_0)}{\partial x^\nu} y(t)\, dt = c_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots) \tag{14}$$

will have a solution $y(t) = a(t) \subset L^2$. It would then follow that the upper bound (13) is finite.

Conversely, if the upper bound (13) is finite the problem (14) will have a solution $y(t) \subset L^2$. The corresponding function

$$f(x) = \int_0^1 \varphi(t, x)\, y(t)\, dt$$

will belong to $C(\varphi)$; moreover, (12) will be satisfied.

3. D-analytic classes relating to the space L^2. The following definition will be introduced.

Definition 3. *Let $\varphi(t, x)$ be a function, defined for $0 \leqq t, x \leqq 1$, such that the integral*

$$\int_0^1 \varphi^2(t, x)\, dt \tag{1}$$

exists and has a finite upper bound A^2 for $0 \leqq x \leqq 1$. A class $K(\varphi)$ is defined as the totality of functions $f(x)$,

$$f(x) = \int_0^1 \varphi(t, x)\, a(t)\, dt, \tag{2}$$

for which $a(t) \subset L^2$.

In consequence of the inequality of Schwarz we have

$$|f(x)|^2 \leqq A^2 \int_0^1 a^2(t)\, dt \qquad (0 \leqq x \leqq 1).$$

The classes $K(\varphi)$ are *additive*. A class $K(\varphi)$ will be said to be *minimal* if it contains no identically vanishing functions (2) for which $a(t)$ does not vanish on a set of positive measure.

Let (x_ν) be a fixed point in (0, 1). It will be said that $b(t)$ is a function *admissible* (at (x_ν) with respect to $K(\psi)$) provided $b(t) \subset L^2$ and provided

$$\int_0^1 b(t)\, a(t)\, dt$$

is not a linear combination of

$$\int_0^1 \psi(t, x_\nu)\, a(t)\, dt \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

The problem of moments

$$\int_0^1 b(t)\, a(t)\, dt = 1, \tag{3}$$

$$\int_0^1 \varphi(t, x_\nu)\, a(t)\, dt = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots), \tag{3a}$$

where $b(t)$ is an admissible function, will have a solution $a(t) \subset L^2$ if and only if the

$$\underset{(h_0, \ldots, h_K;\ K = 0, 1, \ldots)}{\text{upper bound}} \left\{ \frac{h_0^2}{\int_0^1 |h_0 b(t) + h_1 \varphi(t, x_1) + \ldots + h_K \varphi(t, x_K)|^2 dt} \right\} \tag{4}$$

is finite.

Theorem 3. *In order that a minimal class $K(\varphi)$ should be D-analytic at (x_ν) it is necessary and sufficient that for every function $b(t)$, admissible at (x_ν) with respect to $K(\varphi)$, the upper bound* (4) *should be infinite. The sufficient part of the theorem continues to hold for all classes $K(\varphi)$.*

The proof of the theorem is analogous to that of Theorem 1 (§ 2). In place of the values $f^{(\nu)}(x_0)$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ we now consider the numbers $f(x_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. On the other hand, the problem (8; § 2), (8a; § 2) and the corresponding upper bound (9; § 2) are replaced by the problem (3), (3a) and the corresponding upper bound (4), respectively.

The problem of moments

$$\int_0^1 \varphi(t, x_\nu)\, y(t)\, dt = c_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots) \tag{5}$$

will have a solution $y(t) = a(t) \subset L^2$ if and only if the

$$\underset{(h_1, \ldots, h_K;\ K = 1, 2, \ldots)}{\text{upper bound}} \left\{ \frac{|h_1 c_1 + \ldots + h_K c_K|^2}{\int_0^1 |h_1 \varphi(t, x_1) + \ldots + h_K \varphi(t, x_K)|^2\, dt} \right\} \tag{6}$$

is finite. With this fact in view, the following can be proved.

Theorem 4. *In order that there should exist a function $f(x) \subset K(\varphi)$ such that*

$$f(x_\nu) = c_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

it is necessary and sufficient that the upper bound (6) *be finite.*

The proof of this result is analogoues to that of Theorem 2 (§ 2).

4. Quasi-analytic classes relating to the space C. The developments of this and of the next section will be seen to include as special cases certain classes of functions representable by infinite series.

On taking account of the general form of linear functionals, relating to the space C, the following definition will be introduced.

Definition 4. *Let the functions*

$$\frac{\partial^\nu \varphi(t, x)}{\partial x^\nu} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots)$$

be all continuous in t $(0 \leqq t \leqq 1)$ for every x in $(0 \leqq x \leqq 1)$. Moreover, assume that

$$\left| \frac{\partial^\nu \varphi(t, x)}{\partial x^\nu} \right| \leqq M_\nu \quad (\nu = 0, 1, \ldots;\ 0 \leqq t, x \leqq 1). \tag{1}$$

A class C_φ will be defined as the totality of functions $f(x)$,

$$f(x) = \int_0^1 \varphi(t, x)\, d\, a(t)\ ^{9}), \tag{2}$$

for which $a(t)$ is of bounded variation on $(0 \leqq t \leqq 1)$.

Every function $f(x) \subset C_\varphi$ is indefinitely differentiable on $(0, 1)$. In fact,

$$f^{(\nu)}(x) = \int_0^1 \frac{\partial^\nu \varphi(t, x)}{\partial x^\nu}\, d\, a(t) \tag{3}$$

and

$$|f^{(\nu)}(x)| \leqq M_\nu V_a \quad (\nu = 0, 1, \ldots;\ 0 \leqq x \leqq 1) \tag{3a}$$

where

$$V_a = \text{total variation of } a(t) \qquad (0 \leqq t \leqq 1). \tag{4}$$

The classes C_φ are *additive.*

Definition 5. *A class C_φ will be said to be minimal if no function $f(x)$ of C_φ,*

$$f(x) = \int_0^1 \varphi(t, x)\, d\, a(t), \tag{5}$$

is identically zero unless the total variation of $a(t)$ is zero.

The following result had been proved by F. Riesz. In order that there should exist a function $a(t)$ of

$$\underset{0 \leqq t \leqq 1}{\text{variation}}\ a(t) \leqq M$$

and satisfying the problem of moments

$$\int_0^1 \varphi_\nu(t)\, d\, a(t) = c_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

it is necessary and sufficient that for every finite sequence $h_1, \ldots, h_k$ of real numbers

$$\Big|\sum_{\nu=1}^{K} h_\nu c_\nu\Big| \leqq M \cdot \max_{0 \leqq t \leqq 1} \Big|\sum_{\nu=1}^{K} h_\nu \varphi_\nu(t)\Big|. \tag{7}$$

We again introduce the notion of an admissible function. It will be said that $b(t, x_0)$ is *admissible* (at $x_0\,(0 \leqq x_0 \leqq 1)$ with respect to C_φ) if $b(t, x_0) \subset C$ and

$$\int_0^1 b(t, x_0)\, d\, a(t)$$

---

9) This is a Stieltjes integral.

is not a linear combination of

$$\int_0^1 \frac{\partial^\nu \varphi(t, x_0)}{\partial x^\nu} d\,a(t) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots).$$

The problem of moments

$$\int_0^1 b(t, x_0)\, d\,a(t) = 1, \tag{8}$$

$$\int_0^1 \frac{\partial^\nu \varphi(t, x_0)}{\partial x^\nu} d\,a(t) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots), \tag{8a}$$

where $b(t, x_0)$ is an admissible function, will have a solution of bounded variation if and only if the

$$\underset{(h_{-1}, \ldots, h_K;\ K = -1, 0, 1, \ldots)}{\text{upper bound}} \left\{ \frac{h_{-1}}{\max\limits_{0 \leqq t \leqq 1} \left| h_{-1} b(t, x_0) + h_0 \varphi(t, x_0) + h_1 \frac{\partial \varphi(t, x_0)}{\partial x} + \ldots + h_K \frac{\partial^K \varphi(t, x_0)}{\partial x^K} \right|} \right\} \tag{9}$$

is finite. This is a consequence of the result of Riesz referred to above in connection with (6) and (7). We are now ready to prove the following theorem.

Theorem 5. *For quasi-analyticity, at x_0, of a minimal class C_φ it is necessary and sufficient that for every admissible function $b(t, x_0)$ the upper bound* (9) *should be infinite. This condition is sufficient for quasi-analyticity of any class C_φ.*

Suppose C_φ is a minimal class quasi-analytic at x_0. If for some function $b(t, x_0)$, admissible with respect to C_φ, the problem (8), (8a) has a solution $a(t)$ of bounded variation the function

$$f(x) = \int_0^1 \varphi(t, x)\, d\,a(t) \subset C_\varphi \tag{10}$$

and we shall have $f^{(\nu)}(x_0) = 0$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$. Whence it follows that $f(x) \equiv 0$. The class C_φ being minimal (cf. Definition 5) it is concluded that variation $a(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ is zero. Thus a contradiction arises to the fact that $a(t)$ satisfies (8). Accordingly, it is observed that for every admissible function $b(t, x_0)$ the problem (8), (8a) has no solution $a(t)$ of bounded variation. Whence it is inferred that the upper bound (9) would have to be infinite for every function admissible at x_0, with respect to C_φ.

Conversely, if C_φ is any class and if the upper bound (9) is infinite for every admissible $b(t, x_0)$ the problem (8), (8a) *will have no solution* $a(t)$ *of bounded variation, this being so for every admissible* $b(t, x_0)$. Suppose there exists a function

$$f(x) = \int_0^1 \varphi(t, x)\, d\, a(t) \subset C_\varphi \tag{11}$$

which is not identically zero and for which

$$f^{(\nu)}(x_0) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots). \tag{11a}$$

Now the variation of the function $a(t)$ occurring in (11) is distinct from zero. Whence an admissible function $b(t, x_0)$ can be found so that (8) is satisfied for this function $a(t)$. Furthermore, in view of (11a) it would follow that $a(t)$ of (11) also satisfies the equation (8a). Thus a contradiction arises to the preceding statement in italics. Therefore every function $f(x) \subset C_\varphi$, for which (11a) holds, must be necessarily identically zero. That is, if the upper bound (9) is infinite for every admissible $b(t, x_0)$ the class C_φ will be quasianalytic.

Theorem 6. *In order that there should exist a function* $f(x) \subset C_\varphi$ *such that*

$$f^{(\nu)}(x_0) = c_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots;\ 0 \leqq x_0 \leqq 1)$$

it is necessary and sufficient that the

$$\underset{(h_0, \ldots, h_K;\ K = 0, 1, \ldots)}{\text{upper bound}} \left\{ \frac{|h_0 c_0 + \ldots + h_K c_K|}{\max\limits_{0 \leqq t \leqq 1} \left| h_0 \varphi(t, x_0) + \ldots + h_K \dfrac{\partial^K \varphi(t, x_0)}{\partial x^K} \right|} \right\} \tag{12}$$

be finite.

In view of the statement in connection with (6) and (7), it is observed that in order that the problem

$$\int_0^1 \frac{\partial^\nu \varphi(t, x_0)}{\partial x^\nu}\, d\, y(t) = c_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots) \tag{13}$$

should have a solution $y(t) = a(t)$ of bounded variation it is necessary and sufficient that the upper bound (12) be finite.

If there exists a function

$$f(x) = \int_0^1 \varphi(t, x)\, d\, a(t) \subset C_\varphi$$

for which $f^{(\nu)}(x_0) = c_\nu$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ the problem (13) will have a solution of bounded variation, $y(t) = a(t)$. The upper bound (12) will then be finite.

Conversely, if the upper bound (12) is finite the problem (13) will have a solution $y(t)$ of bounded variation. The corresponding function

$$f(x) = \int_0^1 \varphi(t, x)\, d\, y(t)$$

will satisfy the conditions of the theorem.

5. D-analytic classes relating to the space C. The following definition will be introduced.

Definition 6. *Let $\varphi(t, x)$ be a function, defined for $0 \leqq t, x \leqq 1$, continuous in t $(0 \leqq t \leqq 1)$ for every x in the interval $(0 \leqq x \leqq 1)$ and such that*

(1) $$|\varphi(t, x)| \leqq M \qquad (0 \leqq t, x \leqq 1).$$

A class K_φ will be defined as the totality of functions $f(x)$,

(2) $$f(x) = \int_0^1 \varphi(t, x)\, d\, a(t),$$

for which $a(t)$ is of bounded variation.

It is noted that $|f(x)| \leqq M\, V_a$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ and that the classes K_φ are *additive*. We shall say that a class K_φ is *minimal* if no function (2), of K_φ, is identically zero unless the variation $a(t)$ is zero.

With (x_ν) denoting a fixed 'point' in $(0, 1)$ it will be said that $b(t)$ is an *admissible* function (at (x_ν) with respect to K_φ) provided $b(t) \subset C$ and

$$\int_0^1 b(t)\, d\, a(t)$$

is not a linear combination of the integrals

$$\int_0^1 \varphi(t, x_\nu)\, d\, a(t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

We thus consider the problem of moments

(3) $$\int_0^1 b(t)\, d\, a(t) = 1 \qquad (b(t) \text{ an admissible function}).$$

(3a) $$\int_0^1 \varphi(t, x_\nu)\, d\, a(t) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

and

(4) $$\int_0^1 \varphi(t, x_\nu)\, d\, a(t) = c_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

On making use of the necessary and sufficient conditions for the sollubility ($a(t)$ to be of bounded variation) of these problems, the following two theorems are proved in a way analogous to that of the corresponding proofs of the previous sections.

Theorem 7. *In order that a minimal class K_φ should be D-analytic at a 'point' (x_ν) it is necessary and sufficient that for every admissible function $b(t)$ the*

(5) $$\underset{(h_0, \ldots, h_K;\, K=0,1,\ldots)}{\text{upper bound}} \left\{ \frac{h_0}{\max\limits_{0 \leqq t \leqq 1} |h_0\, b(t) + h_1\, \varphi(t, x_1) + \ldots + h_K\, \varphi(t, x_K)|} \right\}$$

be infinite.

Theorem 8. *In order that there should exist a function $f(x) \subset K_\varphi$ such that*

$$f(x_\nu) = c_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots;\ 0 \leqq x_\nu \leqq 1)$$

it is necessary and sufficient that the

(6) $$\underset{(h_1, \ldots, h_K;\, K=1,2,\ldots)}{\text{upper bound}} \left\{ \frac{h_1 c_1 + \ldots + h_K c_K}{\max\limits_{0 \leqq t \leqq 1} |h_1\, \varphi(t, x_1) + \ldots + h_K\, \varphi(t, x_K)|} \right\}$$

be finite.

6. Conditions under which a function belongs to a given class $C(\varphi)$ or $K(\varphi)$. Given a class $C(\varphi)$ and a function $f(x)$, under what conditions can it be asserted that $f(x) \subset C(\varphi)$? This problem is equivalent to the following. Under what conditions will the integral equation

(1) $$f(x) = \int_0^1 \varphi(t, x)\, a(t)\, dt$$

possess a solution $a(t) \subset L^2$?

In the treatment of this question certain recent results of Soula[10]) are helpful. In a formulation slightly different from that of his these results can be stated as follows.

Let

(2) $$Q(x, y) = \int_0^1 K(t, x)\, K(t, y)\, dt$$

be positive and continuous for $(0 \leqq x, y \leqq 1)$. Let

(3) $$H_f[g] = \frac{\left[\int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx\right]^2}{\int_0^1 \int_0^1 Q(x, y)\, g(x)\, g(y)\, dx\, dy}.$$

---

[10]) Soula, *Une interprétation du théorème de M. Picard sur les équations intégrales*, Comptes Rendus (1935). pp. 620—622.

In order that the equation

$$f(x) = \int_0^1 K(t, x)\, a(t)\, dt \qquad (f(x) \subset L^2) \tag{4}$$

should have a solution $a(t) \subset L^2$ it is necessary and sufficient that $H_f[g]$ be bounded, when g is restricted to the space L^2.

An answer to our query, valid under certain conditions, can be stated as follows.

Let $\varphi(t, x)$ be the function used in constructing a class $C(\varphi)$ (cf. § 2) [or a class $K(\varphi)$ (cf. § 3)]. Assume, moreover, that

$$Q(x, y) = \int_0^1 \varphi(t, x)\, \varphi(t, y)\, dt$$

is positive and continuous for $(0 \leqq x, y \leqq 1)$. A given function $f(x)$ will belong to $C(\varphi)$ [or $K(\varphi)$] if and only if $H_f[g]$ [$g \subset L^2$; cf. (3)] has a finite upper bound.

University of Illinois.

(Eingegangen am 30. August 1935.)

Zur Theorie der Bogen n-ter (Realitäts-) Ordnung im projektiven R_n*).

(Erste Mitteilung.)

Von

Ilse Sauter in Nürnberg.

Einleitung.

0, 1. Die vorliegende erste Mitteilung schließt unmittelbar an eine Arbeit von Herrn Haupt an: „Über die Erweiterung eines beliebigen Bogens dritter Ordnung, insbesondere zu einer Raumkurve dritter Ordnung“ [1]) und bringt die Verallgemeinerung der dort für den R_3 erhaltenen Ergebnisse auf den Fall des R_n.

Um die Fragestellung zu erläutern, gehen wir aus von den Bogen zweiter (Realitäts-) Ordnung in der projektiven Ebene. Ein ebener Bogen besitzt die (Realitäts-) Ordnung zwei, wenn er von jeder Geraden in maximal zwei Punkten getroffen wird [2]). Da jeder Bogen zweiter Ordnung einem beschränkten Bogen zweiter Ordnung projektiv äquivalent ist, können wir unseren Betrachtungen einen gewöhnlichen Konvexbogen zugrunde legen. Es ist nun anschaulich klar, daß ein solcher Konvexbogen $\mathfrak{B}$ sich „ordnungs-invariant (oder-fest) erweitern“ läßt, d. h. daß es einen Konvexbogen $\mathfrak{B}^*$ gibt, welcher $\mathfrak{B}$ in seinem Innern enthält. Man braucht ja nur die beschränkte Strecke, welche Anfangs- und Endpunkt des vorgelegten Konvexbogens $\mathfrak{B}$ verbindet, zu $\mathfrak{B}$ hinzuzunehmen, um sogar eine geschlossene, $\mathfrak{B}$ enthaltende, konvexe Kurve zu erhalten. Neben dieser „trivialen“ ordnungsfesten Erweiterung des Konvexbogens $\mathfrak{B}$ gibt es aber im allgemeinen auch solche ordnungsfeste Erweiterungen von $\mathfrak{B}$, bei welchen nicht Strecken, also Bogen *erster* Ordnung, sondern Bogen *zweiter* Ordnung zu $\mathfrak{B}$ hinzugefügt werden. Nicht-triviale ordnungsfeste Erweiterungen existieren lediglich dann nicht, wenn die Tangente im

---

*) Diese Arbeit wurde von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen als Dissertation angenommen.

[1]) Haupt (1). — Die in den Fußnoten in runden Klammern stehenden Zahlen, hier z. B. (1), geben die betreffende Nummer des Literaturverzeichnisses (am Schlusse der Arbeit) an.

[2]) Der Konvexbogen $\mathfrak{B}$ soll also selbst keine Strecke sein, darf aber Strecken als Teilbogen enthalten. Bei der Bestimmung der Ordnung werden Teilbogen, die Strecken sind, als verlängerte Punkte gezählt, soweit sie auf einer Geraden liegen. Vgl. Hjelmslev (3), S. 4.

einen Endpunkt von $\mathfrak{B}$ den andern Endpunkt enthält. — Unter den ordnungsinvarianten Erweiterungen $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{B}$ gibt es also insbesondere geschlossene Kurven.

0, 2. Im folgenden sollen die entsprechenden Fragen für den R_n gestellt und beantwortet werden. Die trivialen ordnungsfesten Erweiterungen dürfen wir dabei von vornherein außer Betracht lassen[3]). Zur Vereinfachung machen wir ferner von vornherein die Annahme, daß alle von uns betrachteten Bogen keine hyperebenen Teilbogen, insbesondere also keine Strecken enthalten.

Für den Fall $n = 3$, d. h. für die Bogen dritter Ordnung im R_3 hat Herr Haupt[4]) den Beweis für die Möglichkeit einer solchen (nicht-trivialen) ordnungsfesten Erweiterung erbracht; insbesondere zeigte sich dabei, daß die Gültigkeit des Satzes an keinerlei Differenzierbarkeitsbedingungen (Existenz und Stetigkeit der Tangente usw.) gebunden ist. Wie Herr Haupt vermutete[5]), gestattet dieser Beweis eine Übertragung auf den Fall des R_n mit dem Ergebnis: Jeder Bogen n-ter Ordnung im R_n, d. h. jeder Bogen, welcher von jeder Hyperebene in maximal n Punkten getroffen wird, kann mit bestimmten Ausnahmen nicht-trivial ordnungsfest erweitert werden, insbesondere zu einer geschlossenen Kurve. Dies auszuführen soll die Aufgabe der vorliegenden Mitteilung sein. Dabei wird nicht genau die Verallgemeinerung des Hauptschen Beweises wiedergegeben werden, sondern eine sich im Falle des R_n etwas einfacher erweisende Abart. Der Beweisgedanke sei kurz skizziert und zwar der Einfachheit halber ebenfalls an dem Beispiele der Konvexbogen in der Ebene.

Um die ordnungsinvarianten Erweiterungen eines Konvexbogens $\mathfrak{C}$ zu untersuchen, genügt es offenbar, in dem einen Endpunkt F von $\mathfrak{C}$ einen neuen Konvexbogen $\mathfrak{D}$ an $\mathfrak{C}$ anzufügen und Kriterien aufzustellen dafür, daß die Bogensumme $\mathfrak{B} = \mathfrak{C} \dot{+} \mathfrak{D}$ wieder ein Bogen (oder eine Kurve) von zweiter Ordnung ist. Wir beschränken uns auf den Fall, daß $\mathfrak{B}$ in F eine eindeutige Tangente besitzt. In diesem Falle ist $\mathfrak{B}$ dann und nur dann von zweiter Ordnung, wenn 1. die Tangente in F an $\mathfrak{B}$ den Bogen $\mathfrak{B}$ in F nicht schneidet, sondern stützt (Bedingung im Kleinen), und 2. der Bogen $\mathfrak{B}$ sich aus einem seiner Endpunkte E schlicht projiziert (Bedingung im Großen). Beide Bedingungen lassen sich aber leicht erfüllen. Durch dieses Kriterium wird übrigens die Tatsache bestätigt, daß ein Konvexbogen einfach dadurch zu einer geschlossenen konvexen Kurve erweitert werden kann, daß man ihn projektiv an der Verbindungsgeraden seiner beiden Endpunkte spiegelt, wobei als Zentrum der Spiegelung der

[3]) Vgl. aber dazu Hjelmslev (3), S. 6.
[4]) Vgl. Haupt (1), § 2 und die dortigen Zitate auf Juel.
[5]) Vgl. Haupt (1), S. 156.

Schnittpunkt der Tangenten in beiden Endpunkten gewählt wird. — Entsprechend werden wir bei der Behandlung der ordnungsfesten Erweiterungen der Bogen n-ter Ordnung im R_n vorgehen. Wir werden wieder ein Anfügungskriterium aufstellen (§ 3), welches dann (in § 4) zur Rechtfertigung einer Konstruktion dient, die mittels projektiver Spiegelungen den Bogen n-ter Ordnung zur Kurve n-ter Ordnung erweitert. Diese Konstruktion wird die genaue Verallgemeinerung des von Herrn Haupt im Falle des R_3 gegebenen Konstruktionsverfahrens darstellen. Um die Beweise zu entlasten, haben wir die von uns benötigten Eigenschaften der Bogen, insbesondere auch der von n-ter Ordnung, vorweg zusammengestellt (§ 1 und § 2).

0,3. In einer zweiten anschließenden Mitteilung sollen gewisse Differenzierbarkeitsfragen bezüglich der Bogen n-ter Ordnung im R_n behandelt werden. Unter anderem wird dabei zu zeigen sein, wie die in der ersten Mitteilung gewonnenen Hilfsmittel zu einem (anderen) Beweise der grundlegenden einschlägigen Sätze von Herrn Hjelmslev[6]) führen.

§ 1.

Bogen im R_n.

1,1. Unter einem *Bogen* $\mathfrak{B}$ des projektiven R_n verstehen wir ein eindeutiges, stetiges Streckenbild, wobei die Bilder der Streckenendpunkte verschiedene Punkte des R_n sind. Ist diese letzte Bedingung nicht erfüllt, fallen also die Bildpunkte der Streckenendpunkte zusammen, dann nennen wir das Streckenbild eine *Kurve*. Zur Vereinfachung setzen wir voraus, daß die von uns betrachteten Bogen $\mathfrak{B}$ *keine hyperebenen Teilbogen* enthalten. Jeden Bogen $\mathfrak{B}$ denken wir uns *orientiert*, d. h. mit einem Durchlaufungssinn versehen, indem wir unter Zugrundelegung einer bestimmten Darstellung: $\varrho \cdot x_j = \xi_j(t), j = 1, \ldots, n+1$, von $\mathfrak{B}$ als Bild der Einheitsstrecke $0 \leqq t \leqq 1$ die Orientierung dieser letzteren auf $\mathfrak{B}$ übertragen. Sind dann Q_1 und Q_2 zwei Punkte von $\mathfrak{B}$, deren zugehörige Urbilder den Parameterwerten t_1 und t_2 entsprechen und ist $t_1 < t_2$, so sagen wir: Q_1 liege *hinter* Q_2 und Q_2 liege *vor* Q_1; ferner: Q_2 sei *Vorderpunkt* von Q_1. Die Bilder von $t = 0$ und $t = 1$ heißen *Anfangs-* und *Endpunkt* von $\mathfrak{B}$. Da eindeutige stetige Streckenbilder zugelassen sind, müßte genauer zwischen den Bild*punkten* und den in ihnen vereinigt liegenden *Stellen* unterschieden werden. Da indes im folgenden Mißverständnisse in dieser Hinsicht ausgeschlossen sind, werden wir immer nur von Punkten sprechen.

---

[6]) Hjelmslev (2).

1, 2. Einige Bemerkungen über *lineare Unterräume* und *lineare Halbräume.* Ein k-dimensionaler linearer Unterraum des R_n sei als R_k bezeichnet, $k = 0, \ldots, n-1$. Für $k = 0$ stellt der R_k einen Punkt, für $k = n-1$ eine Hyperebene dar. Ein k-dimensionaler linearer Halbraum heiße Halb-R_k oder HR_k, $k = 1, \ldots, n$. Dabei ist zu beachten, daß im projektiven R_n ein R_k durch einen in ihm enthaltenen R_{k-1} nicht im *Ganzen* genommen in zwei Teile zerlegt werden kann. Nur innerhalb eines beschränkten n-dimensionalen Teilgebietes des R_n, welches einen nicht leeren Durchschnitt mit dem betreffenden R_k und R_{k-1} besitzt, kann man von den Halbräumen HR_k des R_k sprechen, sowie von den zwei verschiedenen „*Seiten*", welche der R_{k-1} im R_k bestimmt. Bei unseren Betrachtungen wird der Begriff des linearen Halbraums meist nur in Hinblick auf die Umgebung eines Punktes vorkommen. (Vgl. Tangentialschmieghalbraum, Nr. 1, 4.) Unter einem Halb-R_k in der Umgebung eines Punktes Q werden wir dann etwa eine (beliebig kleine) k-dimensionale Halbkugel verstehen, bei welcher Q der Mittelpunkt der $(k-1)$-dimensionalen Begrenzungskugel ist.

Für den R_k, der durch einen gegebenen mit S bezeichneten R_{k-1} und einen nicht in S enthaltenen gegebenen Punkt P „aufgespannt", d. h. bestimmt wird, sei die Bezeichnung $R_k(S, P)$ eingeführt. Entsprechend werde der HR_k, welcher von S begrenzt wird und den Punkt P im Innern enthält, als $HR_k(S, P)$ bezeichnet.

Der projektive R_n kann als kompakter Umgebungsraum aufgefaßt werden; es ist dann in ihm insbesondere der Begriff der *Konvergenz* einer Folge von Punkten Q_ϱ gegen einen Punkt Q erklärt (in Zeichen: $Q = \lim_{\varrho \to \infty} Q_\varrho$ oder $Q_\varrho \to Q$). Auf dem Konvergenzbegriff für die Punkte baut sich der Konvergenzbegriff für die höherdimensionalen Räume auf: Ein R_k heißt Limes einer Folge von k-dimensionalen linearen Unterräumen $R_k^{(\varrho)}$, wenn irgend $(k+1)$ nicht in einem R_{k-1} gelegene Punkte des R_k Limiten von geeignet gewählten Punkten der $R_k^{(\varrho)}$ sind; in Zeichen: $R_k = \lim_{\varrho \to \infty} R_k^{(\varrho)}$ oder $R_k^{(\varrho)} \to R_k$. Entsprechend ist die Bezeichnung eines HR_k als Limes einer Folge von $HR_k^{(\varrho)}$ zu verstehen.

Schließlich sei noch erklärt, was wir unter „*Schnitt-*" und „*Stützpunkten*" eines Bogens $\mathfrak{B}$ mit einer Hyperebene $\mathfrak{H}$ verstehen wollen. Dabei erinnern wir an die Festsetzung, daß die von uns betrachteten Bogen *keine hyperebenen Teilbogen* enthalten sollen. Ist nun P ein gemeinsamer Punkt von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ und insbesondere ein „innerer" Punkt von $\mathfrak{B}$ (d. h. kein Endpunkt von $\mathfrak{B}$), dann bestehen zwei Möglichkeiten: *Entweder* hat jede noch so kleine beiderseitige Umgebung von P auf $\mathfrak{B}$ mit dem Innern eines *jeden* der zwei Halb-R_n, welche $\mathfrak{H}$ bestimmt, Punkte

gemeinsam, *oder* es gibt eine beiderseitige Umgebung von P auf $\mathfrak{B}$, die nur mit *einem* dieser beiden Halb-R_n bzw. mit seiner Begrenzung Punkte gemeinsam hat. Im ersten Fall nennen wir P *Schnittpunkt* von $\mathfrak{B}$ mit (oder auf) $\mathfrak{H}$, im zweiten Fall *Stützpunkt* von $\mathfrak{B}$ mit (oder auf) $\mathfrak{H}$.

1, 3. Bei den meisten Beweisen unserer Untersuchung werden als Hilfsmittel geeignete (Zentral-)*Projektionen* des jeweils betrachteten Bogens $\mathfrak{B}$ benutzt werden. Wir wollen uns klarmachen, wie sich Bogen und lineare Räume bzw. Halbräume bei einer solchen Abbildung verhalten.

Eine Zentralprojektion ist bestimmt durch ein Projektionszentrum Z und eine Projektionshyperebene $\overline{R_{n-1}}$, die nicht mit Z inzidiert. Wir nehmen bis zu anderer Festsetzung (Nr. 1, 4 II) an, daß das *Projektionszentrum Z nicht auf dem Bogen* $\mathfrak{B}$ liege. Das Bild irgend eines von Z verschiedenen Punktes P des R_n wird erzeugt als Durchschnitt $\overline{P}$ der Geraden (Z, P) mit $\overline{R_{n-1}}$. Allgemein soll das Projektionsbild irgendeiner Punktmenge M als *Bild* $\overline{M}$ bezeichnet werden.

I. Über das Bild $\overline{\mathfrak{B}}$ des Bogens $\mathfrak{B}$ können wir folgendes aussagen: Jedem Punkt P von $\mathfrak{B}$ entspricht bei der Abbildung ein Punkt $\overline{P}$ von $\overline{\mathfrak{B}}$. Umgekehrt können einem Punkt $\overline{P}$ von $\overline{\mathfrak{B}}$ mehrere Punkte von $\mathfrak{B}$ als Urbilder zugeordnet sein; das ist nämlich dann der Fall, wenn die Gerade (Z, P) mehr als einen Punkt von $\mathfrak{B}$ enthält. Es ist also die durch die Projektion vermittelte Abbildung von $\mathfrak{B}$ auf $\overline{\mathfrak{B}}$ eindeutig; die Umkehrabbildung kann mehrdeutig sein. — Bezüglich der *Orientierung* des Bogens $\overline{\mathfrak{B}}$ setzen wir fest, daß sie bei der punktweisen Abbildung von $\mathfrak{B}$ auf $\overline{\mathfrak{B}}$ der Orientierung von $\mathfrak{B}$ entsprechen soll.

II. Von dem Projektionsbild eines linearen Raumes können wir feststellen:

a) Das Bild eines mit Z inzidierenden R_k (aus dem wir uns den Punkt Z herausgenommen denken) ist ein R_{k-1}, nämlich der Durchschnitt des betreffenden R_k mit $\overline{R_{n-1}}$; $k = 1, \ldots, n-1$.

b) Das Bild eines *nicht* mit Z inzidierenden, mit R_k^* bezeichneten R_k ist wieder ein R_k, nämlich der Durchschnitt des $R_{k+1}(R_k^*, Z)$ mit $\overline{R_{n-1}}$; $k = 0, \ldots, n-2$.

III. Aus dem unter I und II Gesagten folgt:

a) Der Bild-R_{k-1} eines mit Z inzidierenden, mit R_k^* bezeichneten $R_k\,(k = 1, \ldots, n-1)$ hat mit $\overline{\mathfrak{B}}$ *genau so viele oder weniger* Punkte gemeinsam, als R_k^* mit $\mathfrak{B}$ gemeinsam hat, und zwar weniger Punkte, sobald mindestens zwei Punkte des Durchschnitts von R_k^* und $\mathfrak{B}$ auf derselben Projektionsgeraden liegen.

b) Der Bild-R_k eines *nicht* mit Z inzidierenden, mit R_k^* bezeichneten $R_k\,(k = 1, \ldots, n-2)$ hat mit $\overline{\mathfrak{B}}$ *mindestens ebensoviele* Punkte gemeinsam als R_k^* mit $\mathfrak{B}$ gemeinsam hat. In der Tat: Weil R_k^* keine zwei Punkte

von $\mathfrak{B}$ enthalten kann, die dieselbe Projektionsgerade besitzen, — andernfalls würde R_k^* als linearer Raum den Punkt Z enthalten —, ist der Durchschnitt $\overline{D}$ von $\overline{\mathfrak{B}}$ mit $\overline{R_k^*}$ sicher nicht kleiner als der Durchschnitt D von $\mathfrak{B}$ mit R_k^*. $\overline{D}$ ist größer als D dann, wenn der $R_{k+1}(R_k^*, Z)$ mit $\mathfrak{B}$ mehr Punkte gemeinsam hat als R_k^* und darunter solche Punkte, deren Projektionsgerade nicht mit Projektionsgeraden des Durchschnitts von $\mathfrak{B}$ mit R_k^* zusammenfallen.

IV. Betrachten wir schließlich die Abbildung von linearen *Halb*räumen.

a) Es sei uns als Urbild ein Halb-R_k ($k = 1, \ldots, n-1$) in der Umgebung eines Punktes P gegeben, wobei der zugehörige Ganz-R_k *nicht* mit Z inzidieren soll; insbesondere ist also P verschieden von Z. R sei eine konvexe (im R_n) offene Obermenge von Z, P und dem Bild $\overline{P}$ von P. Nun läßt sich offenbar die den Halb-R_k definierende k-dimensionale Halbkugel so klein wählen, daß das Bild dieser Halbkugel noch ganz im Durchschnitt von $\overline{R_{n-1}}$ und R liegt. Dieses Bild ist wieder ein Halb-R_k; er ist für die Umgebung des Punktes $\overline{P}$ gegeben und besitzt als Begrenzungs-R_{k-1} das Bild des den Urbild-HR_k begrenzenden R_{k-1}.

b) Haben wir als Urbild einen Halb-R_k ($k = 1, \ldots, n$) in der Umgebung des Projektionszentrums Z, so erkennen wir: die Projektionsgeraden, die durch die Punkte einer noch so kleinen den HR_k definierenden k-dimensionalen Halbkugel (Punkt Z ist ausgenommen) gehen, erfüllen den zugehörigen Ganz-R_k. Das Projektionsbild des HR_k fällt also zusammen mit dem Bild des zugehörigen Ganz-R_k, ist also ein R_{k-1}.

1, 4. Wir definieren jetzt für den Bogen $\mathfrak{B}$ die k-dimensionalen *vorderen* und *hinteren Tangentialschmiegräume* T_k und Tangentialschmieg*halb*räume Th_k; $k = 0, \ldots, n$.

Vorderer und hinterer T_0 wie Th_0 im Punkte Q von $\mathfrak{B}$ sei der Punkt Q selbst. Die Definition der höherdimensionalen T_k bzw. Th_k in Q an $\mathfrak{B}$ ($k = 1, \ldots, n$) erfolgt durch Induktion. Es existiere in Q der vordere und der hintere T_{k-1} an $\mathfrak{B}$, bezeichnet als v. und h. T_{k-1}^Q. Konvergiert dann jede Folge von R_k(v. T_{k-1}^Q, Q_ϱ) bzw. HR_k(v. T_{k-1}^Q, Q_ϱ), wo Q_ϱ fremd zum v. T_{k-1}^Q ist und auf $\mathfrak{B}$ vor Q liegt, während $Q_\varrho \to Q$, besitzen also alle diese Folgen den gleichen Limes, dann heißt dieser Limes der v. T_k bzw. Th_k in Q an $\mathfrak{B}$. Während die Definition des h. T_k völlig entsprechend verläuft, unterscheidet die Definition des h. Th_k die Fälle $k \equiv 0\,(2)$ und $k \equiv 1\,(2)$. Für $k \equiv 0\,(2)$ ist der h. Th_k^Q definiert als gemeinsamer Limes aller Folgen von HR_k(h. T_{k-1}^Q, Q_ϱ), wo Q_ϱ fremd zum h. T_{k-1}^Q ist und auf $\mathfrak{B}$ hinter Q liegt, während Q_ϱ gegen Q konvergiert, für $k \equiv 1\,(2)$ als der Komplementärhalb-R_k dieses Limes.

Mit der gegebenen Definition des v. und h. Th_n ist offenbar die folgende Definition äquivalent[6]): Es existiere die vordere Tangentialschmieghyperebene T_{n-1}^Q. Gibt es nun eine hinreichend kleine vordere Umgebung $\mathfrak{U}_v$ von Q auf $\mathfrak{B}$, die ganz auf *einer* Seite der v. T_{n-1}^Q liegt, dann nennen wir den von der v. T_{n-1}^Q begrenzten Halb-R_n, der $\mathfrak{U}_v$ enthält, den v. Th_n^Q. — Es existiere die h. T_{n-1}^Q. Gibt es eine hintere Umgebung $\mathfrak{U}_h$ von Q auf $\mathfrak{B}$, die ganz auf *einer* Seite der h. T_{n-1}^Q liegt, dann wird für $n \equiv 0\,(2)$ derjenige von der h. T_{n-1}^Q begrenzte Halb-R_n als h. Th_n^Q bezeichnet, der $\mathfrak{U}_h$ enthält, für $n \equiv 1\,(2)$ derjenige, der $\mathfrak{U}_h$ nicht enthält.

Wir gebrauchen ferner folgende Bezeichnungen:

Wenn im Punkte Q von $\mathfrak{B}$ v. und h. Th_ν existieren für $\nu = 1, \ldots, k$ und wenn v. und h. Th_k identisch sind, dann nennen wir den gemeinsamen Träger-R_k kurz den T_k^Q; $k = 1, \ldots, n-1$.

Wenn im Punkte Q von $\mathfrak{B}$ v. und h. Th_k existieren für $k = 1, \ldots, n-1$ und wenn für alle diese k-Werte jeweils v. und h. T_k^Q zusammenfallen, dann nennen wir den Punkt Q *differenzierbar* (auf $\mathfrak{B}$). Stimmen nicht nur v. und h. T_k^Q, sondern auch v. und h. Th_k^Q überein für jedes $k = 1, \ldots, n-1$, dann bezeichnen wir Q als *gewöhnlich differenzierbaren* Punkt von $\mathfrak{B}$, und nennen $\mathfrak{B}$ *glatt* im Punkte Q.

Es soll nun das Verhalten der T_k und Th_k bei der *Projektion* untersucht werden. Wir behandeln die beiden wichtigsten Fälle:

I. die Abbildung eines Th_k^Q, dessen zugehöriger T_k^Q zu Z fremd ist,

II. die Abbildung eines Th_k^Q, wobei das Projektionszentrum Z mit dem Punkte Q zusammenfällt.

I. Es soll also Z *fremd* sein *zum betreffenden* T_k^Q. Wir behaupten:

I, 1. *Existiert in einem Punkte Q von $\mathfrak{B}$ der v. bzw. h. Th_k, so bildet er sich bei Projektion aus einem zum v. bzw. h. T_k^Q fremden Punkt Z ab auf den, alsdann vorhandenen, v. bzw. h. Th_k in $\overline{Q}$ an $\overline{\mathfrak{B}}$; $k = 0, \ldots, n-1$.*

Beweis für den v. Th_k (der Fall des h. Th_k wird entsprechend behandelt): Für $k = 0$ ist die Behauptung richtig: $\overline{Q}$ ist das Bild von Q. Wir nehmen an, das Bild des v. T_{k-1}^Q sei der v. $T_{k-1}^{\overline{Q}}$. Dann projiziert sich der HR_k(v. T_{k-1}^Q, Q_ϱ), wo Q_ϱ ein zum v. T_{k-1}^Q fremder und zu Q hinreichend benachbarter Vorderpunkt von Q ist, in den HR_k(v. $T_{k-1}^{\overline{Q}}, \overline{Q}_\varrho$). Da nun alle Folgen von HR_k(v. T_{k-1}^Q, Q_ϱ) für $Q_\varrho \to Q$ den gleichen Limes v. Th_k^Q besitzen, haben auch alle Folgen von HR_k(v. $T_{k-1}^{\overline{Q}}, Q'_\varrho$), wo Q'_ϱ zum v. $T_{k-1}^{\overline{Q}}$ fremd, auf $\overline{\mathfrak{B}}$ vor $\overline{Q}$ liegt, und wobei $Q'_\varrho \to \overline{Q}$, den gleichen Limes, nämlich das Bild des v. Th_k^Q. Der v. $Th_k^{\overline{Q}}$ an $\overline{\mathfrak{B}}$ existiert also und ist identisch mit dem Bild des v. Th_k^Q an $\mathfrak{B}$.

[6]) Vgl. Denk (1).

I, 2. Umkehrung: *Wenn bei der Projektion des Bogens $\mathfrak{B}$ aus jedem zu Q fremden Z im Bildpunkt $\overline{Q}$ eines Punktes Q von $\mathfrak{B}$ der v. bzw. h. $Th_k^{\overline{Q}}$ an $\overline{\mathfrak{B}}$ existiert, dann existiert auch der v. bzw. h. Th_k in Q an $\mathfrak{B}$ $k = 1, \ldots, n-1$.*

Beweis für den v. Th_k: Mit dem v. $Th_k^{\overline{Q}}$ existiert definitionsgemäß auch der v. $Th_{k-1}^{\overline{Q}}$. Setzen wir im Induktionsschluß voraus, die Behauptung gelte für $k-1$, so existiert also der v. T_{k-1} in Q an $\mathfrak{B}$. Nun nehmen wir entgegen unserer Behauptung an, eine Folge von HR_k (v. T_{k-1}^{Q}, Q_ϱ), wo Q_ϱ zum v. T_{k-1}^{Q} fremd ist und auf $\mathfrak{B}$ vor Q liegt, wobei ferner $Q_\varrho \to Q$, hätte zwei verschiedene Häufungs-HR_k, die wir uns gegeben denken können als HR_k(v. T_{k-1}^{Q}, P_1) und HR_k(v. T_{k-1}^{Q}, P_2). Wir wählen dann ein Projektionszentrum Z, das folgenden Bedingungen genügt: 1. Z liegt nicht im Träger-R_k eines der beiden Häufungs-HR_k, 2. $HR_{k+1}(R_k(\text{v. } T_{k-1}^{Q}, Z), P_1) \neq HR_{k+1}(R_k(\text{v. } T_{k-1}^{Q}, Z), P_2)$. In jeder Projektionshyperebene $\overline{R_{n-1}}$ haben dann die beiden Häufungs-HR_k zwei verschiedene Bilder, die ihrerseits Häufungs-HR_k der Folge von HR_k (v. $T_{k-1}^{\overline{Q}}$, $\overline{Q}_\varrho$) sind, was sich aber nicht mit der Voraussetzung der Existenz des v. Th_k in $\overline{Q}$ an $\overline{\mathfrak{B}}$ verträgt. Es muß also in der Tat der v. $Th_k^{\overline{Q}}$ an $\mathfrak{B}$ existieren.

I, 3. Eine unmittelbare Folgerung des unter I, 1 und I, 2 Festgestellten ist der

Satz: Voraussetzung: *V. und h. Th_ν in Q an $\mathfrak{B}$ existieren für alle $\nu = 1, \ldots, k$; $k \leqq n-1$. Wir betrachten nur solche Projektionen, deren Zentrum Z nicht im v. oder h. T_k^{Q} liegt.*

Behauptung: *a) Wenn v. und h. Th_ν^{Q} jeweils identisch sind für $\nu = 1, \ldots, k$, dann sind auch v. und h. Th_ν in $\overline{Q}$ an $\overline{\mathfrak{B}}$ identisch für alle $\nu = 1, \ldots, k$.*

b) Sind bei allen Projektionen $\overline{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{B}$, die der obigen Voraussetzung genügen, v. und h. Th_ν in $\overline{Q}$ an $\overline{\mathfrak{B}}$ identisch für alle $\nu = 1, \ldots, k$, dann stimmen auch v. und h. Th_ν in Q an $\mathfrak{B}$ überein für alle $\nu = 1, \ldots, k$.

II. Nun betrachten wir Projektionen, bei welchen das *Projektionszentrum Z auf dem Bogen $\mathfrak{B}$* liegt und zwar soll Z entweder ein einfacher Endpunkt von $\mathfrak{B}$ sein, in welchem die Halbtangente existiert, oder ein einfacher innerer Punkt von $\mathfrak{B}$, in welchem vordere und hintere Halbtangente existieren und übereinstimmen. Als Bildpunkt $\overline{Z}$ von Z setzen wir den Schnittpunkt der Tangente in Z an $\mathfrak{B}$ mit der Hyperebene $\overline{R_{n-1}}$ fest; der Bogen $\overline{\mathfrak{B}}$ ist dann stetig. Wir untersuchen die Abbildung der Th_k in Z an $\mathfrak{B}$.

II, 1. *Existiert in Z an $\mathfrak{B}$ der v. bzw. h. T_k^{Z}, so projiziert er sich von Z aus in den v. bzw. h. $T_{k-1}^{\overline{Z}}$ in $\overline{Z}$ an $\overline{\mathfrak{B}}$; $k = 1, \ldots, n-1$.*

Beweis für den v. T_k^Z: Die Behauptung ist richtig für $k = 1$; denn das Bild der Tangente in Z an $\mathfrak{B}$ ist ihr Schnittpunkt $\overline{Z}$ mit $\overline{R_{n-1}}$, also der $T_0^{\overline{Z}}$ an $\overline{\mathfrak{B}}$. Wir nehmen an, das Bild des v. T_{k-1}^Z, also der Durchschnitt des v. T_{k-1}^Z mit $\overline{R_{n-1}}$, sei der v. $T_{k-2}^{\overline{Z}}$ an $\overline{\mathfrak{B}}$. Dann besitzt der R_k (v. T_{k-1}^Z, Q_ϱ), wo Q_ϱ auf $\mathfrak{B}$ vor Z liegt und zum v. T_{k-1}^Z fremd ist, als Durchschnitt mit $\overline{R_{n-1}}$ den R_{k-1} (v. $T_{k-2}^{\overline{Z}}, \overline{Q}_\varrho$). Da jede Folge von R_k (v. T_{k-1}^Z, Q_ϱ) für $Q_\varrho \to Z$ gegen den v. T_k^Z konvergiert, so muß jede Folge von R_{k-1} (v. $T_{k-2}^{\overline{Z}}, Q_\varrho'$), wo Q_ϱ' zum v. $T_{k-2}^{\overline{Z}}$ fremd ist und auf $\overline{\mathfrak{B}}$ vor $\overline{Z}$ liegt, wobei ferner $Q_\varrho' \to \overline{Z}$, konvergent sein und als Limes den Durchschnitt des v. T_k^Z mit $\overline{R_{n-1}}$ besitzen. Der v. $T_{k-1}^{\overline{Z}}$ an $\overline{\mathfrak{B}}$ existiert also und ist das Bild des v. T_k^Z an $\mathfrak{B}$. — Auf die gleiche Weise wird gezeigt, daß der h. $T_{k-1}^{\overline{Z}}$ an $\overline{\mathfrak{B}}$ existiert und das Bild des h. T_k^Z an $\mathfrak{B}$ ist.

II, 2. *Existiert in Z an $\mathfrak{B}$ der v. bzw. h. $T h_k^Z$, so projiziert er sich von Z aus in den v. bzw. h. $T_{k-1}^{\overline{Z}}$ an $\overline{\mathfrak{B}}$; $k = 1, \ldots, n$.* Dies folgt aus Nr. 1, 3 IV b.

Um zu zeigen, daß auch die Tangentialschmieg*halb*räume v. und h. $T h_{k-1}^{\overline{Z}}$ an $\overline{\mathfrak{B}}$ existieren, und um ihre Beziehung zu v. und h. $T h_k^Z$ an $\mathfrak{B}$ aufzufinden, betrachten wir nun außer dem Projektionsbild des v. und h. $T h_k^Z$ auch noch dessen Durchschnitt mit $\overline{R_{n-1}}$. Fassen wir zunächst den v. $T h_k^Z$ ins Auge ($k = 2, \ldots, n$). Nach dem vorigen ist sein Durchschnitt jedenfalls einer der beiden durch den v. $T_{k-2}^{\overline{Z}}$ im v. $T_{k-1}^{\overline{Z}}$ bestimmten Halb-R_{k-1}. Wir müssen nun zwei Fälle unterscheiden:

a) Die Hyperebene $\overline{R_{n-1}}$ ist zur v. Halbtangente in Z an $\mathfrak{B}$ so gelegen, daß der Punkt $\overline{Z}$, der Durchschnitt der v. Tangente in Z an $\mathfrak{B}$ mit $\overline{R_{n-1}}$, auf der v. Halbtangente liegt. Es muß dann ebenso der Bildpunkt $\overline{Q}_\varrho$ jedes zu Z hinreichend benachbarten Vorderpunktes Q_ϱ auf der Halbgeraden (Z, Q_ϱ) liegen. Betrachten wir nun irgendeinen $H R_k$ (v. T_{k-1}^Z, Q_ϱ); sein Durchschnitt mit $\overline{R_{n-1}}$ enthält in unserem Falle den Punkt $\overline{Q}_\varrho$, ist also der $H R_{k-1}$ (v. $T_{k-2}^{\overline{Z}}, \overline{Q}_\varrho$). Da alle Folgen von $H R_k$ (v. T_{k-1}^Z, Q_ϱ) für $Q_\varrho \to Z$ gegen den v. $T h_k^Z$ konvergieren, streben auch alle Folgen $H R_{k-1}$ (v. $T_{k-2}^{\overline{Z}}, Q_\varrho'$), wo Q_ϱ' ein zum v. $T_{k-2}^{\overline{Z}}$ fremder Vorderpunkt von $\overline{Z}$ ist, für $Q_\varrho' \to \overline{Z}$ gegen den Durchschnitt des v. $T h_k^Z$ mit $\overline{R_{n-1}}$. Der v. $T h_{k-1}^{\overline{Z}}$ an $\overline{\mathfrak{B}}$ existiert also und wird gerade durch den v. $T h_k^Z$ an $\mathfrak{B}$ aus $\overline{R_{n-1}}$ ausgeschnitten.

b) Die Hyperebene $\overline{R_{n-1}}$ nimmt eine solche Lage zur v. $T h_1^Z$ ein, daß der Punkt $\overline{Z}$ auf der Komplementärhalbgeraden der v. $T h_1^Z$ liegt. Der Bildpunkt $\overline{Q}_\varrho$ eines Punktes Q_ϱ (siehe bei a)) liegt dann ebenfalls auf der Komplementärhalbgeraden der Halbgeraden (Z, Q_ϱ). Der Durch-

schnitt des $H R_k$ (v. T_{k-1}^{Z}, Q_ϱ) mit $\overline{R_{n-1}}$ enthält also $\overline{Q}_\varrho$ nicht, ist somit der Komplementär-$H R_{k-1}$ des $H R_{k-1}$ (v. $T_{k-2}^{\overline{Z}}, \overline{Q}_\varrho$). Daraus folgt, daß der v. $T h_{k-1}^{\overline{Z}}$ auch in diesem Fall existiert, und daß er identisch ist mit dem Komplementär-$H R_{k-1}$ des Durchschnittes des v. $T h_k^Z$ mit $\overline{R_{n-1}}$.

Unter Berücksichtigung der Besonderheiten der Definition der h. $T h_k$ erkennt man, daß das entsprechende auch für den h. $T h_k^Z$ gilt: Der h. $T h_{k-1}^{\overline{Z}}$ an $\overline{\mathfrak{B}}$ existiert und je nachdem die h. Halbtangente in Z an $\mathfrak{B}$ den Punkt $\overline{Z}$ enthält oder nicht enthält, ist er der Durchschnitt oder der Komplementär-$H R_{k-1}$ des Durchschnittes des h. $T h_k^Z$ an $\mathfrak{B}$ mit $\overline{R_{n-1}}$; $k = 2, \ldots, n$.

II, 3. Umkehrung: *Existiert bei Projektion aus Z in (mindestens) einer Projektionshyperebene der v. bzw. h. $T h_{k-1}^{\overline{Z}}$ an den Bogen $\overline{\mathfrak{B}}$, so existiert auch der v. bzw. h. $T h_k^Z$ an $\mathfrak{B}$; $k = 1, \ldots, n$.*

Beweis für den v. $T h_k^Z$: Wir können im Induktionsschluß voraussetzen, daß der v. T_{k-1}^{Z} existiere. Würde es nun zwei verschiedene Häufungs-$H R_k$ einer Folge von $H R_k$ (v. T_{k-1}^{Z}, Q_ϱ) geben, wobei Q_ϱ vor Z und $Q_\varrho \to Z$, dann wären auch zwei verschiedene Häufungs-$H R_{k-1}$ der Folge der $H R_{k-1}$ (v. $T_{k-2}^{\overline{Z}}, \overline{Q}_\varrho$) vorhanden (vgl. Nr. 1, 3; II a), was nach Voraussetzung nicht möglich ist.

II, 4. Als Folgerung aus II, 2 und II, 3 erhalten wir den

Satz: Voraussetzung: *V. und h. $T h_\nu$ im Punkte Z von $\mathfrak{B}$ existieren für alle $\nu = 1, \ldots, k$; $1 \leqq k \leqq n$. Projektionszentrum sei Z.*

Behauptung: a) *Wenn v. und h. $T h_\nu^Z$ an $\mathfrak{B}$ identisch sind für alle $\nu = 1, \ldots, k$, dann sind auch v. und h. $T h_\nu^{\overline{Z}}$ an $\overline{\mathfrak{B}}$ identisch für alle $\nu = 1, \ldots, k-1$.*

b) *Wenn in (mindestens) einer Projektion $\overline{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{B}$ v. und h. $T h_\nu$ in $\overline{Z}$ an $\overline{\mathfrak{B}}$ identisch sind für $\nu = 0, \ldots, k-1$, dann stimmen auch v. und h. $T h_\nu$ in Z an $\mathfrak{B}$ überein für $\nu = 1, \ldots, k$.*

1, 5. Es folgen einige Feststellungen über „Schneiden" und „Stützen" (Definition: Nr. 1, 1) von gewissen ausgezeichneten Hyperebenen.

a) Voraussetzung: *Q sei ein gewöhnlich differenzierbarer Punkt von $\mathfrak{B}$. V. und h. $T h_n^Q$ sollen existieren.*

Behauptung: *Gleichbedeutend sind die Aussagen* 1A) *und* 2A), *sowie* 1B) *und* 2B).

1A) *v. $T h_n^Q =$ h. $T h_n^Q$.*

1B) *v. $T h_n^Q \neq$ h. $T h_n^Q$.*

2A) $n \equiv 1\,(2)$: *Q ist Schnittpunkt von $\mathfrak{B}$ auf T_{n-1}^Q.*
$n \equiv 0\,(2)$: „ *Stützpunkt* „

2B) $n \equiv 1\,(2)$: *Q ist Stützpunkt von $\mathfrak{B}$ auf T_{n-1}^Q.*
$n \equiv 0\,(2)$: „ *Schnittpunkt* „

b) Es sei Q ein (innerer) gewöhnlich differenzierbarer Punkt von $\mathfrak{B}$. Wenn wir $\mathfrak{B}$ aus einem nicht in T_{n-1}^{Q} gelegenen Punkt Z projizieren, so stimmen im Bild nach Nr. 1, 4 I, 3 v. und h. $T h_{n-1}^{\overline{Q}}$ an $\overline{\mathfrak{B}}$ überein, das heißt nach a), der Punkt $\overline{Q}$ ist im Falle $n \equiv 1\,(2)$ Stützpunkt, im Falle $n \equiv 0\,(2)$ Schnittpunkt von $\overline{\mathfrak{B}}$ mit $T_{n-2}^{\overline{Q}}$.

c) Voraussetzung: *Q sei (innerer) gewöhnlich differenzierbarer Punkt von $\mathfrak{B}$.*

Behauptung: *Jede den T_{n-2}^{Q} enthaltende, aber von T_{n-1}^{Q} verschiedene Hyperebene $\mathfrak{H}$ stützt $\mathfrak{B}$ in Q im Falle $n \equiv 1\,(2)$ und schneidet $\mathfrak{B}$ in Q im Falle $n \equiv 0\,(2)$.*

Beweis: Nach Definition von v. und h. $T h_{n-1}$ gibt es eine (hinreichend kleine) vordere Umgebung $\mathfrak{U}_v$ von Q auf $\mathfrak{B}$, welche auf derselben Seite von $\mathfrak{H}$ wie die v. $T h_{n-1}^{Q}$ liegt, und eine hintere Umgebung $\mathfrak{U}_h$ von Q auf $\mathfrak{B}$, welche für $n \equiv 1\,(2)$ auf derselben, für $n \equiv 0\,(2)$ auf der entgegengesetzten Seite von $\mathfrak{H}$ liegt, wie die h. $T h_{n-1}^{Q}$. Da nach Voraussetzung v. und h. $T h_{n-1}^{Q}$ übereinstimmen, liegen $\mathfrak{U}_v$ und $\mathfrak{U}_h$ für $n \equiv 1\,(2)$ auf der gleichen Seite, für $n \equiv 0\,(2)$ auf verschiedenen Seiten von $\mathfrak{H}$, woraus die Behauptung folgt.

1, 6. Schließlich sei noch eine in der zweiten Mitteilung benutzte Projektionseigenschaft erwähnt:

Voraussetzung: *Im Punkte Q von $\mathfrak{B}$ existiere der v. $T h_k^{Q}$ für $k = 1, \ldots, n-1$.*

Behauptung: *Bei Projektion aus einem nicht in der v. T_{n-1}^{Q} gelegenen Punkt Z liegt das Bild einer hinreichend kleinen vorderen Umgebung von Q auf $\mathfrak{B}$ in dem Bild der v. $T h_{n-1}^{Q}$.*

In der Tat: Nach Definition der v. $T h_{n-1}$ gibt es eine vordere Umgebung $\mathfrak{U}_v$ von Q auf $\mathfrak{B}$, welche auf derselben Seite der R_{n-1} (v. T_{n-2}^{Q}, Z) liegt („Seite" ist hier für die Umgebung von Q verstanden) wie die v. $T h_{n-1}^{Q}$. Daraus folgt aber die Behauptung.

Folgerung: *Nehmen wir als Projektionshyperebene die v. T_{n-1}^{Q}, so liegt das Bild einer hinreichend kleinen vorderen Umgebung von Q auf $\mathfrak{B}$ stets in der v. $T h_{n-1}^{Q}$, welches nicht in T_{n-1}^{Q} gelegene Projektionszentrum Z wir auch wählen.*

Nehmen wir dagegen eine von der v. T_{n-1}^{Q} verschiedene, den v. T_{n-2}^{Q} enthaltende Hyperebene $\mathfrak{H}$ als Projektionshyperebene, so liegt, je nach der Lage des (nicht in T_{n-1}^{Q} und nicht in $\mathfrak{H}$ gelegenen) Projektionszentrums Z, das Bild einer hinreichend kleinen vorderen Umgebung von Q auf $\mathfrak{B}$ in der Hyperebene $\mathfrak{H}$ auf der einen oder auf der anderen Seite des v. T_{n-2}^{Q}.

(Es kommt darauf an, in welchem der vier von $\mathfrak{H}$ und der v. T_{n-1}^{Q} gebildeten Keile der Punkt Z liegt.)

1, 7. Bei den späteren Betrachtungen wird als eindimensionaler Grenzraum neben der Tangente noch eine etwas allgemeiner definierte Gerade benutzt, nämlich die *Grenzsekante*. Unter einer Grenzsekante g im Punkte Q eines Bogens $\mathfrak{B}$ verstehen wir dabei den Limes einer Folge von Geraden g_ϱ, wobei g_ϱ durch zwei auf B auf *verschiedenen* Seiten von Q gelegene Punkte $Q_\varrho^{(1)}, Q_\varrho^{(2)}$ geht und $Q_\varrho^{(1)} \to Q, Q_\varrho^{(2)} \to Q$.

Für die Grenzsekante gilt folgender für später wichtige

Satz: *In jedem inneren Punkte Q von $\mathfrak{B}$, in welchem die Tangente an $\mathfrak{B}$ existiert (d. h. in welchem v. und h. Halbtangente existieren und übereinstimmen), gibt es nur eine einzige Grenzsekante g, und diese fällt zusammen mit der Tangente t in Q an $\mathfrak{B}$.*

Beweis: Für ebene Bogen stammt der Satz von Herrn Hjelmslev[7]). Durch Induktion ergibt sich daraus die Behauptung für höherdimensionale Grundräume R_n in folgender Weise: Wir nehmen an, es gäbe in Q eine Grenzsekante g, die nicht mit der Tangente t übereinstimmt. Nun wählen wir ein Projektionszentrum Z, das nicht in der von den Geraden g und t aufgespannten Ebene liegt. In einer Projektionshyperebene $\overline{R_{n-1}}$ ist dann das Bild $\bar{g}$ von g verschieden von dem Bild $\bar{t}$ von t. Die Gerade $\bar{t}$ ist zufolge Nr. 1, 4 I, 1 die Tangente in $\overline{Q}$ an $\overline{\mathfrak{B}}$. Mit denselben Überlegungen, wie sie in Nr. 1, 4 I, 1 angewandt wurden, erkennt man, daß $\bar{g}$ eine Grenzsekante von $\overline{\mathfrak{B}}$ in $\overline{Q}$ ist. Da unser Satz nach Induktionsannahme im R_{n-1} bereits anwendbar ist, muß also $\bar{g}$ mit $\bar{t}$ übereinstimmen. Damit haben wir einen Widerspruch.

§ 2.

Bogen endlicher und Bogen n-ter Ordnung im R_n.

2, 1. Unter der *Ordnung* eines Bogens $\mathfrak{B}$ verstehen wir die *lineare* Ordnung von $\mathfrak{B}$, welche als die maximale Mächtigkeit des Durchschnittes von $\mathfrak{B}$ mit den Hyperebenen des R_n erklärt ist. Dabei wird jeder Punkt mit seiner Vielfachheit auf $\mathfrak{B}$ gezählt. Die *Ordnung eines Punktes Q* von $\mathfrak{B}$ ist erklärt als das Minimum der Ordnungen aller Umgebungen von Q auf $\mathfrak{B}$.

Im folgenden (Nr. 2, 2 bis 2, 4) seien einige später benutzte Eigenschaften der *Bogen endlicher* (bzw. beschränkter) *Ordnung* abgeleitet, also derjenigen Bogen, welche mit jeder Hyperebene nur endlich (bzw. beschränkt) viele Punkte gemeinsam haben. Als Beweismittel verwenden wir die Projektion, wie sie in Nr. 1, 3 und Nr. 1, 4 untersucht wurde. Das *Projektionszentrum* Z wird dabei teils außerhalb des betreffenden Bogens $\mathfrak{B}$ gewählt, teils wird es auf den Bogen $\mathfrak{B}$ selbst verlegt und soll

[7]) Hjelmslev (1), S. 447.

dann, falls nichts anderes bemerkt wird, stets entweder ein einfacher Endpunkt von $\mathfrak{B}$ sein, (in welchem die Tangente existiert[8]), oder ein einfacher innerer Punkt von $\mathfrak{B}$, in welchem v. und h. Halbtangente (existieren [8]) und) übereinstimmen.

2,2. Über das Projektionsbild $\overline{\mathfrak{B}}$ eines Bogens $\mathfrak{B}$ von endlicher Ordnung läßt sich folgendes aussagen.

a) $\overline{\mathfrak{B}}$ *ist wieder von endlicher Ordnung.*

In der Tat: Hätte ein in der Projektionshyperebene $\overline{R_{n-1}}$ enthaltener, mit R_{n-2}^* bezeichneter R_{n-2} mit $\overline{\mathfrak{B}}$ unendlich viele Punkte gemeinsam, dann würde die Hyperebene (R_{n-2}^*, Z) den Bogen $\mathfrak{B}$ ebenfalls in unendlich vielen Punkten treffen.

b) *Ist $\mathfrak{B}$ von beschränkter Ordnung k ($k \geqq n$), dann besitzt $\overline{\mathfrak{B}}$, falls das Projektionszentrum Z auf $\mathfrak{B}$ liegt, höchstens die Ordnung $(k-1)$; falls das Projektionszentrum Z nicht auf $\mathfrak{B}$ liegt, höchstens die Ordnung k.*

Beweis: In beiden Fällen sind wir von vornherein sicher, daß $\overline{\mathfrak{B}}$ von beschränkter Ordnung ist (vgl. a)). Behandeln wir den ersten Fall, in welchem Z auf $\mathfrak{B}$ liegt. Wir nehmen entgegen unserer Behauptung an, $\overline{\mathfrak{B}}$ sei von m-ter Ordnung, wobei $m > k-1$. Es gibt dann einen in $\overline{R_{n-1}}$ gelegenen R_{n-2}, welcher m Punkte mit $\overline{\mathfrak{B}}$ gemeinsam hat und zwar läßt sich nach dem Reduktionssatz von Marchaud[9]) insbesondere ein solcher R_{n-2} angeben, dessen m mit $\overline{\mathfrak{B}}$ gemeinsame Punkte alle von $\overline{Z}$ verschieden sind. Dieser R_{n-2} heiße $\mathfrak{R}$. Nach Nr. 1,3 III a (— die Abänderung dieses Satzes für den Fall, daß Z auf $\mathfrak{B}$ liegt, ist ohne weiteres ersichtlich —) hat dann aber die Hyperebene $(\mathfrak{R}, Z)$ mit $\mathfrak{B}$ mindestens $(m+1)$ (also mehr als k) Punkte gemeinsam, was nach Voraussetzung unmöglich ist. Ebenso ergibt sich die Behauptung im zweiten Fall.

2,3. Auf Grund der Bemerkung Nr. 2,2a läßt sich der folgende Existenzsatz, der für den Fall der Ebene von Rosenthal bewiesen wurde, sofort von der Ebene auf den R_n übertragen[10]).

Existenzsatz: *In jedem inneren Punkte Q eines Bogens $\mathfrak{B}$ von endlicher Ordnung existiert sowohl der vordere wie der hintere Th_k für $k = 1, \ldots, n-1$, im Anfangspunkt der vordere, im Endpunkt der hintere Th_k.*

Zum Beweis der Behauptung im Falle $k = 1$ wenden wir Projektion aus einem beliebigen, von Q verschiedenen Punkte Z an. Das Bild $\overline{\mathfrak{B}}$ von endlicher Ordnung besitzt im Punkte $\overline{Q}$ nach Induktionsannahme v.

---

[8]) Vgl. Nr. 2, 3.

[9]) Marchaud (1), S. 79; Haupt (2), S. 18.

[10]) Vgl. Rosenthal (1), S. 273; Marchaud (1), S. 83—84.

und h. Halbtangente. Nach Nr. 1, 4 I, 2 existiert somit auch v. und h. Halbtangente in Q an $\mathfrak{B}$.

Zum Beweis der Existenz des v. (h). Th_k^Q für $k = 2, \ldots, n-1$ projizieren wir aus dem Punkte Q selbst. Stimmen in Q vordere und hintere Halbtangente nicht überein, so läßt man den hinter (vor) Q liegenden Teil von $\mathfrak{B}$ ganz außer Betracht. $\overline{Q}$ ist dann definitionsgemäß der Durchschnitt der Tangente in Q an $\mathfrak{B}$ mit der Projektionshyperebene $\overline{R_{n-1}}$. Nach Induktionsannahme existiert in $\overline{Q}$ an das Bogenbild $\overline{\mathfrak{B}}$, welches von endlicher Ordnung ist, der v. (h.) Th_k für $k = 1, \ldots, n-2$. Daraus folgt nach Nr. 1, 4 II, 3 die Existenz des v. (h.) Th_k in Q an $\mathfrak{B}$ für $k = 2, \ldots, n-1$.

Es sei noch an den Satz erinnert: Bei Bogen endlicher Ordnung ist die Menge aller Punkte, in welchen vordere und hintere Halbtangente nicht übereinstimmen, höchstens abzählbar[10]). Die übrigen Punkte liegen also dicht auf $\mathfrak{B}$.

2, 4. a) Der Existenzsatz Nr. 2, 3 gilt auch für den Fall $k = n$, d. h.: *In jedem inneren Punkte Q eines Bogens $\mathfrak{B}$ von endlicher Ordnung existiert der v. und der h. Th_n, im Anfangspunkt der v., im Endpunkt der h. Th_n.*

In der Tat: Weil $\mathfrak{B}$ von endlicher Ordnung ist, gibt es eine vordere (hintere) Umgebung $\mathfrak{U}$ von Q auf $\mathfrak{B}$, welche mit der v. (h.) Th_{n-1} in Q an $\mathfrak{B}$ außer Q keinen Punkt gemeinsam hat. Daraus folgt aber die Behauptung (siehe Definition von v. und h. Th_n in Nr. 1, 4; Seite 512).

b) Wir erinnern an Satz 1, 5a, der den Zusammenhang zwischen der Übereinstimmung bzw. Nichtübereinstimmung von v. und h. Th_n^Q und dem Schneiden oder Stützen der T_{n-1}^Q ausdrückte. Auf Bogen endlicher Ordnung angewandt, fällt bei diesem Satz die Voraussetzung der Existenz von v. und h. Th_n^Q als von selbst erfüllt weg.

c) Bei Berücksichtigung von Satz 1, 5a, sowie der Sätze 1, 4 II, 2 und 4, ergibt sich für die Projektion die Feststellung:

Es sei Q ein (innerer) gewöhnlich differenzierbarer Punkt eines Bogens $\mathfrak{B}$ von endlicher Ordnung. Bei Projektion aus Q besteht zwischen Bild und Urbild die Beziehung: Ist Q Schnittpunkt von T_{n-1}^Q mit $\mathfrak{B}$, so ist $\overline{Q}$ Stützpunkt von $T_{n-2}^{\overline{Q}}$ auf $\overline{\mathfrak{B}}$; ist Q Stützpunkt von T_{n-1}^Q auf $\mathfrak{B}$, so ist $\overline{Q}$ Schnittpunkt von $T_{n-2}^{\overline{Q}}$ mit $\overline{\mathfrak{B}}$.

2, 5. Unter den Bogen endlicher Ordnung greifen wir nun die Bogen der niedrigsten, also n-ten Ordnung heraus, d. h. diejenigen Bogen, welche von irgendeiner Hyperebene in maximal n Punkten getroffen werden. Diese Bogen besitzen, wie schon Herr Hjelmslev in seiner fundamentalen Arbeit: „Introduction à la théorie des suites monotones“[11]) gezeigt hat,

[11]) Hjelmslev (2).

in allen Grundräumen R_n die gleiche Struktur, — wie sich denn die hier in Frage kommenden Eigenschaften bereits am Falle $n = 2$ aufzeigen lassen. Auch das Ergebnis unserer Untersuchungen bestätigt wieder die völlige Gleichartigkeit aller Bogen n-ter Ordnung.

Es seien nun (Nr. 2, 6 bis 2, 9) diejenigen Eigenschaften der Bogen n-ter Ordnung zusammengestellt, die bei den Untersuchungen der vorliegenden ersten Mitteilung benötigt werden.

2, 6. Unmittelbar aus der Definition der Bogen n-ter Ordnung ergibt sich: Ein Bogen $\mathfrak{B}$ von n-ter Ordnung kann mit einem R_k nicht mehr als $(k+1)$ verschiedene Punkte gemeinsam haben; $k = 1, \ldots, n-2$. Andernfalls nämlich ließe sich eine Hyperebene konstruieren, welche mit $\mathfrak{B}$ mindestens $(n+1)$ verschiedene Punkte gemeinsam hätte, was der Definition der Bogen n-ter Ordnung widerspricht.

2, 7. Zum Beweis der weiteren Sätze benutzen wir Projektion. Bezüglich des Projektionsbildes $\overline{\mathfrak{B}}$ eines Bogens $\mathfrak{B}$ von n-ter Ordnung entnehmen wir dem Ergebnis von Nr. 2, 2 b: Ist das Projektionszentrum Z ein innerer (einfacher) Punkt von $\mathfrak{B}$, in welchem die Tangente existiert, oder ein (einfacher) Endpunkt von $\mathfrak{B}$, dann besitzt das Bild $\overline{\mathfrak{B}}$ die Ordnung $(n-1)$; liegt Z nicht auf $\mathfrak{B}$, dann hat $\overline{\mathfrak{B}}$ entweder die Ordnung $(n-1)$ oder die Ordnung n.

Mit Hilfe dieser Feststellung können wir durch Induktionsschluß die folgenden Sätze beweisen:

Satz a): Voraussetzung: *Es sei Q ein gewöhnlich differenzierbarer Punkt eines Bogens $\mathfrak{B}$ von n-ter Ordnung.*

Behauptung: *Ist $n \equiv 1\,(2)$, dann ist Q Schnittpunkt von T^Q_{n-1} mit $\mathfrak{B}$; ist $n \equiv 0\,(2)$, dann ist Q Stützpunkt von T^Q_{n-1} mit $\mathfrak{B}$. Mit anderen Worten: V. und h. Th_n in Q an $\mathfrak{B}$ stimmen überein* (vgl. Nr. 2, 4 b).

Beweis: In der Ebene ist in der Tat jede Tangente an einen Konvexbogen Stützgerade. Im Induktionsschluß können wir daher annehmen, die Behauptung gelte im R_{n-1} als Grundraum. Im R_n projizieren wir aus Q in eine Hyperebene $\overline{R_{n-1}}$. Würden nun v. und h. Th_n in Q an $\mathfrak{B}$ nicht übereinstimmen, dann wären auch v. und h. Th_{n-1} in $\overline{Q}$ an $\overline{\mathfrak{B}}$ verschieden (1, 4). Da aber $\overline{Q}$ gewöhnlich differenzierbar und $\overline{\mathfrak{B}}$ von $(n-1)$-ter Ordnung ist, sind nach Induktionsannahme v. und h. Th_{n-1} in $\overline{Q}$ an $\overline{\mathfrak{B}}$ identisch. Die Behauptung besteht also auch im R_n zu Recht.

Dieser Satz a) mit der Feststellung Nr. 1, 5 c zusammengefaßt, ergibt den

Satz b): Voraussetzung: *Q sei ein gewöhnlich differenzierbarer Punkt eines Bogens $\mathfrak{B}$ von n-ter Ordnung im R_n.*

Behauptung: *Im Falle $n \equiv 1\,(2)$ ist die Tangentialschmieghyperebene T^Q_{n-1} in Q an $\mathfrak{B}$ die einzige unter allen, den $(n-2)$-dimensionalen*

Tangentialschmiegraum T_{n-2} in Q an $\mathfrak{B}$ enthaltenden Hyperebenen, welche $\mathfrak{B}$ in Q schneidet, im Falle $n \equiv 0\,(2)$ die einzige, welche $\mathfrak{B}$ in Q stützt[12]).

Satz c) *Ein Bogen $\mathfrak{B}$ von n-ter Ordnung besitzt keinen mehrfachen Punkt, ist also ein-eindeutiges Streckenbild*[13]).

Beweis: Für die Konvexbogen der Ebene gelte der Satz als richtig. Wir nehmen an, er gelte auch für den R_{n-1} als Grundraum. Im R_n projizieren wir aus einem auf $\mathfrak{B}$ liegenden Punkt Z (siehe die in Nr. 2, 1 angegebenen Bedingungen für Z). Gäbe es auf $\mathfrak{B}$ einen mehrfachen Punkt, dann enthielte auch das Projektionsbild $\overline{\mathfrak{B}}$ von $(n-1)$-ter Ordnung einen mehrfachen Punkt, was nach Induktionsannahme nicht vorkommen kann.

2, 8. Die aus einem Punkt Q eines Bogens $\mathfrak{B}$ von n-ter Ordnung vorgenommene Projektion hat die Besonderheit an sich, daß die von ihr zwischen dem Urbild $\mathfrak{B}$ und dem Bild $\overline{\mathfrak{B}}$ vermittelte Abbildung *ein-eindeutig* ist. In der Tat: Nach Nr. 2, 6 enthält jede von der Tangente in Q verschiedene Projektionsgerade nur einen einzigen Punkt von $\mathfrak{B}\,(+Q)$. Da ferner nach Nr. 2, 7 c der Bogen $\overline{\mathfrak{B}}$ keinen mehrfachen Punkt besitzt, kann auch die Tangente in Q an $\mathfrak{B}$ nur den einen Urbildpunkt Q enthalten. Eine Ausnahme ist höchstens dann möglich, wenn Q ein Endpunkt von $\mathfrak{B}$ ist. In diesem Falle kann die Tangente in Q an $\mathfrak{B}$ noch den anderen Endpunkt von $\mathfrak{B}$ enthalten; $\overline{\mathfrak{B}}$ ist dann eine geschlossene Kurve.

Die Ein-Eindeutigkeit zwischen $\mathfrak{B}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ zusammen mit der Eigenschaft, daß $\mathfrak{B}$ keinen mehrfachen Punkt enthält, wollen wir auch durch den Ausdruck kennzeichnen: Der von den Projektionsgeraden gebildete Kegelmantel ist *schlicht-projizierend*. — Entsprechend kann man für die Aussage, das Bild $\overline{\mathfrak{B}}$ sei von $(n-1)$-ter Ordnung, die Wendung gebrauchen: Der Projektionskegelmantel $K_{(Q,\,\mathfrak{B})}$ ist von $(n-1)$-ter Ordnung (Ordnung eines Kegelmantels = maximale Anzahl der (verschiedenen) Erzeugenden, die in irgendeiner durch die Kegelspitze gehenden Hyperebene enthalten sind, oder: Ordnung der Schnittkurve des Kegelmantels mit irgendeiner die Kegelspitze nicht enthaltenden Hyperebene).

Bei schlicht-projizierendem Projektionskegelmantel gilt für beliebige Bogen der Satz Nr. 1, 3 III a in der folgenden verschärften Form:

Satz: Voraussetzung: *Ein Bogen $\mathfrak{B}$ werde aus einem einfachen inneren Punkt, in welchem die Tangente existiert, oder aus einem einfachen Endpunkt in die Hyperebene $\overline{R_{n-1}}$ projiziert; der betreffende Projektionskegelmantel sei schlicht-projizierend.*

Behauptung: *Ein mit dem Projektionszentrum Z inzidierender R_k hat, wenn Z ein innerer Punkt von $\mathfrak{B}$ ist, mit $\overline{\mathfrak{B}}$ außer $\overline{Z}$ genau so viele*

[12]) Für den Fall $n = 3$ vgl. Marchaud (1), S. 103.

[13]) Vgl. Hjelmslev (2), S. 44; für $n = 2$: S. 4.

Punkte gemeinsam, als sein Bild-R_{k-1} mit $\overline{\mathfrak{B}}$ außer $\overline{Z}$ gemeinsam hat; ist Z ein Endpunkt von $\mathfrak{B}$, dann kann der betreffende R_k außerdem noch den anderen Endpunkt von $\mathfrak{B}$ enthalten; $k = 2, \ldots, n-1$.

Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich nun für die Bogen $\mathfrak{B}$ von n-ter Ordnung Sätze, welche die maximale Höchstzahl der gemeinsamen Punkte von $\mathfrak{B}$ mit gewissen R_k bestimmen, von der Ebene aus auf den R_n verallgemeinern. Ein Beispiel ist der folgende Satz:

2,9. Voraussetzung: *Es sei Q ein gewöhnlich differenzierbarer Punkt eines Bogens $\mathfrak{B}$ von n-ter Ordnung oder ein Endpunkt von $\mathfrak{B}$.*

Behauptung: *Der Tangentialschmiegraum T_k in Q an $\mathfrak{B}$ enthält, wenn Q innerer Punkt von $\mathfrak{B}$ ist, außer Q keinen weiteren Punkt von $\mathfrak{B}$, wenn Q Endpunkt ist, höchstens noch den anderen Endpunkt; $k = 1, \ldots, n-1$.*

Beweis: Für die Konvexbogen der Ebene ist der Satz geläufig. Seine Gültigkeit im R_n wurde bezüglich der Tangente in Q an $\mathfrak{B}$ schon in Nr. 2,8 bemerkt. Zum Beweis des Satzes für die übrigen T_k ($k = 2, \ldots, n-1$) wendet man Projektion aus Q an. In der Projektionshyperebene gilt für den T_{k-1} in $\overline{Q}$ an $\overline{\mathfrak{B}}$ der Satz nach Induktionsannahme; $k = 1, \ldots, n-2$. Daraus folgt aber nach dem Satz Nr. 2,8 die Richtigkeit unserer Behauptung im R_n.

§ 3.

Anfügungssatz.

3,1. Mit Hilfe der in § 1 und § 2 aufgeführten Tatsachen soll nun ein Kriterium gewonnen werden dafür, daß im R_n die Summe zweier Bogen n-ter Ordnung selbst von n-ter Ordnung ist. Zu diesem Zweck stellen wir zunächst ein *Anfügungskriterium* im Kleinen auf.

Voraussetzung: *Es seien $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ zwei Bogen im R_n von n-ter Ordnung, welche den Anfangspunkt F von $\mathfrak{D}$ und den Endpunkt F von $\mathfrak{C}$ gemeinsam haben: $\mathfrak{C} \dotplus \mathfrak{D} = \mathfrak{B}$. Es sei F gewöhnlich differenzierbar auf $\mathfrak{B}$.*

Behauptung: *Notwendig und hinreichend dafür, daß der Ansatzpunkt F auf $\mathfrak{B}$ die Ordnung n besitzt, ist das Erfülltsein der „Windungsbedingung": Der Ansatzpunkt F ist Stützpunkt von $\mathfrak{B}$ mit der Tangentialschmieghyperebene T_{n-1} in F an $\mathfrak{B}$ falls $n \equiv 0\,(2)$, und Schnittpunkt von $\mathfrak{B}$ mit T_{n-1} in F an $\mathfrak{B}$ falls $n \equiv 1\,(2)$; mit anderen Worten: V. und h. Th_n in F an $\mathfrak{B}$ stimmen überein.*

3,2. Das vorstehende Anfügungskriterium ist *notwendig* zufolge Nr. 2,7a. Wir haben also nur noch zu zeigen, daß es auch *hinreichend* ist. Diesen Nachweis wollen wir mit Hilfe vollständiger Induktion erbringen. Für $n = 2$, d. h. für Konvexbogen in der Ebene, kann die Aussage unseres Kriteriums als bekannt gelten: Werden zwei Konvexbogen

so aneinandergefügt, daß ihre Summe $\mathfrak{B}$ im Ansatzpunkt F eine Tangente besitzt, so ist F dann von zweiter Ordnung, wenn diese Tangente $\mathfrak{B}$ nicht schneidet, sondern stützt. Wir können uns daher sogleich dem eigentlichen Induktionsschluß zuwenden.

Es ist uns im R_n ($n \geqq 3$) eine Bogensumme $\mathfrak{B}$ gegeben von der Art, wie sie unser Kriterium fordert: $\mathfrak{B}$ ist die Summe der beiden Bogen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ von n-ter Ordnung; im Ansatzpunkt F stimmen v. und h. Th_k an $\mathfrak{B}$ überein für $k = 1, \ldots, n$. Zu zeigen ist, daß F auf $\mathfrak{B}$ die Ordnung n besitzt.

Wir projizieren $\mathfrak{B}$ von F aus zentral auf eine F nicht enthaltende Hyperebene $\overline{R_{n-1}}$. Das Projektionsbild $\overline{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{B}$ setzt sich zusammen aus den Bogen $\overline{\mathfrak{C}}$ und $\overline{\mathfrak{D}}$, den Bildern von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$, die nach Nr. 2, 7 beide die Ordnung $(n-1)$ besitzen. Im Ansatzpunkt $\overline{F}$ stimmen nach Nr. 1, 4 II, 4 v. und h. Th_k an $\overline{\mathfrak{B}}$ überein für $k = 1, \ldots, n-1$. Daher genügt $\overline{\mathfrak{B}}$ in $\overline{R_{n-1}}$ den Bedingungen unseres Kriteriums. Da dieses im R_{n-1} als Grundraum nach Induktionsannahme richtig ist, hat der Ansatzpunkt $\overline{F}$ auf $\overline{\mathfrak{B}}$ die Ordnung $(n-1)$. Es kann also auf $\mathfrak{B}$ um den Punkt F eine Umgebung $\mathfrak{U}$ abgegrenzt werden, deren Bild $\overline{\mathfrak{U}}$ von $(n-1)$-ter Ordnung ist, deren Projektionsgeraden also einen Kegelmantel $K_{(F,\mathfrak{U})}$ von $(n-1)$-ter Ordnung ergeben. Der Kegelmantel $K_{(F,\mathfrak{U})}$ ist schlicht-projizierend. In der Tat: $\overline{\mathfrak{U}}$ besitzt als Bogen $(n-1)$-ter Ordnung keinen mehrfachen Punkt. Nun ist aber $\overline{\mathfrak{U}}$ identisch mit dem Parameterbogen $\overline{\mathfrak{U}}^*$, der als Bild dem Parameterbogen $\mathfrak{U}$ entspricht. Dies ergibt sich aus der Tatsache, daß erstens niemals Teilbogen der selben einseitigen Umgebung von $\overline{F}$ auf $\overline{\mathfrak{U}}^*$ sich überlagern können (— die Kegelmäntel $K_{(F,\mathfrak{C})}$ und $K_{(F,\mathfrak{D})}$ sind schlicht-projizierend, weil $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ beide von n-ter Ordnung) und daß auch niemals eine vordere und eine hintere Umgebung von $\overline{F}$ auf $\overline{\mathfrak{U}}^*$ sich decken können (— es sind ja v. und h. $Th_1^{\overline{F}}$ an $\overline{\mathfrak{U}}$ identisch). Somit ist der Parameterbogen $\overline{\mathfrak{U}}^*$ einfach, woraus die Behauptung folgt.

Der weitere Beweis hat den folgenden Grundgedanken: Aus der Tatsache, daß $\overline{\mathfrak{U}}$ die Ordnung $(n-1)$ hat, kann wegen der Schlichtheit des Projektionskegelmantels $K_{(F,\mathfrak{U})}$ gefolgert werden, daß jede mit F inzidierende Hyperebene nur so viele Punkte mit $\mathfrak{U}$ gemeinsam haben kann, als der Ordnung n von $\mathfrak{U}$ entsprechen würde. Um aber daraus auch für irgendwelche nicht mit F inzidierende Hyperebenen dasselbe Verhalten abzuleiten, werden monotone Änderungen von Hyperebenen gemäß dem speziellen Monotoniesatz[14]) benutzt. Daß dieser Satz in unserem Falle anwendbar ist, soll zunächst in Abschnitt 3, 3 dargelegt

[14]) Haupt (2), Nr. 3, 2.

werden. Abschnitt 3, 4 wird dann den Beweis zu Ende bringen und zwar auf indirektem Wege.

3, 3. Der spezielle Monotoniesatz setzt sogenannte K_k-Kurven voraus. Im euklidischen R_n[15]) sind z. B. die Schnittkurven („Kurve" hier nicht im Gegensatz zu „Bogen" gebraucht) eines (nicht geschlossenen) Zylindermantels M von $(n-1)$-ter Ordnung mit all den Hyperebenen, die keine Mantellinie von M enthalten, ein System von $\mathfrak{K}_n$-Kurven bezüglich eines Bogens $\mathfrak{B}$ als Grundbogen, der, in M enthalten, einfach ist und mit jeder Mantellinie von M genau einen Punkt gemeinsam hat. Arbeitet man nicht im euklidischen, sondern im projektiven R_n, so braucht man nur anstatt des Zylindermantels das projektiv entsprechende Gebilde, einen Kegelmantel, zu betrachten und das ganze für den euklidischen R_n beschriebene Beispiel eines Systems von $\mathfrak{K}_n$-Kurven gilt ebenso im projektiven R_n.

Nun gilt, wenn unser Anfügungskriterium im R_{n-1} als Grundraum richtig ist, der folgende

Satz: Voraussetzung: *Es sei Q gewöhnlich differenzierbarer Ansatzpunkt zweier Bogen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ von n-ter Ordnung im R_n.*

Behauptung: *Zu jedem nicht in der Hyperebene T^Q_{n-1} gelegenen Punkt Z gibt es auf der gegebenen Bogensumme $\mathfrak{B}$ eine beiderseitige Umgebung $\mathfrak{B}$ von Q, welche bei Projektion aus Z einen schlicht-projizierenden Kegelmantel $K_{(Z,\mathfrak{B})}$ von $(n-1)$-ter Ordnung erzeugt.*

Beweis: Das Projektionsbild $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{B}$ in einer Projektionshyperebene R^*_{n-1} wird gebildet aus den zwei Bogen $\mathfrak{B}^*_1$ und $\mathfrak{B}^*_2$, den Bildern von $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$. Beide Bogen können als Bilder von Bogen n-ter Ordnung (siehe Nr. 2, 2 b) höchstens ebenfalls jeweils die Ordnung n besitzen, setzen sich also aus einer beschränkten Anzahl von Bogen $(n-1)$-ter Ordnung zusammen[16]). Es läßt sich daher sicher um den Bildpunkt Q^* von Q eine beiderseitige Umgebung $\mathfrak{W}^*$ auf $\mathfrak{B}^*$ abgrenzen, deren beide durch Q^* getrennte Teilbogen je von $(n-1)$-ter Ordnung sind. Zufolge Nr. 1, 4 I, 3 stimmen in Q^* der v. und der h. Th_k an $\mathfrak{B}^*$ überein für $k = 1, \ldots, n-1$. Nach unserem im Grundraum R_{n-1} als gültig angenommenen Kriterium besitzt somit Q^* auf $\mathfrak{B}^*$ die Ordnung $(n-1)$. Es gibt also in der Tat eine beiderseitige Umgebung $\mathfrak{B}$ von Q auf $\mathfrak{B}$, derart, daß der Projektionskegelmantel $K_{(Z,\mathfrak{B})}$ von $(n-1)$-ter Ordnung ist. Genau wie in Nr. 3, 2 für den Kegelmantel $K_{(F,\mathfrak{U})}$ dargelegt wurde, so folgt auch hier, daß der Kegelmantel $K_{(Z,\mathfrak{B})}$ schlicht-projizierend ist. W. z. b. w.

---

[15]) Haupt (2), Nr. 7, 1.

[16]) Haupt (3), § 2.

Wir wenden den Satz auf die beim Beweis des Anfügungskriteriums in Rede stehende Bogensumme $\mathfrak{B}$ an: Zu einem beliebigen nicht in der Hyperebene T_{n-1}^{F} gelegenen Punkt Z läßt sich eine beiderseitige Umgebung $\mathfrak{B}$ von F an $\mathfrak{B}$ abgrenzen, derart, daß der Projektionskegelmantel $K_{(Z,\mathfrak{B})}$ von $(n-1)$-ter Ordnung und schlicht-projizierend ist. Deshalb gilt: Die Schnittkurven $\mathfrak{S}$ des Kegelmantels $K_{(Z,\mathfrak{B})}$ mit den Hyperebenen, die nicht mit dem Punkt Z inzidieren, bilden auf diesem Kegelmantel ein System von $\mathfrak{R}_n$-Kurven mit $\mathfrak{B}$ als Grundbogen. $\mathfrak{R}_n$-Kurven $\mathfrak{S}$ und Grundbogen $\mathfrak{B}$ erfüllen auch die beiden besonderen Voraussetzungen des speziellen Monotoniesatzes:

1. $\mathfrak{B}$ ist von endlicher $\mathfrak{R}_n$-Ordnung.

2. Die gemeinsamen Punkte von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{S}$ besitzen auf beiden Kurven die gleiche „natürliche" Reihenfolge. In der Tat: Nicht nur $\mathfrak{B}$, sondern auch $\mathfrak{S}$ liegt einfach zu den Mantellinien von $K_{(Z,\mathfrak{B})}$, weil ja andernfalls die zu $\mathfrak{S}$ gehörige Hyperebene mit zwei Punkten einer Mantellinie schon die ganze Mantellinie und somit den Punkt Z enthalten würde, was nach der Definition der Kurven $\mathfrak{S}$ ausgeschlossen ist.

Zu bemerken ist noch, daß keine Hyperebene, die mit $\mathfrak{B}$ mindestens n Punkte gemeinsam hat, den Punkt Z enthalten kann. Denn andernfalls hätte bei der von Z ausgehenden Projektion der $(n-2)$-dimensionale Bildraum einer solchen Hyperebene in R_{n-1}^{*} mit $\mathfrak{B}^{*}$ wegen der Schlichtheit von $K_{(Z,\mathfrak{B})}$ ebenfalls n Punkte gemeinsam, während doch $\mathfrak{B}^{*}$ von $(n-1)$-ter Ordnung ist. Es schneidet also jede den Bogen $\mathfrak{B}$ in mindestens n Punkten treffende Hyperebene den Kegelmantel $K_{(Z,\mathfrak{B})}$ in einer $\mathfrak{R}_n$-Kurve $\mathfrak{S}$.

3, 4. Nachdem im letzten Abschnitt die Anwendbarkeit des speziellen Monotoniesatzes für unseren Fall sichergestellt wurde, kann nun mit Hilfe dieses Satzes der Beweis, daß der Punkt F die Ordnung n besitzt, zu Ende geführt werden. Wir gehen in indirekter Beweisführung von dem Gegenteil unserer Behauptung aus, nehmen also an, F sei auf $\mathfrak{B}$ mindestens von $(n+1)$-ter Ordnung. Zu jeder (noch so kleinen) Umgebung von F auf $\mathfrak{B}$ gibt es dann Hyperebenen, die mit dieser Umgebung mindestens $(n+1)$ Punkte gemeinsam haben. Wir betrachten insbesondere eine Umgebung $\mathfrak{U}'$, die sowohl in der Umgebung $\mathfrak{U}$ (3, 2) als in einer zu einem bestimmten Projektionszentrum Z nach 3, 3 gehörigen Umgebung $\mathfrak{B}$ enthalten ist, so daß also die beiden Kegelmäntel $K_{(F,\mathfrak{U}')}$ und $K_{(Z,\mathfrak{U}')}$ von $(n-1)$-ter Ordnung und schlicht-projizierend sind. Unter den Hyperebenen, die $\mathfrak{U}'$ in mindestens $(n+1)$ Punkten treffen, gibt es nach dem Reduktionssatz sicher eine, deren sämtliche mit $\mathfrak{U}'$ gemeinsame Punkte Schnittpunkte sind. Enthält nun diese Hyperebene $\mathfrak{H}$ noch nicht den Punkt F, dann unterwerfen wir sie, oder vielmehr ihre Schnittkurve $\mathfrak{S}$ mit dem Kegelmantel $K_{(Z,\mathfrak{U}')}$ gemäß dem speziellen Monotoniesatz einer

monotonen Änderung und gewinnen auf die nachfolgende Weise eine Hyperebene mit mindestens gleich vielen mit $\mathfrak{U}'$ gemeinsamen Punkten, worunter sich aber nun der Punkt F befindet:

Unter allen gemeinsamen Punkten von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{U}'$ seien P_1 und P_2 diejenigen zu F auf verschiedenen Seiten nächstgelegenen Punkte. (Solche Punkte P_1 und P_2 existieren stets.) Wird nun $\mathfrak{H}$ und damit $\mathfrak{S}$ so geändert, daß $(n-1)$ der übrigen gemeinsamen Punkte festgehalten, P_1 aber auf $\mathfrak{B}$ gegen F hinbewegt wird, dann wandert nach dem speziellen Monotoniesatz auch P_2 gegen F hin. Nach dem Zusatz zum speziellen Monotoniesatz[17]) gilt dies auch dann noch, wenn während dieser Änderung Schnittpunkte in Stützpunkte übergehen oder neue Stützpunkte gewonnen werden. Zunächst machen wir aber die einschränkende Annahme, daß wenigstens zwischen P_1 und P_2 während der Änderung keine neuen Punkte auftreten. Dann bestehen zwei Möglichkeiten: Einmal ist es denkbar, daß P_1 und P_2 sich beide gleichzeitig unbeschränkt dem Punkte F nähern. Es nähert sich dann die Verbindungsgerade der Punkte P_1 und P_2 einer Grenzsekante, also nach Nr. 1, 6 der Tangente in F an $\mathfrak{B}$. Die Hyperebene $\mathfrak{H}$ konvergiert somit gegen eine Hyperebene $\mathfrak{H}_0$, welche die Tangente in F an $\mathfrak{B}$ und außer F noch mindestens $(n-1)$ Punkte von $\mathfrak{U}'$ enthält. Betrachten wir aber den $(n-2)$-dimensionalen Durchschnittsraum $\overline{\mathfrak{H}_0}$ von $\mathfrak{H}_0$ mit $\overline{R_{n-1}}$, so enthält $\overline{\mathfrak{H}_0}$, weil der Projektionskegelmantel $K_{(F,\mathfrak{U}')}$ schlicht-projizierend ist, außer $\overline{F}$ ebenfalls noch mindestens $(n-1)$ Punkte von $\overline{\mathfrak{U}'}$, während doch $\overline{\mathfrak{U}'}$ von $(n-1)$-ter Ordnung ist. Wegen dieses Widerspruchs ist also die erste Möglichkeit nicht vorhanden. Es bleibt allein die zweite übrig. Einer der beiden Punkte P_1 und P_2 rückt in den Punkt F hinein, während ihn der andere noch nicht erreicht hat. Wir haben dann eine Hyperebene vor uns, die mit $\mathfrak{U}'$ mindestens $(n+1)$ Punkte gemeinsam hat, von denen einer mit F zusammenfällt. Nun enthielte aber, weil der Kegelmantel $K_{(F,\mathfrak{U}')}$ schlicht-projizierend ist, der $(n-2)$-dimensionale Durchschnitt dieser Hyperebene mit $\overline{R_{n-1}}$ mindestens n Punkte von $\overline{\mathfrak{U}'}$, während $\overline{\mathfrak{U}'}$ doch die Ordnung $(n-1)$ hat. Es scheidet also auch die zweite Möglichkeit aus.

Betrachten wir schließlich noch den bisher zurückgestellten Fall eines Gewinnes gemeinsamer Punkte zwischen P_1 und P_2: Würde während der Änderung gerade der Punkt F gewonnen, so enthielte die zugehörige Hyperebene außer F noch mindestens $(n+1)$ Punkte, was nach dem obigen unmöglich ist. Werden dagegen Punkte gewonnen, die alle von F verschieden sind, so kann man sogleich die Rolle von P_1 und P_2 durch die nunmehr zu F auf verschiedenen Seiten nächstgelegenen gemeinsamen

[17]) Haupt (2), Nr. 3, 2.

Punkte vertreten lassen und man kommt wieder auf die beiden oben als unmöglich nachgewiesenen Fälle (evtl. vollständige Induktion im Kontinuum).

Die Annahme, von der wir ausgingen, $\mathfrak{U}'$ sei von höherer als n-ter Ordnung, ist somit zum Widerspruch geführt: $\mathfrak{U}'$ und damit der Punkt F kann nur von n-ter Ordnung sein. Damit ist das Anfügungskriterium 3, 1 vollständig bewiesen.

3, 5. Aus dem Kriterium 3, 1 ergibt sich nun durch Hinzunahme einer weiteren Bedingung das gesuchte Kriterium dafür, daß die ganze Bogensumme $\mathfrak{B}$ die Ordnung n besitzt[18]). Wenn das Kriterium 3, 1 erfüllt ist, dann sind alle Punkte des Bogens $\mathfrak{B}$ von n-ter Ordnung. Machen wir nun die weitere Voraussetzung, daß der Kegelmantel, der bei Projektion des ganzen Bogens $\mathfrak{B}$ von dem Endpunkte E aus entsteht, die Ordnung $(n-1)$ hat und schlicht-projizierend ist, dann läßt sich nach 3, 3 längs jedes den Punkt E nicht enthaltenden Teilbogens $\mathfrak{B}_0$ von $\mathfrak{B}$ der spezielle Monotoniesatz für die Schnittpunkte von Hyperebenen anwenden. Es gilt dann der „erste Existenzsatz“[19]), demzufolge jeder Bogen $\mathfrak{B}_0$, weil aus lauter Punkten n-ter Ordnung bestehend, selbst die Ordnung n hat. Nach dem Reduktionssatz besitzt dann auch der ganze Bogen $\mathfrak{B}$ die Ordnung n.

Damit haben wir den Anfügungssatz gewonnen:

Voraussetzung: *Im R_n sind zwei Bogen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ von n-ter Ordnung gegeben, die so aneinander gesetzt sind, daß der (nicht geschlossene) Bogen $\mathfrak{B} = \mathfrak{C} \dotplus \mathfrak{D}$ im Ansatzpunkte F glatt ist.*

Behauptung: *Notwendig und hinreichend dafür, daß der Bogen $\mathfrak{B}$ von n-ter Ordnung sei, ist das gleichzeitige Bestehen der folgenden zwei Bedingungen:*

a) *Projektionsbedingung: $\mathfrak{B}$ erzeugt, von einem Endpunkte E aus projiziert, einen schlichten Kegelmantel von $(n-1)$-ter Ordnung.*

b) *Windungsbedingung: Der Ansatzpunkt F ist Stützpunkt von $\mathfrak{B}$ mit der Tangential-Schmieghyperebene T^F_{n-1} in F an $\mathfrak{B}$, wenn $n \equiv 0\,(2)$ und Schnittpunkt von $\mathfrak{B}$ mit T^F_{n-1}, wenn $n \equiv 1\,(2)$.*

(Notwendig ist die Projektionsbedingung zufolge 2, 7).

3, 6. Der Anfügungssatz Nr. 3, 5 gilt auch für den Fall, daß die Bogensumme $\mathfrak{B} = \mathfrak{C} \dotplus \mathfrak{D}$ eine *geschlossene Kurve* bildet[20]). In der Tat: Nach dem Vorigen besitzt zunächst jeder den (Schließungs)-Punkt E nicht enthaltende Teilbogen von $\mathfrak{B}$ die Ordnung n. Daraus folgt aber nach dem Reduktionssatz, daß $\mathfrak{B}$ selbst die Ordnung n besitzt.

---

[18]) Vgl. Haupt (1), Nr. 2, 4.

[19]) Haupt (2), Nr. 5, 1.

[20]) Vgl. Haupt (1), Nr. 2, 4 Zusatz.

In diesem Falle einer geschlossenen Kurve $\mathfrak{B} = \mathfrak{C} \dotplus \mathfrak{D}$ kann die Projektionsbedingung durch andere Bedingungen ersetzt werden. Die eine davon, welcher sowohl $\mathfrak{C}$ als $\mathfrak{D}$ zu genügen hat, ist die sogenannte *Fremdheitsbedingung*. Wir sagen dabei, ein Bogen (n-ter Ordnung) $\mathfrak{A}$ mit den beiden Endpunkten B und C genüge der Fremdheitsbedingung, wenn der T_k^B fremd ist zum $T_{n-(k+1)}^C$ für *jedes* $k = 0, 1, \ldots, n-1$. — Die andere Bedingung ist die Glattheit im Schließungspunkt E der Summe $\mathfrak{B}$ (neben der Glattheit im Ansatzpunkte F). Bei Erfülltsein dieser beiden Bedingungen ist, wie Herr Haupt bemerkte, die Windungsbedingung in F von selbst erfüllt.

Wir beweisen also den

Satz: Voraussetzung: *Es seien im R_n $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ zwei Bogen n-ter Ordnung, welche beide der Fremdheitsbedingung genügen.*

Behauptung: *Kann man $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ so aneinandersetzen, daß eine geschlossene Kurve $\mathfrak{B}$ entsteht, die in beiden Ansatzpunkten glatt ist, dann besitzt diese Kurve die Ordnung n.*

Beweis: Im Falle $n = 2$ sind uns zwei ebene Bogen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ von zweiter Ordnung gegeben, für welche die Fremdheitsbedingung gilt, d. h. die Tangente im einen Endpunkt enthält nicht den andern Endpunkt. Lassen sich nun die Bogen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ zu einer geschlossenen, in beiden Ansatzpunkten glatten Kurve $\mathfrak{B}$ zusammensetzen, dann ist $\mathfrak{B}$ von zweiter Ordnung. In der Tat: Bei jedem ebenen offenen Bogen $\mathfrak{B}_2$ von zweiter Ordnung, der die Fremdheitsbedingung erfüllt, bilden die zwei Endpunktstangenten zusammen mit der Verbindungsgeraden der beiden Endpunkte ein Dreiseit (Tangentialdreiseit; vgl. Nr. 4, 2), dessen Seiten alle voneinander verschieden sind. Dieses Dreiseit zerlegt die projektive Ebene in vier Dreiecke; eines von ihnen, es heiße das Hülldreieck von $\mathfrak{B}_2$, enthält den Bogen $\mathfrak{B}_2$. Da in unserem Fall die Bogen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ in beiden Endpunkten glatt zusammengesetzt sind, besitzen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ das gleiche Tangentialdreiseit, und die zwei Hülldreiecke stellen ein solches Paar unter den vier Dreiecken des Dreiseits dar, welches eine Verbindungsstrecke der beiden Ansatzpunkte gemeinsam hat. Daraus folgt, daß die Kurve $\mathfrak{B}$ einfach ist und außerdem in beiden Ansatzpunkten konvex. Als einfache, in jedem Punkt konvexe Kurve besitzt aber $\mathfrak{B}$ die Ordnung zwei[21]).

Für den R_{n-1} als Grundraum, nimmt man im Induktionsschluß den Satz als richtig an. Dann läßt sich im R_n für $\mathfrak{B}$ das Erfülltsein der Bedingungen des Anfügungssatzes Nr. 3, 5 nachweisen.

a) Projektionsbedingung: Man projiziert die Kurve $\mathfrak{B}$ vom Punkte E aus auf eine Hyperebene R_{n-1}^*. Das Bild $\mathfrak{B}^*$ erfüllt die Voraussetzung

[21]) Siehe Bonnesen-Fenchel (1), § 1, Nr. 4, S. 7, Absatz 3 im Kleingedruckten.

des zu beweisenden Satzes: $\mathfrak{B}^*$ ist die Summe der Bogen $\mathfrak{C}^*$ und $\mathfrak{D}^*$ von $(n-1)$-ter Ordnung, welche beide der Fremdheitsbedingung genügen wie aus der Fremdheitsbedingung von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ folgt; ferner herrscht in den Punkten E^* und F^* Glattheit (siehe Nr. 1, 4 I, 1 und 1, 4 II, 2). Somit besitzt $\mathfrak{B}^*$ die Ordnung $(n-1)$, was für $\mathfrak{B}$ das Erfülltsein der Projektionsbedingung bedeutet.

b) Windungsbedingung: Man wendet Projektion aus F in eine Hyperebene $\overline{R_{n-1}}$ an. Genau wie $\mathfrak{B}^*$ genügt auch das Bild $\overline{\mathfrak{B}}$ den Voraussetzungen unseres Satzes, besitzt also ebenfalls die Ordnung $(n-1)$. Im (gewöhnlich differenzierbaren) Punkte $\overline{F}$ von $\overline{\mathfrak{B}}$ ist somit die Windungsbedingung der Bogen $(n-1)$-ter Ordnung erfüllt, woraus nach Nr. 1, 4 II, 3 auch für F auf $\mathfrak{B}$ das Erfülltsein der Windungsbedingung folgt.

Nach dem Anfügungssatz Nr. 3, 5 besitzt also die Bogensumme $\mathfrak{B}$ in der Tat die Ordnung n.

§ 4.

Erweiterungssatz.

4, 1. Mit dem Anfügungssatz haben wir uns die Grundlagen für den Beweis des Erweiterungssatzes erworben.

Erweiterungssatz: *Jeder Bogen $\mathfrak{B}$ von n-ter Ordnung im projektiven R_n läßt sich stets ordnungsinvariant, insbesondere zu einer Kurve erweitern, falls nur die Fremdheitsbedingung* (siehe Nr. 3, 6) *erfüllt ist, d. h. falls für jedes $k = 0, 1, \ldots, n-1$ jeweils der Tangentialschmiegraum T_k^A im Anfangspunkt A fremd ist zum Tangentialschmiegraum $T_{n-(k+1)}^E$ im Endpunkt E.*

Wir führen den Beweis des Satzes konstruktiv. Zum gegebenen Bogen $\mathfrak{B}$, dessen Tangentialschmiegräume in Anfangs- und Endpunkt die genannte Fremdheitsbedingung erfüllen, konstruieren wir einen zweiten Bogen $\mathfrak{B}^*$ ebenfalls von n-ter Ordnung, der den Bogen $\mathfrak{B}$ so zu einer geschlossenen Kurve $\mathfrak{C}$ vervollständigt, daß für diese Bogensumme $\mathfrak{C} = \mathfrak{B} + \mathfrak{B}^*$ der Anfügungssatz in der besonderen Form 3, 6 gilt. $\mathfrak{C}$ ist also eine Kurve von n-ter Ordnung, die $\mathfrak{B}$ als Teilbogen enthält, — der Erweiterungssatz ist damit bewiesen.

4, 2. Für die Zwecke der angekündigten Konstruktion ist es notwendig, zunächst die Fremdheitsbedingung in anderer Weise auszudrücken. Wir benutzen hierbei die zwei folgenden Sätze:

I. Sind zwei Räume R_{k_1} und R_{k_2} zueinander fremd, dann hat ihr Verbindungsraum, d. h. der lineare Raum niedrigster Dimension, der R_{k_1} und R_{k_2} enthält, die Dimension $v = k_1 + k_2 + 1$, und umgekehrt.

II. Haben zwei Räume R_{k_1} und R_{k_2} genau einen Punkt gemeinsam, dann hat ihr Verbindungsraum die Dimension $v = k_1 + k_2$ und umgekehrt.

(Beide Sätze stellen spezielle Aussagen eines allgemeinen Satzes über die Dimension von Schnitt- und Verbindungsraum zweier linearer Räume dar[22]).

Die Sätze I und II wenden wir nun auf jede einzelne Aussage der Fremdheitsbedingung (F) an. Wir gehen aus vom Anfangspunkt A. Da nach (F) der Punkt A nicht in T^E_{n-1} enthalten ist, hat die Tangente T^A_1 mit T^E_{n-1} genau einen Punkt gemein, den wir E_1 nennen; E_1 ist verschieden von A, bestimmt also mit A die Tangente T^A_1. Da nach (F) die Tangente T^A_1 fremd ist zu T^E_{n-2}, ist ihr Verbindungsraum nach I. der ganze R_n; da T^A_1 in T^A_2 enthalten ist, spannen auch T^A_2 und T^E_{n-2} den ganzen R_n auf, haben also nach II. genau einen Punkt gemeinsam, den wir E_2 nennen. E_2 liegt nicht in T^A_1, bestimmt also nach I. mit A und E_1 die Tangentialschmiegebene T^A_2. So fahren wir fort. Wir erhalten allgemein für $k = 1, \ldots, n-1$ den Punkt E_k als gemeinsamen Punkt von T^A_k und T^E_{n-k}, und T^A_k wird seinerseits durch die $(k+1)$ Punkte $A, E_1, \ldots, E_k$ eindeutig bestimmt. Als $(n+1)$-ten Punkt nehmen wir den Endpunkt $E = E_n$ hinzu, der nach (F) nicht mit T^A_{n-1} inzidiert, so daß also durch die $(n+1)$ Punkte $A, E_1, \ldots, E_n$ der ganze R_n aufgespannt wird. Da auch irgend $(k+1)$ der $(n+1)$ konstruierten Punkte linear unabhängig sind, wird durch die $(k+1)$ Punkte $E, E_{n-1}, \ldots, E_{n-k}$, die in T^E_k enthalten sind, dieser Tangentialschmiegraum T^E_k eindeutig bestimmt für $k = 1, \ldots, n-1$, wie ja auch aus der Symmetrie der Punkte A und E bezüglich der Fremdheitsbedingung zu ersehen ist. Bei unserer Konstruktion werden außer den $(n+1)$ Punkten $A, E_1, \ldots, E_n$ auch die $(n+1)$ Hyperebenen eine Rolle spielen, die uns durch die $(n+1)$ Punkte insgesamt gegeben sind, wenn nämlich jede dieser Hyperebenen Verbindungsraum von je n der $(n+1)$ Punkte sein soll. Wir bezeichnen das Gebilde dieser $(n+1)$ Hyperebenen als das *Tangential-$(n+1)$-Seit von* $\mathfrak{B}$ und jede einzelne Hyperebene als eine *„Seite"*, welche dem nicht in ihr enthaltenen Punkt unter $A, E_1, \ldots, E_n$ *„gegenüberliegt"*. Da aus der Existenz des nichtentarteten Tangential-$(n+1)$-Seits („nicht entartet", weil die $(n+1)$ Grundpunkte nicht in einer Hyperebene liegen) umgekehrt wieder die Fremdheitsbedingung (F) folgt, haben wir das Ergebnis:

Äquivalent mit der Bedingung der Fremdheit von T^A_k zu $T^E_{n-(k+1)}$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ist die Bedingung der Existenz eines nicht entarteten Tangential-$(n+1)$-Seits von $\mathfrak{B}$.

4, 3. Das nicht entartete Tangential-$(n+1)$-Seit von $\mathfrak{B}$ dient uns nun als Gerüst für die Konstruktion des zweiten Bogens $\mathfrak{B}^*$, der den Bogen $\mathfrak{B}$ zu einer Kurve n-ter Ordnung vervollständigen soll. Als

[22]) Bertini (1), Kapitel I, Nr. 12 und 13.

Erzeugungsverfahren benutzen wir, entsprechend wie in der Einleitung für ebene Bogen zweiter Ordnung, projektive Spiegelungen des R_n. Eine derartige Abbildung ist eindeutig bestimmt durch einen Punkt Z, das Zentrum der Spiegelung, und durch eine nicht mit Z inzidierende Hyperebene $\mathfrak{H}$, die Spiegelhyperebene. Spiegelbild eines beliebigen Punktes P ist dann der Punkt $\bar{P}$, der zu P bezüglich Z und $\mathfrak{H}$ harmonisch liegt. Wir wenden bei unserer Konstruktion nur solche Spiegelungen an, deren Zentrum ein Eckpunkt unseres Tangential-$(n+1)$-Seits und deren Spiegelhyperebene die diesem Eckpunkt gegenüberliegende Seite des $(n+1)$-Seits ist. Eine solche Spiegelung ist dann schon durch Angabe des Eckpunktes gekennzeichnet, der als Spiegelzentrum dienen soll.

Wir verfahren nun folgendermaßen: Als erste Spiegelung nehmen wir die Spiegelung mit dem Zentrum E_1 vor. Der Bogen $\mathfrak{B}$ wird abgebildet auf den Bogen $\mathfrak{B}_1$. Nun lassen wir die Spiegelung mit dem Zentrum E_3 folgen: $\mathfrak{B}_1$ geht über in den Bogen $\mathfrak{B}_3$. Allgemein führen wir nach der Spiegelung mit dem Zentrum $E_{m-2} = E_{2k-1}$ die Spiegelung mit dem Zentrum $E_m = E_{2k+1}$ aus und erhalten dabei aus dem Bogen $\mathfrak{B}_{m-2}$ den Bogen $\mathfrak{B}_m$. Die letzte Spiegelung geht, wenn $n \equiv 0\,(2)$, von der Ecke E_{n-1} aus, dagegen wenn $n \equiv 1\,(2)$, von der Ecke E_n. Das Bild von $\mathfrak{B}$, das durch die gesamte Spiegelungsfolge erzeugt wird, heiße $\mathfrak{B}^*$; es ist also $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B}_{n-1}$, bzw. $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B}_n$. Wir behaupten nun, daß der Bogen $\mathfrak{B}^*$ von n-ter Ordnung ist und uns gerade die gewünschte ordnungsinvariante Vervollständigung von $\mathfrak{B}$ zur Kurve liefert.

Die erste Behauptung ergibt sich ohne weiteres: $\mathfrak{B}^*$ ist aus $\mathfrak{B}$ durch eine Reihe von projektiven Spiegelungen entstanden. Bei einer projektiven Spiegelung hat aber stets das Bild eines Bogens die gleiche Ordnung wie das Urbild; denn es geht hierbei ein linearer Raum wieder in einen linearen Raum der gleichen Dimension über, — also speziell eine Hyperebene wieder in eine Hyperebene —, und es bleiben die Inzidenzverhältnisse erhalten. $\mathfrak{B}^*$ besitzt also, ebenso wie jeder andere Bogen $\mathfrak{B}_m$, die Ordnung n.

Ferner bildet die Bogensumme $\mathfrak{B} \dotplus \mathfrak{B}_m$, für $m = 1, \ldots, n-1$, bzw. n, jeweils eine geschlossene Kurve. Es bleiben ja die Endpunkte A und E des Bogens $\mathfrak{B}$ bei jeder Spiegelung fest, weil sie entweder in der Spiegelhyperebene liegen oder Spiegelzentrum sind. Also besitzt jeder Bogen $\mathfrak{B}_m$ die gleichen Endpunkte wie der Bogen $\mathfrak{B}$, was zu zeigen war.

Daß nun nicht schon die erste gewonnene Kurve $\mathfrak{B} \dotplus \mathfrak{B}_1$ die Ordnung n besitzt, hat seinen Grund darin, daß diese Kurve in den Punkten A und E noch nicht der Glattheits- und der Windungsbedingung genügt. Erst die letzte Kurve $\mathfrak{B} \dotplus \mathfrak{B}^*$ erfüllt diese Bedingungen. Bezüglich des Punktes A werden wir diese Behauptung in Abschnitt 4, 4 nachweisen, bezüglich des

Punktes E in Abschnitt 4, 5. Es sei darauf aufmerksam gemacht, daß die Punkte A und E bei unserem Konstruktionsverfahren keine völlig symmetrische Rolle spielen; besonders im Falle $n \equiv 1\,(2)$, in welchem die letzte Spiegelung vom Punkte $E_n = E$ als Spiegelzentrum ausgeht, ist die Symmetrie zwischen A und E weitgehend durchbrochen. Es ist daher eine getrennte Betrachtung der beiden Punkte nötig.

Für alles folgende treffen wir die Festsetzung, daß auf jeder gewonnenen Kurve $\mathfrak{B} \dot{+} \mathfrak{B}_m$ als Richtungssinn die Orientierung von $\mathfrak{B}$ gelten soll.

4, 4. Anschaulich gesprochen liefert unser Konstruktionsverfahren eine Reihe von Kurven, von denen jede neugewonnene im Punkte A „glatter" ist als die vorhergehende. Im einzelnen haben wir die folgenden Verhältnisse. Bei allen Kurven $\mathfrak{B} \dot{+} \mathfrak{B}_m$ stimmen v. und h. $T h_k^A$ für $k \equiv 0\,(2)$ überein; $k = 2, \ldots, n-1$, bzw. n. Für $k \equiv 1\,(2)$ wird die Übereinstimmung schrittweise erzwungen: Bei der Kurve $\mathfrak{B} \dot{+} \mathfrak{B}_1$ sind nur v. und h. $T h_1^A$ identisch; bei der Kurve $\mathfrak{B} \dot{+} \mathfrak{B}_3$ fallen außerdem v. und h. $T h_3^A$ zusammen, usw. Demgemäß ist die Kurve $\mathfrak{B} \dot{+} \mathfrak{B}^*$ die erste, bei der schließlich v. und h. $T h_k^A$ übereinstimmen für *alle* $k = 1, \ldots, n$, d. h. für welche Glattheits- und Windungsbedingung im Punkte A erfüllt sind.

Um diese Behauptungen nun zu beweisen, betrachten wir

I. die *Ganz*räume T_k^A. Wir stellen fest: Bei jeder Kurve $\mathfrak{B} \dot{+} \mathfrak{B}_m$ stimmen v. und h. T_k^A überein.

Beweis: Der v. T_k^A an $\mathfrak{B}$, als Limesraum betrachtet, wird bei der Abbildung, die $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B}_m$ überführt, wegen der Stetigkeit dieser Abbildung übergeführt in den h. T_k^A an $\mathfrak{B}_m$. Nun bleibt der v. T_k^A an $\mathfrak{B}$, als linearer Raum betrachtet, bei der Abbildung im ganzen fest, denn es sind ja die $(k+1)$ Punkte $A, E_1, \ldots, E_k$, welche den v. T_k^A an $\mathfrak{B}$ bestimmen, sämtlich Fixpunkte der Abbildung (sie sind bei jeder unserer Spiegelungen entweder Spiegelzentrum oder in der Spiegelhyperebene enthalten). So ergibt sich die Behauptung.

II. Nun wenden wir uns den *Halb*räumen $T h_k^A$ zu. Wir bemerken, daß bei jeder projektiven Spiegelung ein linearer Halb-R_k wieder in einen linearen Halb-R_k übergeführt wird. In unserem Falle stellen wir fest:

1. Bei der Abbildung, die $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B}_m$ überführt, wird der v. $T h_k^A$ an $\mathfrak{B}$, als Limeshalbraum betrachtet, für $k \equiv 0\,(2)$ auf den h. $T h_k^A$ an $\mathfrak{B}_m$, für $k \equiv 1\,(2)$ auf den Komplementärhalb-R_k des h. $T h_k^A$ an $\mathfrak{B}_m$ abgebildet. Dies folgt aus der Stetigkeit der Abbildung; vergleiche auch Definition der h. $T h_k$, Nr. 1, 4.

2. Wie verhält sich nun der v. $T h_k^A$ an $\mathfrak{B}$, als linearer Halbraum betrachtet, bei den Spiegelungen? Nach I. wissen wir: Das Bild des v. $T h_k^A$ an $\mathfrak{B}$ bei irgendeiner Abbildung unseres Konstruktionsverfahrens

ist einer der beiden Halb-R_k $\mathfrak{H}$, welche auf dem v. T_k^A an $\mathfrak{B}$ durch den v. T_{k-1}^A an $\mathfrak{B}$ bestimmt werden. Wir betrachten nun das Verhalten eines solchen Halb-R_k $\mathfrak{H}$ bei der Spiegelung „E_m", welche $\mathfrak{B}_{m-2}$ in $\mathfrak{B}_m$ überführt. (Für $m = 1$ sei $\mathfrak{B}_{m-2} = \mathfrak{B}$.) Dabei unterscheiden wir drei Fälle:

a) $m < k$: Der v. T_k^A an $\mathfrak{B}$ ebenso wie der v. T_{k-1}^A an $\mathfrak{B}$, enthält das Spiegelzentrum E_m. Da der Durchschnitt von $\mathfrak{H}$ mit der Spiegelhyperebene Punkte enthält, die nicht in T_{k-1}^A liegen, *bleibt $\mathfrak{H}$ bei der Abbildung fest.*

b) $m = k$: Der v. T_k^A an $\mathfrak{B}$ enthält hier das Spiegelzentrum $E_m = E_k$, der v. T_{k-1}^A an $\mathfrak{B}$ dagegen enthält E_k nicht mehr, liegt also ganz in der Spiegelhyperebene, bildet also den Durchschnitt des v. T_k^A mit dieser Hyperebene. Die nicht in T_{k-1}^A liegenden Punkte von $\mathfrak{H}$ gelangen bei der Abbildung auf die andere Seite der Spiegelhyperebene; $\mathfrak{H}$ *geht* also *in den Komplementärhalb-R_k über.*

c) $m > k$: Der v. T_k^A an $\mathfrak{B}$ enthält nun das Spiegelzentrum E_m nicht mehr. In diesem Falle *bleibt* $\mathfrak{H}$, weil ganz in der Spiegelhyperebene enthalten, *punktweise fest.*

Ergebnis: Der v. Th_k^A an $\mathfrak{B}$, als linearer Halbraum betrachtet, und sein Komplementärhalb-R_k bleiben bei jeder Spiegelung fest, außer bei der Spiegelung mit dem Zentrum E_k; bei dieser Spiegelung „E_k" werden sie vertauscht. Nun werden bei unserer Konstruktion überhaupt nur Spiegelungen „E_m" mit ungeradem Index m ausgeführt. Für $k \equiv 0\,(2)$ bleibt also der v. Th_k^A an $\mathfrak{B}$ bei der Gesamtabbildung (im ganzen) fest. Mit der Bemerkung 1. zusammengenommen, bedeutet dies: *v. Th_k^A an $\mathfrak{B}$ = h. Th_k^A an $\mathfrak{B}^*$ für $k \equiv 0\,(2)$, $k = 2, \ldots, n-1$ oder n.* Im Falle $k \equiv 1\,(2)$ wird der v. Th_k^A an $\mathfrak{B}$, als linearer Halb-R_k betrachtet, fest belassen bei allen Spiegelungen „E_m", bei denen $m < k$; bei der Spiegelung „E_k" geht der Halb-R_k in den Komplementärhalb-R_k über, um von den weiteren Spiegelungen nicht mehr verändert zu werden. Mit der Bemerkung 1. zusammengenommen, erhalten wir also: *v. Th_k^A an $\mathfrak{B}$ = h. Th_k^A an $\mathfrak{B}^*$ für $k \equiv 1\,(2)$, $k = 1, \ldots, n-1$ oder n.*

Damit ist für die Kurve $\mathfrak{B} + \mathfrak{B}^*$ das Erfülltsein von Glattheits- und Windungsbedingung *im Punkt A* nachgewiesen.

4, 5. Wie entsprechen die Kurven $\mathfrak{B} + \mathfrak{B}_m$ *im Punkte E* den Forderungen der Glattheits- und Windungsbedingung?

Wir erinnern uns, daß der h. T_k^E an $\mathfrak{B}$ durch die $(k+1)$ Punkte $E_n = E, E_{n-1}, \ldots, E_{n-k}$ bestimmt ist. Demnach verhalten sich bei jeder Spiegelung „E_m", wo $m < n$, der Punkt E und die Halbräume h. Th_k^E an $\mathfrak{B}$, — die letzteren als lineare Halbräume betrachtet —, entsprechend wie der Punkt A und die Halbräume v. Th_k^A an $\mathfrak{B}$. Wir erkennen:

Der h. Th_k^E an $\mathfrak{B}$ bleibt (im ganzen) fest bei allen Spiegelungen „E_m“, $m < n$, mit Ausnahme der Spiegelung „E_{n-k}“; bei dieser Spiegelung geht er in den Komplementärhalb-R_k über. Nun berücksichtigen wir, daß bei der Abbildung, die $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B}_m$ überführt, $m = 1, \ldots, n-1$ oder n, der h. Th_k^E an $\mathfrak{B}$, als Limeshalbraum betrachtet, für $k \equiv 0\,(2)$ in den v. Th_k^E an $\mathfrak{B}_m$, für $k \equiv 1\,(2)$ in den Komplementärhalb-R_k des v. Th_k^E an $\mathfrak{B}_m$ abgebildet wird.

So ergibt sich im Falle $n \equiv 0\,(2)$: Bei allen Kurven $\mathfrak{B} \dot{+} \mathfrak{B}_m$ stimmen für $k \equiv 0\,(2)$ (also für $n - k \equiv 0\,(2)$) v. und h. Th_k^E überein, $k = 2, \ldots, n$. Für $k \equiv 1\,(2)$ stimmt bei der Kurve $\mathfrak{B} \dot{+} \mathfrak{B}_1$ nur v. und h. Th_{n-1}^E überein, bei der Kurve $\mathfrak{B} \dot{+} \mathfrak{B}_3$ außerdem v. und h. Th_{n-3}^E, usw. Erst bei der Kurve $\mathfrak{B} \dot{+} \mathfrak{B}^*$ also sind v. und h. Th_k^E identisch für alle $k = 1, \ldots, n$.

Dagegen ergibt sich im Falle $n \equiv 1\,(2)$: Bei allen Kurven $\mathfrak{B} \dot{+} \mathfrak{B}_m$, wobei $m < n$, sind für $k \equiv 1\,(2)$ (also für $n - k \equiv 0\,(2)$) v. und h. Th_k^E komplementär, $k = 1, \ldots, n$. Für $k \equiv 0\,(2)$ (also für $n - k \equiv 1\,(2)$) sind bei der Kurve $\mathfrak{B} \dot{+} \mathfrak{B}_1$ nur v. und h. Th_{n-1}^E komplementär, bei der Kurve $\mathfrak{B} \dot{+} \mathfrak{B}_3$ außerdem v. und h. Th_{n-3}^E, usw. Bei der Kurve $\mathfrak{B} \dot{+} \mathfrak{B}_{n-2}$ sind schließlich v. und h. Th_k^E komplementär für alle $k = 1, \ldots, n$. Aber die Spiegelung mit dem Zentrum $E_n = E$ bildet nun mit einem Schlage alle v. Th_k^E an $\mathfrak{B}_{n-2}$ (als lineare Halb-R_k betrachtet) auf die entsprechenden Komplementärhalb-R_k ab für $k = 1, \ldots, n$. In der Tat: Der v. T_{k-1}^E an $\mathfrak{B}_{n-2}$ enthält das Spiegelzentrum E, bleibt also bei der Abbildung im ganzen fest. Ein nicht im v. T_{k-1}^E enthaltener Punkt von Th_k^E an $\mathfrak{B}_{n-2}$ aber wird in einen Punkt von T_k^E auf der anderen Seite von T_{k-1}^E abgebildet. — Es sind also auch im Falle $n \equiv 1\,(2)$ v. und h. Th_k^E an die Kurve $\mathfrak{B} \dot{+} \mathfrak{B}^*$ identisch für alle $k = 1, \ldots, n$.

4, 6. Damit sind die Bedingungen des Anfügungssatzes in der Form von Nr. 3, 6 bei der Bogensumme $\mathfrak{B} \dot{+} \mathfrak{B}^*$ als erfüllt nachgewiesen. Die Vervollständigungskonstruktion 4, 3 hat uns also in der Tat auf eine Kurve n-ter Ordnung geführt.

Literatur.

E. Bertini.
(1) Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume, Wien 1924.
Bonnesen-Fenchel.
(1) Theorie der konvexen Körper; Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Band, Berlin 1934.
G. Bouligand.
(1) Introduction à la géométrie infinitésimale directe, Paris 1932.
F. Denk.
(1) Über elementare Punkte höherer Ordnung auf Kurven im R_n, Sitz.-Ber. der phys.-med. Sozietät zu Erlangen, Bd. 67 (1935).

O. Haupt.
(1) Über die Erweiterung eines Bogens dritter Ordnung, insbesondere zu einer Raumkurve dritter Ordnung; Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 170, Heft 3, 1934.
(2) Zur Theorie der Ordnung reeller Kurven in der Ebene bezüglich vorgegebener Kurvenscharen; Monatshefte für Mathematik und Physik 40 (1933).
(3) Ein Satz über die reellen Raumkurven vierter Ordnung und seine Verallgemeinerung; Math. Annalen (1933).
J. Hjelmslev.
(1) Contribution à la géométrie infinitésimale de la courbe réelle; overs. over det kgl. Danske vidensk. selsk. Forhandl. (1911).
(2) Introduction à la théorie des suites monotones; overs. over det kgl. Danske vidensk. selsk. Forhandl. (1914).
(3) Die graphische Geometrie (Stockholm, Sitzg. v. 14.—18. VIII. 1934.), 8. Skand. Math.-Kongr., 3—12 (1935).
C. Juel.
(1) Beispiele von Elementarkurven und Elementarflächen; Atti del congr. intern. dei mat., Bologna 1928. Bd. IV.
A. Marchaud.
(1) Sur les continus d'ordre borné; Acta math. 55 (1930).
A. Rosenthal.
(1) Über Kontinua von endlicher Ordnung; Crelles Journal 167 (1932).
P. Scherk.
(1) Über reelle geschlossene Raumkurven vierter Ordnung; noch nicht veröffentlicht.

(Eingegangen am 25. 1. 1936.)

Hypothesis K of Hardy and Littlewood.

By

S. Chowla (Lahore) and S. S. Pillai (Annamalainagar).

1. Let $r_{s,n}(N)$ denote the number of representations of N as a sum of s n^{th} powers of integers $\geqq 0$. The following conjecture is important in connection with Waring's problem: for fixed $n \geqslant 3$,

$$r_{n,n}(N) = O(N^{\varepsilon}) \text{ for any } \varepsilon > 0. \tag{1}$$

We shall prove the following result in the opposite direction:

Theorem[1]. *For fixed $n \geqslant 5$, we have*

$$r_{n,n}(N) = \Omega(\log\log N).$$

2. Proof. We write ϱ for a primitive q^{th} root of unity,

$$S_{\varrho} = \sum_{h=0}^{q-1} \varrho^{h^n} = \sum_{h=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{a}{q} h^n} \quad [(a,q)=1],$$

$A(q) = q^{-s} \sum_{\varrho} (S_{\varrho})^s \varrho^{-N}$ where ϱ runs over the $\Phi(q)$ [Euler's totient function] primitive q^{th} roots of unity. For $s \geqq 5$ the "singular series" is

$$S(N;n;s) = \sum_{q=1}^{\infty} A(q) = \prod_{p} X_p = \prod_{r=1}^{\infty} X_{p_r}$$

where p_r denotes the r^{th} prime and

$$X_{p_r} = 1 + A(p_r) + A(p_r^2) + \ldots;$$

we use $p^{\vartheta} \| m$ to denote that $p^{\vartheta} | m$ but $p^{\vartheta+1} \nmid m$; θ_r is defined by $p_r^{\theta_r} \| n$, $\gamma_r = \theta_r + 2$ if $r = 1$, $\gamma_r = \theta_r + 1$ if $r \geqq 2$.

The numbers c_1, c_2, c_3, c_4, etc. denote *positive constants depending only on n.*

From known results (Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, S. 281–302, Band 1) it is easy to deduce that (complete proofs are given in the *appendix*).

Lemma 1. *If $s = n+1$, $N \equiv p_r^n \pmod{p_r^{2n}}$, $r \geqq c_1$, then*

$$X_{p_r} = 1 + \frac{1}{p_r} + \frac{b}{p_r^{3/2}} \qquad (|b| < 1).$$

---

[1]) $f(x) = \Omega(g(x))$ means that $f(x) = 0(g(x))$ is false.

Lemma 2. *Write* $m = c_1 - 1$; $Y = \prod_{r=1}^{m} p_r^{\gamma_r}$; *then for all* $N \equiv 1 \pmod{Y}$ *we have, for* $s = n+1$,

$$\prod_{r<c_1} X_{p_r} > c_2.$$

Lemma 3. *For* $r \geqq c_3$,

$$X_{p_r} > 1 - p_r^{-5/4} \qquad [s = n+1].$$

Lemma 4.

$$\prod_{p \leqq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-C}}{\log x}$$

where C *is Euler's constant.*

Lemma 5. *If* (1) *is true, then the number of solutions of*

(i) $$1 \leqq N \leqq x,$$

and

(ii) $$r_{n+1,n}(N) = E\,S(N; n; n+1)\,N^{1/n} + 0\,(N^{1/n})$$

differs from x *by less than* x^{1-c_4} *for all* $x \geqq c_5$.

Now let

(2) $$z = c_6 \log x$$

where (we may clearly suppose that $c_4 < 1$)

(3) $$c_6 = \frac{c_4}{5n},\ \delta = c_4 - 4nc_6 > 0,\ c_4 < 1.$$

Let N satisfy

(4) $$N \equiv 1 \pmod{Y} \text{ where } Y = \prod_{r<c_1} p_r^{\gamma_r},$$

(5) $$N \equiv p_r^n \pmod{p_r^{2n}} \text{ for } c_1 \leqq r \leqq z.$$

Then it is clear that the "singular series"

$$S(N; n; n+1) = \prod_{r<c_1} X_{p_r} \prod_{c_1 \leqq r \leqq z} X_{p_r} \prod_{r>z} X_{p_r} > c_9\,(c_7 \log\log x)\,c_8$$

[lemma 2, lemma 1 and lemma 4 and (2), lemma 3], for $x \geqq c_9$ [for $z > c_8$ for $x \geqq c_{10}$ and hence lemma 3 applies]. Thus,

Lemma 6. *If* N *satisfies* (4) *and* (5), *we have*

$$S(N; n; n+1) > c_{11} \log\log x$$

[z *is defined by* (2)].

Now from (2) it follows that for $x \geqq c_{12}$,

(6) $$x^{nc_6} < Y \prod_{c_1 \leqq r \leqq z} p_r^{2n} < x^{3nc_6}$$

From (6) it follows that

Lemma 7. *The number of solutions (in* N*) of* (4), (5) *and*

(7) $$1 \leqq N \leqq x$$

is greater than

$$c_{15}\,x^{1-4nc_6} > x^{1-c_4} \qquad [x \geqq c_{13}],$$

by (3).

From lemma 6 and 7 it follows that

Lemma 8. *The number of solutions (in N) of*

(i) $$1 \leqq N \leqq x,$$

(ii) $$S(N; n; n+1) > c_{11} \log\log x$$

is greater than x^{1-c_4} for $x \geqq c_{13}$.

From lemmas 5 and 8 we obtain immediately

Lemma 9. *If* (1) *is true, then*

$$r_{n+1,n}(N) = \Omega(N^{1/n} \log\log N).$$

The last lemma obviously implies

Lemma 10. *If* (1) *is true, then*

$$r_{n,n}(N) = \Omega(\log\log N).$$

If possible, let

(8) $$r_{n,n}(N) = 0(\log\log N),$$

then, clearly (1) is true, and hence by lemma 10,

(9) $$r_{n,n}(N) = \Omega(\log\log N),$$

which contradicts (8). Hence (8) is false and our theorem is proved.

Appendix (Remarks on lemmas 1–5).

Lemmas A, B, C below are from Landau's book, abready cited.

Lemma A.

(i) $$S_\varrho = p^{l-1} (q = p^l, p \mid n, 2 \leqq l \leqq n)$$

(ii) $$|S_\varrho| \leqq (n-1)\sqrt{p}\,(q = p)$$

(iii) $$S_\varrho = p^{n-1} S_{\varrho^{p^n}} \quad (q = p^l, l > n)$$

(Clearly ϱ^{p^n} is a primitive p^{l-n} th. root of unity).

Lemma B. *If* (i) $p^{\beta n+\sigma} \| N$ *where* $\beta \geqq 0$ *and* $0 \leqq \sigma < n$, *and* (ii) $p^\theta \| n$ *and* $\gamma = \theta + 1$ *if* $p > 2$, $\gamma = \theta = 2$ *if* $p = 2$, *then* $A(p^l) = 0$ *for* $l > l_0$ *where*

$$l_0 = \mathrm{Max}(\beta n + \sigma + 1, \beta n + \gamma).$$

Lemma C.

$$1 + A(p) + \ldots + A(p^l) = p^{-(s-1)l} M(p^l, N)$$

where $M(p^l, N)$ is the number of solutions of $\sum_{m \leqq s} h_m^n \equiv N \pmod{p^l}$ *where* $0 \leqq h_m < p^l$.

Proof of Lemma 1. We first find c_{14} so large that $(n, p_r) = 1$ for all $r \geqq c_{14}$. Then from lemma B, since $p_r^n \| N$, we have for $r \geqq c_{14}$,

(10) $$X_{p_r} = 1 + A(p_r) + \ldots + A(p_r^{n+1}).$$

From lemma A (i), if $s = n+1$,

(11) $$A(p_r^m) = p_r^{m-n-1} - p_r^{m-n-2} \qquad [2 \leqq m \leqq n].$$

From lemma A (ii), if $s = n + 1$,

$$|A(p_r)| < \frac{c_{15} p_r^{\frac{+1}{2}} \cdot p_r}{p_r^{n+1}} < \frac{c_{16}}{p_r^2} \qquad (n \geqq 5) \tag{12}$$

From lemma A, (ii) and (iii), if $s = n + 1$,

$$|A(p_r^{n+1})| < \frac{c_{17} p_r^{(n-1/2)(n+1)} \cdot p_r^{n+1}}{p_r^{(n+1)(n+1)}} = \frac{c_{17}}{p_r^{\frac{n+1}{2}}} < \frac{c_{18}}{p_r^2} \qquad (n \geqq 3) \tag{13}$$

From (10), (11), (12), (13) we immediately obtain lemma 1.

Proof of lemma 2. Since $Y = \prod_{r<c} p_r^{\gamma_r}$ and $N \equiv 1 \pmod{Y}$,

$$X_{p_r} = 1 + A(p_r) + \ldots + A(p_r^{\gamma_r}) = p_r^{-n\gamma_r} M(p_r^{\gamma_r}, N) \geqq p_r^{-n\gamma_r}$$

$$[r < c_1,\ s = n + 1]$$

Since $\gamma_r (r < c_1)$ depends only on n, lemma 1 is now proved.

Lemma 3 is from the book of Landau, abready cited. Lemma 4 is well known. Lemma 5 is a special case ($s = n + 1$) of Theorem 5 of P. N. VI of Hardy and Littlewood (Mathem. Zeitschr. **23** (1925), 1—37).

(Eingegangen am 20. Oktober 1935.)

[*Note added March* 23, 1936. The result of this note has also been proved by Walfisz, and Erdös has obtained a sharper result by simpler methods. Mahler has made the remarkable discovery that (1) is false for $n = 3$.]

Über eine Frage aus der Theorie der orthogonalen Funktionensysteme.

Von

Béla v. Sz. Nagy in Szeged (Ungarn).

Eine auf $(-\infty, \infty)$ definierte linksstetige reelle nichtabnehmende Funktion $\sigma(x)$ erzeugt dort bekanntlich ein Lebesgue-Stieltjessches Maß[1]). Wir setzen voraus, daß $\sigma(x)$ beschränkt ist und daß $\sigma(x) \to 0$ für $x \to -\infty$ gilt.

Das folgende verallgemeinerte Momentenproblem ist wohlbekannt: Das Funktionensystem $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... sei gegeben; welchen Bedingungen müssen die Zahlen $c_1, c_2, c_3, \ldots$ genügen, damit es eine Funktion $\sigma(x)$ der obigen Art gebe, für welche

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\, d\sigma(x)$$

ist und inwieweit ist diese Funktion $\sigma(x)$ bestimmt? Eine mit diesem Problem verwandte Fragestellung wäre nun die folgende: Unter welchen Bedingungen gibt es zu einem gegebenen Funktionensystem $e_1(x)$, $e_2(x)$, $e_3(x)$, ... eine solche Funktion $\sigma(x)$, in bezug auf welche die $e_n(x)$ ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem bilden und inwieweit ist dann diese Funktion $\sigma(x)$ bestimmt?

Wir wollen hier eine spezielle Frage dieser Art erledigen. Wir bestimmen nämlich alle Funktionen der genannten Eigenschaft in dem Falle, daß die Funktionen $e_1(x)$, $e_2(x)$, $e_3(x)$, ... periodisch mit der Periode 1 sind und den folgenden Bedingungen genügen: a) Zu jeder stetigen Funktion mit der Periode 1 gibt es eine beschränkte, überall gegen sie konvergente Folge von Linearausdrücken der $e_n(x)$; b) Die $e_n(x)$ bilden auf $0 \leqq x < 1$ ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem in bezug auf die gewöhnliche Lebesguesche Integration. (Das Fouriersche Funktionensystem $e^{2\pi n x i}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, sowie das von dem Intervall $[0, 1)$ auf die ganze Gerade periodisch fortgesetzte Haarsche Funktionensystem z. B. besitzen bekanntlich alle diese Eigenschaften.)

[1]) Vgl. z. B. J. Radon, Sitzungsber. d. Akad. Wien, 122 (1913), S. 1295—1438. Das Maß eines links abgeschlossenen Intervalls $[a, b)$ ist $\sigma(b) - \sigma(a)$. Die auf diesem Maßbegriff begründete Integration besitzt die charakteristischen Eigenschaften des gewöhnlichen Lebesgueschen Integrals.

Sei $\sigma(x)$ eine Lösung des Problems, es gilt also

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e_p(x)\overline{e_q(x)}\,d\sigma(x) = \delta_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{für } p = q, \\ 0 & \text{für } p \gtrless q \end{cases}$$

und für eine beliebige in bezug auf $\sigma(x)$ mit ihrem Absolutwertquadrat integrierbare Funktion $f(x)$

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,d\sigma(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{e_q(x)}\,d\sigma(x) \right|^2.$$

Die Summe $\sum_{m=-\infty}^{\infty} [\sigma(s+m) - \sigma(m)]$ ist offenbar auf $0 \leqq s < 1$ konvergent und darstellt dort eine linksstetige nichtabnehmende Funktion $\tilde{\sigma}(s)$. Es folgt aus (1) und aus der Periodizität der $e_n(x)$, daß

$$\delta_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} e_p(x)\overline{e_q(x)}\,d\sigma(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{[0,1)} e_p(s)\overline{e_q(s)}\,d\sigma(s+m)$$

$$= \int_{[0,1)} e_p(s)\overline{e_q(s)}\,d \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\sigma(s+m) - \sigma(m)]$$

ist. Dies ergibt zusammen mit der Bedingung b)

$$\int_{[0,1)} e_p(s)\overline{e_q(s)}\,d\tilde{\sigma}(s) = \delta_{pq} = \int_0^1 e_p(s)\overline{e_q(s)}\,ds.$$

Aus der Bedingung a) folgt dann für eine beliebige im Intervall $[0, 1)$ stetige Funktion $h(s)$ mit der Eigenschaft $h(0) = h(1)$, daß

$$\int_{[0,1)} h(s)\overline{e_q(s)}\,d\tilde{\sigma}(s) = \int_0^1 h(s)\overline{e_q(s)}\,ds$$

gilt. Da die Funktion

$$\omega_y(s) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leqq s < y \\ 0 & \text{für } y \leqq s < 1 \end{cases}$$

auf $[0, 1)$ Limes einer beschränkten Folge solcher Funktionen $h_n(s)$ ist, erhalten wir die Gleichung

$$\int_{[0,1)} \omega_y(s)\overline{e_q(s)}\,d\tilde{\sigma}(s) = \int_0^1 \omega_y(s)\overline{e_q(s)}\,ds,$$

die wegen der Periodizität der $e_q(s)$, wegen Gleichung (2) und wegen der Bedingung b)

$$\int_{[0,1)} [\omega_y(s)]^2\,d\tilde{\sigma}(s) = \int_0^1 [\omega_y(s)]^2\,ds,$$

also

$$\tilde{\sigma}(y) = y$$

zur Folge hat.

Da offenbar auch die Funktion $\tilde{\sigma}(s) - \sigma(s+m)$ monoton nichtabnehmend für $0 \leqq s < 1$ ist, so ist mit $\tilde{\sigma}(s) = s$ auch $\sigma(s+m)$, also auch $\sigma(x)$ selbst totalstetig. Es gibt also eine nirgends negative Lebesgue-integrierbare Funktion $g(x)$, so daß

$$\sigma(x) = \int_{-\infty}^{x} g(z)\,dz \quad \text{für} \quad -\infty < x < \infty \quad \text{gilt.}$$

Durch Differenzieren der Gleichung

$$s = \tilde{\sigma}(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\sigma(s+m) - \sigma(m)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{m}^{m+s} g(x)\,dx$$

erhält man, daß mit Ausnahme einer Lebesgueschen Nullmenge auf $[0, 1)$

$$1 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(s+m) \tag{3}$$

ist.

Es bedeute nun $\omega_y^{(m)}(x)$ die charakteristische Funktion des Intervalls $m \leqq x < m+y$ (wo $0 \leqq y < 1$ ist), es folgt dann aus (2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\omega_y^{(m)}(x)]^2\,d\sigma(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \omega_y^{(m)}(x)\,\overline{e_q(x)}\,d\sigma(x) \right|^2.$$

Hier ist die linke Seite gleich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega_y^{(m)}(x)\,g(x)\,dx = \int_{m}^{m+y} g(x)\,dx.$$

Bedingung b) und die Periodizität der $e_q(x)$ ergibt für die rechte Seite

$$\sum_{q=1}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \omega_y^{(m)}(x)\,\overline{e_q(x)}\,d\sigma(x) \right|^2 = \sum_{q=1}^{\infty} \left| \int_{m}^{m+1} \omega_y^{(m)}(x)\,g(x)\,\overline{e_q(x)}\,dx \right|^2$$

$$= \int_{m}^{m+1} [\omega_y^{(m)}(x)\,g(x)]^2\,dx = \int_{m}^{m+y} [g(x)]^2\,dx.$$

Die Gleichung $\int_{m}^{m+y} g(x)\,dx = \int_{m}^{m+y} [g(x)]^2\,dx$ kann aber nur dann bestehen, wenn die Funktion $g(x)$ mit der eventuellen Ausnahme einer Lebesgueschen Nullmenge nur die Werte 0 und 1 aufnimmt. Aus diesem Ergebnis und aus (3) folgt, daß es eine Lebesgue-meßbare Punktmenge G in $(-\infty, \infty)$ gibt, so daß: I. die Punkte von $[0, 1)$ die zu je einem Punkte von G modulo 1 kongruente Lage haben, dieses Intervall einfach bedecken, II. $\sigma(x) = \int_{-\infty}^{x} \omega_G(y)\,dy$ gilt, wo $\omega_G(x)$ die charakteristische Funktion von G bedeutet.

Man kann leicht einsehen, daß diese Bedingungen auch hinreichend sind, d. h., wie auch die Lebesgue-meßbare Punktmenge G von der Eigenschaft I gewählt wird, die Integralfunktion ihrer charakteristischen Funktion, $\sigma(x) = \int_{-\infty}^{x} \omega_G(y)\,dy$, eine Lösung unseres Problems ist. Dann ist nämlich immer

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,d\sigma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,\omega_G(x)\,dx = \int_G h(x)\,dx.$$

Ordnen wir jedem Punkte s von $[0, 1)$ den ihm mod. 1 kongruenten Punkt x von G zu, so ist diese Zuordnung $x = w(s)$ eineindeutig und maßtreu. Es gilt also

$$\int_G h(x)\,dx = \int_0^1 h(w(s))\,ds.$$

Es gilt aber wegen $e_n(w(s)) = e_n(s)$ erstens

$$\int_G e_p(x)\,\overline{e_q(x)}\,dx = \int_0^1 e_p(w(s))\,\overline{e_q(w(s))}\,ds = \int_0^1 e_p(s)\,\overline{e_q(s)}\,ds = \delta_{pq},$$

zweitens

$$\int_G |f(x)|^2\,dx = \int_0^1 |f(w(s))|^2\,ds = \sum_{q=1}^{\infty} \left| \int_0^1 f(w(s))\,\overline{e_q(s)}\,ds \right|^2$$

$$= \sum_{q=1}^{\infty} \left| \int_0^1 f(w(s))\,\overline{e_q(w(s))}\,ds \right|^2 = \sum_{q=1}^{\infty} \left| \int_G f(x)\,\overline{e_q(x)}\,dx \right|^2,$$

wo auch die Bedingung b) für die $e_q(x)$ benutzt ist.

Damit also die Funktionen $e_n(x)$ in bezug auf eine linksstetige reelle beschränkte nichtabnehmende Funktion $\sigma(x)$ ein auf $(-\infty, \infty)$ vollständiges normiertes Orthogonalsystem bilden, ist notwendig und hinreichend, daß $\sigma(x)$ die Integralfunktion der charakteristischen Funktion einer meßbaren Punktmenge von der obigen Eigenschaft I sei.

Als eine spezielle Folgerung dieses Ergebnisses ergibt sich, daß es keine solche reelle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ und $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ geben kann, für welche $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^2$ konvergiert und für welche die Vektoren

$$(e_i(\alpha_1)\cdot\beta_1,\ e_i(\alpha_2)\cdot\beta_2,\ e_i(\alpha_3)\cdot\beta_3,\ \ldots) = \mathfrak{e}_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

ein im Hilbertschen Koordinatenraum vollständiges normiertes Orthogonalsystem bilden. Es wäre ja in entgegengesetztem Falle auch die Funktion $\sigma(x) = \sum_{x > a_i} \beta_i^2$ eine Lösung unseres Problems, was aber nach den obigen nicht zutreffen kann.

(Eingegangen am 12. Dezember 1935.)

Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche.

Von

Wolfgang Krull in Erlangen.

In meinem Bericht über die neuere Entwicklung der kommutativen Idealtheorie[1]) habe ich gezeigt, daß die arithmetische Untersuchung und insbesondere die Entwicklung der Teilbarkeitslehre beliebiger ganz abgeschlossener Integritätsbereiche durch geeignete Verknüpfung bewertungs- und idealtheoretischer Methoden weitgehend gefördert und vielfach zu einem wenigstens vorläufigen Abschluß gebracht werden kann. Naturgemäß handelte es sich nur um eine Skizze, bei der allein die Umrisse im Großen deutlich herausgearbeitet wurden, während auf eine genauere Ausführung der Einzelheiten verzichtet werden mußte. Die folgenden Beiträge sind einerseits dazu bestimmt, die Lücken des Berichts auszufüllen, andererseits sollen sie nach Möglichkeit die Theorie über die bisherigen Grenzen hinaus entwickeln. Die Untersuchungen des ersten Beitrags beschäftigen sich mit allgemeinen, durch keinerlei Zusatzaxiom genauer gekennzeichneten ganz abgeschlossenen Integritätsbereichen. Die späteren Beiträge sollen vor allem Anwendungen auf mehr oder minder spezielle Ringklassen bringen. („Vollständig ganz" abgeschlossene Integritätsbereiche, endliche diskrete Hauptordnungen und ihre unendlichen algebraischen Erweiterungen, Potenzreihenringe usw.).

I. Multiplikationsringe, ausgezeichnete Idealsysteme, Kroneckersche Funktionalringe.

Einleitung.

A. Will man einen beliebig gegebenen ganz abgeschlossenen Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ mit den Hilfsmitteln der *Bewertungstheorie* untersuchen,

[1]) Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete Bd. 4, Heft 3 (1935). Zitiert mit „Bericht". Außer dem Bericht werden in dem folgenden ersten Beitrag vor allem drei Arbeiten häufig benutzt, nämlich: Krull: Allgemeine Bewertungstheorie, Journ. f. Math. 167 (1931), S. 160—196. Zitiert mit „Bewertungstheorie". Prüfer: Untersuchungen über die Teilbarkeitseigenschaften in Körpern, Journ. f. Math. 168 (1932), S. 1—36. Zitiert mit „Teilbarkeitseigenschaften". Van der Waerden: Moderne Algebra II. Grundl. d. Math. Wiss. in Einzeldarst. Bd. 34 (1931). Zitiert mit „Moderne Algebra". In der Bezeichnungsweise schließen wir uns im wesentlichen an den Bericht an; vgl. die Vorbemerkungen in 1., sowie Anm. [6]).

so muß man mit „*Exponentenbewertungen*“ des Quotientenkörpers $\mathfrak{K}$ arbeiten, bei denen die Menge der „*Werte*“ eine *beliebige linear geordnete Abelsche Gruppe* bilden darf. Zu jeder Bewertung B von $\mathfrak{K}$ gehört dann ein bestimmter „Bewertungsring“ $\mathfrak{B}$, der aus allen den Körperelementen besteht, die in B nichtnegative Werte haben, und es gelten zwei Hauptsätze: A. Die Bewertungsringe sind dadurch gekennzeichnet, daß in ihnen von zwei beliebigen Elementen stets eines durch das andere teilbar ist. — B. Jeder ganz abgeschlossene Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ läßt sich als Durchschnitt von Bewertungsringen darstellen[2]).

A. und B. bilden die Grundlage für eine wichtige Beweismethode: Soll ein Satz über $\mathfrak{J}$ abgeleitet werden, von dem man weiß, daß er für den Durchschnitt beliebig vieler Ringe richtig ist, sobald er nur für jeden einzelnen Komponentenring gilt, so braucht der betreffende Satz nach B. nur für Bewertungsringe bewiesen zu werden, und in diesem letzteren Fall führt wegen A. meistens eine ganz einfache Rechnung zum Ziel.

Andererseits dient B. als Anknüpfungspunkt für neuartige Fragestellungen, deren Fruchtbarkeit in diesem Beitrag nachgewiesen werden soll. B. ist ein reines Existenztheorem. Für die „Beweismethode“ bedeutet das keinen Nachteil; trotzdem scheint es theoretisch wünschenswert, über den bloßen Existenzstandpunkt hinauszukommen. Dieses Ziel wäre erreicht, wenn man imstande wäre, bei beliebig gegebenem $\mathfrak{J}$ die Menge aller der Bewertungsringe aus dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$, die den Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ umfassen, irgendwie konstruktiv darzustellen. Doch lehrt schon die Betrachtung ganz einfacher Spezialfälle, z. B. der Polynomringe, daß man da vor einer wenigstens vorläufig unlösbaren Aufgabe steht. — Dagegen zeigt es sich überraschenderweise, daß bereits der Versuch, die gestellte Aufgabe ins Idealtheoretische zu wenden, zu sehr merkwürdigen Zusammenhängen mit gewissen tiefeindringenden, vorwiegend an Kronecker anknüpfenden Untersuchungen von H. Prüfer führt.

B. Soll die Arithmetik der ganz abgeschlossenen Integritätsbereiche vom idealtheoretischen Standpunkt aus entwickelt werden, so kann man zunächst am *Dedekindschen Idealbegriff* und an *Dedekinds Problemstellungen* festhalten. In den Vordergrund treten dann die „*Multiplikationsringe*“, d. h. diejenigen Integritätsbereiche, bei denen die Menge aller Ideale mit endlicher Basis eine multiplikative Gruppe bildet[3]). Die erste Über-

[2]) Bewertungstheorie § 1, § 3; Bericht, 36. und 40., sowie Anhang B, S. 150.

[3]) Der Begriff des Multiplikationsringes, in dem Sinne, wie wir ihn benutzen, geht inhaltlich auf Prüfers „Teilbarkeitseigenschaften“ zurück. (Bei Prüfer erscheinen die Multiplikationsringe als „Ringe mit der Eigenschaft $\mathfrak{L}\,\mathfrak{B}$“). — In der älteren Literatur versteht man unter einem Multiplikationsring einen Ring, in dem

raschung besteht nun darin, daß die Klasse der Multiplikationsringe rein bewertungstheoretisch charakterisiert werden kann: — Bei jedem Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ gehört zu jedem Primideal $\mathfrak{p}$ ein „Primidealquotientenring $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$", nämlich der Ring aller Quotienten $\frac{a}{b}$ (a, b in $\mathfrak{J}$; b nicht in $\mathfrak{p}$). Wenn nun $\mathfrak{J}$ einen Multiplikationsring darstellt, und auch nur in diesem Fall, ist die Menge aller Primidealquotientenringe $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ identisch mit der Menge M aller der Bewertungsringe aus dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$, die den Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ umfassen. Die Multiplikationsringe sind also eindeutig dadurch gekennzeichnet, daß bei ihnen die am Schlusse von A. gestellte bewertungstheoretische Aufgabe gleichwertig ist mit dem idealtheoretischen Problem der Ermittlung aller Ringprimideale.

Γ. Um über die Klasse der Multiplikationsringe hinaus zu allgemeingültigen idealtheoretischen Sätzen zu kommen, braucht man nach H. Prüfer, (Teilbarkeitseigenschaften, vgl. vor allem § 6 und § 12), eine Verschärfung des Dedekindschen Idealbegriffs und eine Neuorientierung nach Kroneckerschem Vorbild. Prüfer definiert die „Ganz-Abgeschlossenheit" eines Ideals in glücklicher Verallgemeinerung der klassischen Noetherschen Definition der Ganz-Abgeschlossenheit eines Integritätsbereichs. Alsdann geht er vom Quotientenkörper $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{J}$ zu einem einfach transzendenten Oberkörper $\widetilde{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}(x)$ über und zeigt, daß in $\widetilde{\mathfrak{K}}$ mit Hilfe des Systems Σ_a aller „a-Ideale" (d. h. aller ganz abgeschlossenen Ideale) ein „*Kroneckerscher Funktionalring*" $\widetilde{\mathfrak{M}}$ konstruiert werden kann, der mit $\mathfrak{K}$ gerade den Durchschnitt $\mathfrak{J}$ hat, und der im übrigen dadurch ausgezeichnet ist, daß er einen „*Hauptidealring*" darstellt, d. h., daß in ihm jedes Ideal mit endlicher Basis Hauptideal ist[4]).

Die Konstruktion stützt sich dabei nicht auf die inhaltliche Definition der a-Ideale. Es werden nur gewisse formale Eigenschaften des Systems Σ_a benutzt, die kurz etwa so formuliert werden können: α) Σ_a enthält alle Hauptideale. β) Im System Σ_a kann die Bildung der Idealsumme und des Idealproduktes definiert werden. γ) Innerhalb von Σ_a kann jedes Ideal mit endlicher Basis wegdividiert werden, d. h. im Be-

---

aus $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ bei *beliebigem* $\mathfrak{b}$ stets die Gültigkeit einer Gleichung $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}$ folgt. Ein Integritätsbereich, der Multiplikationsring im älteren Sinne ist, ist stets ein Z.P.J.-Ring, in dem jedes ganze Ideal eindeutig als Produkt endlichvieler Primideale dargestellt werden kann. Multiplikationsringe in unserem Sinne sind z. B. alle Bewertungsringe, alle Durchschnitte von endlichvielen Bewertungsringen, alle ganz abgeschlossenen Integritätsbereiche aus algebraischen Zahlen.

[4]) Der Begriff des Hauptidealringes ist hier gegenüber der älteren Literatur in der gleichen Weise verallgemeinert wie früher der Begriff des Multiplikationsringes [vgl. Anm. [3])].

reich der a-Ideale folgt aus $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}$ stets $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, falls nur $\mathfrak{c}$ eine endliche Basis besitzt[5]).

Δ. Der formale Charakter der Prüferschen Konstruktion gestattet es nun, dem Funktionalringproblem auch mit rein bewertungstheoretischen Hilfsmitteln beizukommen. Es sei (wie in B.) M die Menge aller $\mathfrak{J}$ umfassenden Bewertungsringe $\mathfrak{B}_\tau$ aus $\mathfrak{R}$. Ein $\mathfrak{J}$-Ideal $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_b$ möge „b-Ideal" heißen, wenn $\mathfrak{a} = \underset{\mathfrak{B}_\tau \subset \mathsf{M}}{\Delta} (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}_\tau)$[6]) gleich dem Durchschnitt seiner Erweiterungsideale auf alle $\mathfrak{B}_\tau$ aus M ist. Dann besitzt die Menge Σ_b aller b-Ideale die Eigenschaften $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ von Γ., man kann daher auch mit Hilfe des Systems Σ_b einen Funktionalring in $\widetilde{\mathfrak{R}}$ konstruieren, und zwar erhält man gerade den bereits von Prüfer gefundenen Funktionalring $\widetilde{\mathfrak{M}}$.

Der große Vorteil der neuen Konstruktion liegt darin, daß sie ganz neue Eigenschaften von $\widetilde{\mathfrak{M}}$ aufdeckt: Zu jedem Bewertungsring $\mathfrak{B}_\tau$ aus M gibt es eine eindeutig bestimmte „triviale Fortsetzung" $\widetilde{\mathfrak{B}}_\tau^*$ auf $\widetilde{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}(x)$, und es ergibt sich aus ganz leichten Rechnungen, daß die Menge $\widetilde{\mathsf{M}}$ aller $\widetilde{\mathfrak{B}}_\tau^*$ gerade identisch ist mit der Menge aller der Bewertungsringe aus $\widetilde{\mathfrak{R}}$, die den Integritätsbereich $\widetilde{\mathfrak{M}}$ umfassen. — Die $\mathfrak{J}$ umfassenden Bewertungsringe aus $\mathfrak{R}$ entsprechen also eindeutig umkehrbar den $\widetilde{\mathfrak{M}}$ umfassenden Bewertungsringen aus $\widetilde{\mathfrak{R}}$; die letzteren aber sind, da $\widetilde{\mathfrak{M}}$ als Hauptidealring zugleich Multiplikationsring ist, nach B. eindeutig umkehrbar den Primidealen von $\widetilde{\mathfrak{M}}$ zugeordnet. Man ist daher berechtigt, festzustellen:

Das Problem der Bestimmung aller $\mathfrak{J}$ umfassenden Bewertungsringe aus $\mathfrak{R}$ ist gleichwertig mit dem Problem der Bestimmung aller Primideale von $\widetilde{\mathfrak{M}}$.

E. Bereits Prüfer bemerkte, daß es in vielen Fällen in $\widetilde{\mathfrak{R}}$ außer $\widetilde{\mathfrak{M}}$ noch andere Hauptidealringe gibt, die als zu $\mathfrak{J}$ gehörige (Kroneckersche) Funktionalringe anzusprechen sind. Andererseits zeigt es sich, daß verschiedene Idealsysteme in $\mathfrak{R}$ unter Umständen zum selben Funktionalring in $\widetilde{\mathfrak{R}}$ führen. Hier ist es wieder die Bewertungstheorie, die einen genaueren Einblick in die Sachlage ermöglicht. — Es bedeute N irgendeine Menge von Bewertungsringen $\mathfrak{B}_\tau$ aus $\mathfrak{R}$, für die $\mathfrak{J} = \underset{\mathfrak{B}_\tau \subset \mathsf{N}}{\Delta} \mathfrak{B}_\tau$ wird, $\widetilde{\mathsf{N}}$ sei die Menge der trivialen Fortsetzungen $\widetilde{\mathfrak{B}}_\tau^*$ der Bewertungsringe $\mathfrak{B}_\tau$

---

[5]) Die genaue Formulierung der Eigenschaften $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ findet sich in 4. Vgl. dort vor allem auch die Auseinandersetzung, in der begründet wird, warum im eigentlichen Text nicht wie in der Einleitung von Idealsystemen sondern von Idealoperationen gesprochen wird.

[6]) Δ dient bei uns zur Bezeichnung des Durchschnitts, wenn die Anzahl der Komponenten nicht mit Sicherheit endlich ist. Das Zeichen $\subset$ verwenden wir nicht nur, um eine Menge als Untermenge einer anderen, sondern auch um ein Einzelding als Element einer Menge zu charakterisieren.

aus N auf $\tilde{\mathfrak{R}}$. Unter Σ_{N} möge das System aller der $\mathfrak{I}$-Ideale verstanden werden, die der Gleichung $\mathfrak{a} = \underset{\mathfrak{B}_\tau \subset \mathsf{N}}{\Delta} (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}_\tau)$ genügen. Dann ergibt sich: Jedes System Σ_{N} ist arithmetisch brauchbar, d. h. es erfüllt die Bedingungen $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ von $\Gamma.$ und besitzt somit in $\tilde{\mathfrak{R}}$ einen zugehörigen Funktionalring $\tilde{\mathfrak{R}}$; für $\tilde{\mathfrak{R}}$ gilt die Gleichung $\tilde{\mathfrak{R}} = \underset{\tilde{\mathfrak{B}}^*_\tau \subset \tilde{\mathsf{N}}}{\Delta} \tilde{\mathfrak{B}}^*_\tau$. — Jeder Funktionalring $\tilde{\mathfrak{R}}$ läßt sich durch ein System Σ_{N} erzeugen, und zwar kann man Σ_{N} eindeutig festlegen durch die Forderung, daß $\tilde{\mathsf{N}}$ gerade aus allen den Ring $\tilde{\mathfrak{R}}$ umfassenden Bewertungsringen von $\tilde{\mathfrak{R}}$ bestehen soll. — Nach diesen Sätzen ist jeder Funktionalring $\tilde{\mathfrak{R}}$ Oberring von $\tilde{\mathfrak{M}}$; da ferner $\tilde{\mathfrak{M}}$ Hauptidealring ist, muß jeder in $\tilde{\mathfrak{R}}$ liegende Oberring von $\tilde{\mathfrak{M}}$ selbst Hauptidealring und Quotientenring von $\tilde{\mathfrak{M}}$ im Sinne von H. Grell sein[7]). So erhält man schließlich: Die Menge aller zu $\mathfrak{I}$ gehörigen Funktionalringe ist identisch mit der Menge derjenigen Quotientenringe von $\tilde{\mathfrak{M}}$, die mit $\mathfrak{R}$ gerade den Durchschnitt $\mathfrak{I}$ haben.

Das Gesamtergebnis läßt sich kurz etwa so zusammenfassen: *Alle Funktionalringe können in einfacher arithmetischer Weise aus dem „Stammfunktionalring" $\tilde{\mathfrak{M}}$ abgeleitet werden. Jedem Funktionalring $\tilde{\mathfrak{R}}$ aus $\tilde{\mathfrak{R}}$ entspricht in $\mathfrak{R}$ eindeutig ein ausgezeichnetes System Σ_{N} und damit eine ausgezeichnete Durchschnittsdarstellung $\mathfrak{I} = \underset{\mathfrak{B}_\tau \subset \mathsf{N}}{\Delta} \mathfrak{B}_\tau$ von $\mathfrak{I}$. Die Bestimmung dieser Darstellung, d. h. die Bestimmung von N ist gleichwertig mit der Ermittlung aller Primideale von $\tilde{\mathfrak{R}}$.* Erst diese bewertungstheoretischen Sätze bilden meines Erachtens eine hinreichend breite Grundlage für eine großzügige Entwicklung der Theorie der arithmetisch brauchbaren Idealsysteme und der Kroneckerschen Funktionalringe. — Die bei Prüfer allein im Vordergrund stehende Tatsache, daß alle Funktionalringe Hauptidealringe sind, hat für sich allein genommen verhältnismäßig wenig zu besagen, da es sehr häufig vorkommt, daß in einem Funktionalring $\tilde{\mathfrak{R}}$ verschiedene, ja sogar unendlich viele Hauptideale existieren, die dasselbe Verengungsideal hinsichtlich $\mathfrak{I}$ besitzen.

Z. Die nächste Weiterarbeit über $\Delta.$ und E. hinaus kann in mehrfacher Richtung erfolgen. Erstens wird man in Anbetracht der überragenden Stellung des Funktionalringes $\tilde{\mathfrak{M}}$ die zu $\tilde{\mathfrak{M}}$ führenden Idealsysteme Σ_a und Σ_b einer genaueren Strukturuntersuchung unterwerfen, wobei vom Standpunkt der Bewertungstheorie aus naturgemäß das System Σ_b im Vordergrund steht. Daß jedes b-Ideal ganz abgeschlossen ist, zeigt die „Beweismethode" in A. Darüber hinaus ergibt sich aus dem Zu-

[7]) H. Grell: Beziehungen zwischen den Idealen verschiedener Ringe, Math. Annalen 97 (1927), S. 490—523, § 6.

sammenhang zwischen arithmetisch brauchbaren Idealsystemen und Funktionalringen sofort: Ein Ideal mit endlicher Basis ist dann und nur dann b-Ideal, wenn es ganz abgeschlossen ist. — Es wäre nun sehr erfreulich, wenn man die volle Identität der Idealsysteme Σ_a und Σ_b sicherstellen könnte. Doch zeigt sich da wenigstens auf den ersten Blick keine Möglichkeit eines Beweisansatzes. Nur die wichtige Tatsache, daß alle Primideale und damit auch alle „Radikale" nicht bloß, wie fast selbstverständlich, ganz abgeschlossen, sondern auch b-Ideale sind, kann verhältnismäßig einfach bewiesen werden.

In zweiter Linie wird man das *Artin-van der Waerdensche System Σ_v der „v-Ideale"* [8]) in den Rahmen der allgemeinen Theorie einzuordnen suchen. Es ergibt sich: Σ_v ist in allen Systemen Σ_N als Untermenge enthalten. Ist also Σ_v selbst arithmetisch brauchbar, so ist der zugehörige Funktionalring $\mathfrak{R}_v$ Oberring aller anderen Funktionalringe und bei jedem echten Quotientenring von $\mathfrak{R}_v$ ist der Durchschnitt mit $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{I}$ verschieden. Indessen ist Σ_v, wie ein einfaches von Prüfer angegebenes Beispiel zeigt, keineswegs immer arithmetisch brauchbar, und es gehören im übrigen die v-Ideale ihrer Natur nach in erster Linie in den Gedankenkreis der „Dedekindschen Idealtheorie" im Sinne von B.

An dritter Stelle kommt die systematische Bildung von neuen Funktionalringen und zugehörigen Σ_N-Systemen als Aufgabe für die Weiterarbeit in Betracht. Es sind in der Tat derartige Bildungen möglich, und zwar mit Hilfe gewisser Primidealmengen des Ausgangsringes $\mathfrak{I}$. Dabei geht man im allgemeinen Fall zweckmäßig vom Funktionalring $\mathfrak{M}$ aus und benutzt das Endergebnis von E. Gilt dagegen in $\mathfrak{I}$ der Noethersche Teilerkettensatz, so kann man ohne Benutzung des Funktionalringes in $\mathfrak{I}$ selbst unmittelbar mit den arithmetisch brauchbaren Idealsystemen arbeiten. Man erkennt so, was der für die Noethersche „additive" Idealtheorie grundlegende Begriff der „Bildung von isolierten Komponentenidealen" bei unsern bewertungstheoretischen Untersuchungen leisten kann. Andererseits überzeugt man sich leicht, daß die benutzten Konstruktionen im allgemeinen zur Bestimmung aller Funktionalringe bzw. aller arithmetisch brauchbaren Idealsysteme keineswegs ausreichen.

Ich halte es, wenigstens vorerst, nicht für zweckmäßig, an diese negative Feststellung anzuknüpfen und nur der Vollständigkeit wegen nach neuen Konstruktionsmethoden zu suchen. Will man nicht zur Betrachtung von speziellen Ringklassen übergehen, so dürfte die wichtigste Aufgabe in einer noch tiefer eindringenden Untersuchung der b-Ideale

[8]) Die erste systematische Theorie der v-Ideale bringt § 103 der Modernen Algebra. Die Bezeichnung „v-Ideal" stammt von Prüfer (Teilbarkeitseigenschaften § 7).

bestehen. Man vergleiche das Nachwort der Note, in dem einige hier anknüpfende Fragen kurz angedeutet sind.

1. Vorbemerkungen.

Gegenstand der Untersuchung sind ganz abgeschlossene Integritätsbereiche. $\mathfrak{R}$ bedeutet im Zusammenhang mit einem bestimmten Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ immer den Quotientenkörper; „Ideal" schlechtweg oder „Ideal aus $\mathfrak{R}$" heißt soviel wie „vom Nullideal verschiedenes $\mathfrak{J}$-Ideal"; die Elemente aus $\mathfrak{J}$ und die (mengentheoretisch) in $\mathfrak{J}$ enthaltenen Ideale werden als „ganz" bezeichnet. Zu den ganzen Idealen gehören insbesondere die Primideale. $\mathfrak{a}^{-1}$ bedeutet wie üblich das zu $\mathfrak{a}$ gehörige „reziproke Ideal". Ist $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{J}$, so heißt $\mathfrak{a}$ „umkehrbar". Ein Ideal $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ mit endlicher Basis wird kurz „endlich" genannt. Die Summe (den größten gemeinschaftlichen Teiler) der Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, für den Durchschnitt (das kleinste gemeinschaftliche Vielfache) schreiben wir wie üblich $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$ bzw. $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ kennzeichnet $\mathfrak{a}$ als Oberideal (Teiler) bzw. als Unterideal (Vielfaches) von $\mathfrak{b}$. Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sicher verschieden, so tritt $\subset$ an Stelle von $\subseteq$ bzw. $\supset$ an Stelle von $\supseteq$ [6]).

Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus $\mathfrak{J}$, so verstehen wir unter dem „Primidealquotientenring" $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ die Menge aller Quotienten $\frac{a}{b}$, bei denen a und b Elemente aus $\mathfrak{J}$ sind und insbesondere b nicht zu $\mathfrak{p}$ gehört. Den Primidealen $\tilde{\mathfrak{p}}'$ von $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ entsprechen in $\mathfrak{J}$ eindeutig umkehrbar die Primunterideale (Primidealvielfachen) $\mathfrak{p}'$ von $\mathfrak{p}$; die Zuordnung erfolgt durch die Bildung von Verengungs- und Erweiterungsideal: $\mathfrak{p}' = \tilde{\mathfrak{p}}' \cap \mathfrak{J}$, $\tilde{\mathfrak{p}}' = \mathfrak{p}' \cdot \mathfrak{J}_\mathfrak{p}$. Insbesondere enthält $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ ein einziges maximales, alle Nichteinheiten umfassendes Primideal, nämlich $\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ [7]).

Eine additive, nicht nur aus dem Einheitselement 0 bestehende Abelsche Gruppe Γ heißt (linear) geordnet, wenn zwischen ihren Elementen eine transitive Ordnungsbeziehung $>$ definiert ist mit den üblichen Eigenschaften: 1. Sind α, β beliebig aus Γ, so ist stets entweder $\alpha > \beta$ oder $\beta > \alpha$; aus $\alpha \geqq \beta$, $\beta \geqq \alpha$ folgt $\alpha = \beta$. 2. Ist $\alpha \geqq \beta$, $\gamma \geqq \delta$, so ist auch $\alpha + \gamma \geqq \beta + \delta$.

Von einer „*Bewertung*" B des Körpers $\mathfrak{R}$ mit der „*Wertgruppe*" Γ wird gesprochen, wenn jedem Element $a \neq 0$ aus $\mathfrak{R}$ eindeutig ein Element $\alpha = w(a)$ aus Γ als „*Wert*" zugeordnet ist, und wenn dabei folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $w(a \cdot b) = w(a) + w(b)$. 2. $w(a + b) \geqq \min\,(w(a), w(b))$. 3. Zu jedem $\alpha \subset \Gamma$ gibt es ein $a \subset \mathfrak{R}$, für das $w(a) = \alpha$.

Die Menge aller der $a \subset \mathfrak{R}$, für die $w(a) \geqq 0$, bildet zusammen mit der Null einen echten Unterring $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{R}$, den „*zur Bewertung B gehörigen*

Bewertungsring". Haben zwei Bewertungen B_1 und B_2 mit den Wertgruppen Γ_1 und Γ_2 denselben Bewertungsring $\mathfrak{B}$, so kann die Bewertung B_1 durch eine isomorphe Abbildung von Γ_1 auf Γ_2 in die Bewertung B_2 übergeführt werden. B_1 und B_2, Γ_1 und Γ_2 sind also abstrakt identisch, und man darf infolgedessen unbedenklich von *der* zu einem gegebenen Bewertungsring $\mathfrak{B}$ gehörigen Bewertung B bzw. Wertgruppe Γ sprechen. Im folgenden bedeutet $\mathfrak{B}\ldots$ mit gewissen Indizes stets den zu der durch die gleichen Indizes ausgezeichneten Bewertung $B\ldots$ gehörigen Bewertungsring und umgekehrt. Die Bestimmung einer Bewertung und die eines Bewertungsringes sind für uns geradezu identische Aufgaben[2]).

2. Grundlegende Sätze über Bewertungsringe.

Satz 1. *Ein Integritätsbereich $\mathfrak{B}$ ist dann und nur dann Bewertungsring, wenn in $\mathfrak{B}$ von zwei Elementen a und b stets eines durch das andere teilbar ist.*

Satz 2. *$\mathfrak{B}$ ist dann und nur dann Bewertungsring, wenn in $\mathfrak{B}$ die Menge aller Nichteinheiten ein Ideal bildet, und wenn im Quotientenkörper $\mathfrak{K}$ jeder echte Oberring von $\mathfrak{B}$ mindestens ein Reziprokes einer Nichteinheit von $\mathfrak{B}$ enthält.*

Die einfachen Beweise der Sätze 1 und 2 finden sich auf S. 165 und S. 168 der „Bewertungstheorie".

Satz 3. *Fundamentalsatz der ganz abgeschlossenen Integritätsbereiche: Jeder ganz abgeschlossene Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ ist gleich dem Durchschnitt aller $\mathfrak{J}$ umfassenden Bewertungsringe $\mathfrak{B}_\tau$ aus dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$:* $\mathfrak{J} = \bigcap_\tau \mathfrak{B}_\tau$.

Zum Beweis hat man nur zu zeigen: Ist α ein nicht zu $\mathfrak{J}$ gehöriges Element aus $\mathfrak{K}$, so gibt es einen Bewertungsring $\mathfrak{B}$, der zwar $\mathfrak{J}$, aber nicht α enthält. — α^{-1} kann in $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}[\alpha^{-1}]$ nicht Einheit sein, weil sonst α von $\mathfrak{J}$ ganz abhängen und mithin zu $\mathfrak{J}$ gehören müßte. Es ergibt sich nun aus leichten Wohlordnungsschlüssen, daß in $\mathfrak{K}$ zu $\mathfrak{J}'$ mindestens ein maximaler, $\alpha = (\alpha^{-1})^{-1}$ nicht enthaltender Oberring $\mathfrak{B}$ existiert, und nach Satz 2 erweist sich $\mathfrak{B}$ als Bewertungsring. Fertig! (Ausführlich: Bewertungstheorie S. 169).

Der Fundamentalsatz zeigt, daß in jedem ganz abgeschlossenen Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ über die Teilbarkeitsverhältnisse der Elemente durch Einführung von Bewertungen entschieden werden kann. (Genauere Formulierung dieser Tatsache: Bewertungstheorie S. 163, Bericht S. 104). Der Nachteil des Fundamentalsatzes liegt in dem Umstand, daß es sich um ein reines Existenztheorem handelt, da im allgemeinen die Menge aller $\mathfrak{J}$ umfassenden Bewertungsringe in $\mathfrak{K}$ gar nicht zu überblicken ist.

Gleichwohl führt Satz 3 unter Umständen zu überraschend einfachen Beweisen. Z. B.:

Satz 4. Kroneckerscher Satz: *Es seien* $f(x)$, $g(x)$, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ *Polynome in* $x_1, \ldots, x_n$ *mit Koeffizienten* a_i, b_i, c_i *aus dem ganz abgeschlossenen Integritätsbereich* $\mathfrak{I}$. *Sind dann in* $\mathfrak{I}$ *alle Koeffizienten* c_i *von* $h(x)$ *durch ein Element* c *teilbar, so sind es auch alle Einzelprodukte* $a_i \cdot b_k$[9]).

In der Tat, ist $\mathfrak{I} = \mathfrak{B}$ Bewertungsring, so rechnet man die Richtigkeit der Behauptung ebenso mühelos nach wie etwa im Fall ganz rationaler Koeffizienten a_i, b_i, c_i. Satz 3 gestattet dann, durch Durchschnittsbildung auf den Fall eines beliebigen Integritätsbereichs $\mathfrak{I}$ zu schließen. („Beweismethode" der Einleitung!).

Satz 5. *In* $\mathfrak{K}$ *ist jeder Oberring* $\mathfrak{C}$ *eines vorgegebenen Bewertungsringes* $\mathfrak{B}$ *selbst Bewertungsring und Primidealquotientenring von* $\mathfrak{B}$.

a) Jeder Primidealquotientenring $\mathfrak{B}_\mathfrak{p}$ ist Bewertungsring, da $\mathfrak{B}_\mathfrak{p}$ stets gleichzeitig mit $\mathfrak{B}$ der Teilbarkeitsbedingung von Satz 1 genügt. b) Sei $\mathfrak{C} = \mathfrak{B} + \mathsf{M}$ irgendein (natürlich von $\mathfrak{K}$ selbst verschiedener) echter Oberring von $\mathfrak{B}$. Die Menge M der zu $\mathfrak{B}$ hinzugenommenen Elemente besteht dann ausschließlich aus Reziproken von Nichteinheiten aus $\mathfrak{B}$, und es enthält $\mathfrak{C}$ mit a^{-1} stets auch b^{-1}, falls b in $\mathfrak{B}$ Teiler von a. Wir betrachten nun in $\mathfrak{B}$ die Summe (den größten gemeinschaftlichen Teiler) $\mathfrak{p}$ aller der ganzen Ideale, die kein Reziprokes eines Elementes aus M enthalten. Da in $\mathfrak{B}$ von zwei Idealen stets eines Oberideal des andern ist, (leichte Folgerung aus Satz 1!), kann auch in $\mathfrak{p}$ selbst kein Reziprokes eines Elementes aus M auftreten; außerdem muß $\mathfrak{p}$ Primideal sein, weil aus $a \subset \mathfrak{a}$, $b \subset \mathfrak{b}$, $a^{-1} \subset \mathsf{M}$, $b^{-1} \subset \mathsf{M}$ stets $a \cdot b \subset \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$, $(a \cdot b)^{-1} \subset \mathsf{M}$ folgt. Ist ferner a irgendein nicht zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Element aus $\mathfrak{B}$, so ist (a) echtes Oberideal von $\mathfrak{p}$, es muß daher das Reziproke eines Elementes aus (a), und damit a^{-1} in $\mathfrak{C}$ liegen. Das heißt aber: $\mathfrak{C}$ entsteht aus $\mathfrak{B}$ durch Hinzunahme der Reziproken aller nicht in $\mathfrak{p}$ enthaltenen Elemente: $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}_\mathfrak{p}$.

Aus der Theorie der allgemeinen Bewertungen ist bekannt, daß die Menge aller Primideale eines Bewertungsringes durch die zugehörige Wertgruppe eindeutig bestimmt ist. Aus Satz 5 folgt daher: Es seien $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ Bewertungsringe in den Körpern $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ mit der gleichen Wertgruppe Γ. Dann entsprechen die Oberringe von $\mathfrak{B}_1$ in $\mathfrak{K}_1$ eindeutig umkehrbar den Oberringen von $\mathfrak{B}_2$ in $\mathfrak{K}_2$. (Anwendung dieser Bemerkung in 5.).

---

[9]) Der erste Beweis des Kroneckerschen Satzes für beliebige ganz abgeschlossene Integritätsbereiche stammt von Prüfer (Teilbarkeitseigenschaften § 9). Prüfer arbeitet nicht mit den Hilfsmitteln der Bewertungstheorie, sondern er stützt sich auf die Eigenschaften des Systems Σ_a der a-Ideale.

3. Multiplikationsringe.

Es sei im Quotientenkörper $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{J}$ ein $\mathfrak{J}$ umfassender Bewertungsring $\mathfrak{B}$ gegeben, $\mathfrak{m}$ sei in $\mathfrak{B}$ das maximale Primideal aller Nichteinheiten, $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{J}$ bedeute das Durchschnittsprimideal von $\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{J}$. Dann ist sicher $\mathfrak{J}_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{B}$. *Ist ferner* $\mathfrak{J}_\mathfrak{p} = \mathfrak{C}$ *selbst Bewertungsring, so wird notwendig* $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}$. — Wäre nämlich $\mathfrak{C}$ echter Unterring von $\mathfrak{B}$, so wäre (nach 2.) $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}_{\tilde{\mathfrak{p}}'}$, und es müßte in $\mathfrak{C}$ das Primideal $\tilde{\mathfrak{p}}'$ von dem maximalen Primideal $\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ verschieden sein; dann aber folgte (vgl. die Schlußbemerkung von 1.) weiter: $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{J} = (\mathfrak{m} \cap \mathfrak{C}) \cap \mathfrak{J} = \tilde{\mathfrak{p}}' \cap \mathfrak{J} = \mathfrak{p}' \neq \mathfrak{p}$ entgegen der Definition von $\mathfrak{p}$. Wird $\mathfrak{B} = \mathfrak{J}_\mathfrak{p}$, hat man also zur Konstruktion von $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{J}$ nur die Kenntnis des Durchschnittsprimideals $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{J} = \mathfrak{p}$ nötig, so wollen wir sagen, es sei $\mathfrak{B}$ (durch $\mathfrak{J}$) „explizit gegeben". Die Klasse K aller der Integritätsbereiche $\mathfrak{J}$, bei denen sämtliche umfassenden Bewertungsringe $\mathfrak{B}$ explizit gegeben sind, verdient offenbar vom Standpunkt der Bewertungstheorie besondere Beachtung. Es ist daher gewissermaßen ein glücklicher Zufall, daß diese Klasse auch rein idealtheoretisch leicht charakterisiert werden kann.

Ein Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ möge „*Multiplikationsring*" (im weiteren Sinne [3]) heißen, wenn jedes endliche $\mathfrak{J}$-Ideal $\mathfrak{a}$ umkehrbar ist, wenn also bei endlichem $\mathfrak{a}$ und beliebigem $\mathfrak{c}$ die Gleichung $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{c}$ stets die eindeutige Lösung $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}^{-1} \cdot \mathfrak{c}$ hat. — Zu den Multiplikationsringen gehören insbesondere die „*Hauptidealringe*" (im weiteren Sinne [4]), in denen jedes endliche Ideal Hauptideal ist. Jeder Bewertungsring und jeder Durchschnitt von endlich vielen Bewertungsringen ist Hauptidealring, also spezieller Multiplikationsring. Umgekehrt gilt:

Satz 6. *Ein Multiplikationsring ist dann (und selbstverständlich nur dann) ein Bewertungsring, wenn in ihm die Menge aller Nichteinheiten ein Ideal bildet.*

Zum Beweis haben wir zu zeigen, daß unter der Voraussetzung von Satz 6 in $\mathfrak{M}$ von zwei ganzen Elementen a, b stets eines durch das andere teilbar ist. Es sei $(a, b) = \mathfrak{t}$, $(a) = \mathfrak{t} \cdot \mathfrak{a}$, $(b) = \mathfrak{t} \cdot \mathfrak{b}$. Dann ist $\mathfrak{t}$ als Hauptidealfaktor sicher umkehrbar, aus $(a, b) = \mathfrak{t} \cdot (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \mathfrak{t}$ folgt daher $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{J}$, also unter unserer Voraussetzung $\mathfrak{a} = \mathfrak{J}$ oder $\mathfrak{b} = \mathfrak{J}$. — Ist aber etwa $\mathfrak{a} = \mathfrak{J}$, so heißt das $(a, b) = (a)$, $b \equiv 0\ (a)$.

Satz 7. $\mathfrak{M}$ *ist dann und nur dann Multiplikationsring, wenn alle Primidealquotientenringe* $\mathfrak{M}_\mathfrak{p}$ *Bewertungsringe, d. h. wenn alle* $\mathfrak{M}$ *umfassenden Bewertungsringe* $\mathfrak{B}$ *explizit gegeben sind.*

a) Die Gleichwertigkeit der beiden in Satz 7 aufgestellten Behauptungen ergibt sich aus den Bemerkungen vom Beginn der Nummer und aus der erst in 8. zu beweisenden Tatsache, daß bei jedem ganz ab-

geschlossenen Integritätsbereich $\mathfrak{M}$ zu jedem Primideal $\mathfrak{p}$ stets ein $\mathfrak{M}$ umfassender Bewertungsring $\mathfrak{B}$ existiert, dessen maximales Primideal $\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{M}$ gerade den Durchschnitt $\mathfrak{p}$ hat. — b) Ist $\mathfrak{M}$ Multiplikationsring, so ist es auch $\mathfrak{M}_\mathfrak{p}$, und es bildet in $\mathfrak{M}_\mathfrak{p}$ die Menge aller Nichteinheiten das Ideal $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{M}_\mathfrak{p}$. Nach Satz 6 ist daher $\mathfrak{M}_\mathfrak{p}$ Bewertungsring. — c) Es sei für jedes Primideal $\mathfrak{p}_\tau$ von $\mathfrak{M}$ stets $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}_\tau}$ Bewertungsring. Ist dann $\mathfrak{a}$ ein beliebiges ganzes Ideal aus $\mathfrak{M}$ und setzt man $\mathfrak{a}_b = \underset{\tau}{\Delta}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}_\tau)$, wobei $\mathfrak{B}_\tau$ alle zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{K}$ liegenden Bewertungsringe und damit sicher auch alle Primidealquotientenringe $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}_\tau}$ durchläuft, so wird $\mathfrak{a}_b = \mathfrak{a}$, weil für jedes $a \subset \mathfrak{a}_b$ der im Sinne der ganzen Ideale gebildete Idealquotient $\mathfrak{a} : (a) = \mathfrak{a} \cdot (a^{-1}) \cap \mathfrak{J}$ in keinem einzigen Primideal $\mathfrak{p}_\tau$ von $\mathfrak{M}$ enthalten sein kann, und somit gleich $\mathfrak{M}$ sein muß[10]). Die Gleichung $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_b$ besagt, daß $\mathfrak{a}$ ein „b-Ideal" darstellt in dem Sinne, wie wir ihn in 4. festlegen werden. Nach dem gleichfalls in 4. zu beweisenden Eindeutigkeitssatz 10 muß daher in $\mathfrak{M}$ aus $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}$ bei endlichem $\mathfrak{a}$ stets $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ folgen. Aus dieser letzteren Bemerkung ergibt sich aber nach einem (sehr einfach zu beweisenden) Satz von Prüfer[11]) die Umkehrbarkeit jedes endlichen $\mathfrak{a}$.

Es sei noch kurz auf einen anderen von Prüfer stammenden rein idealtheoretischen Satz über Multiplikationsringe hingewiesen, der zwar für das folgende unwesentlich, aber an und für sich bemerkenswert ist:

Satz 8. *Ist $\widetilde{\mathfrak{K}}$ algebraischer Oberkörper des Quotientenkörpers $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{M}$, $\widetilde{\mathfrak{M}}$ der Ring aller von $\mathfrak{M}$ ganz abhängigen Elemente aus $\widetilde{\mathfrak{K}}$, so ist $\widetilde{\mathfrak{M}}$ immer gleichzeitig mit $\mathfrak{M}$ Multiplikationsring*[12]).

Es sei $\tilde{\mathfrak{a}} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_q)$ irgendein endliches $\widetilde{\mathfrak{M}}$-Ideal aus $\widetilde{\mathfrak{K}}$. Dann setze man $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_q x^q$, wähle irgendein durch $p(x)$ teilbares Polynom $r(x) = (\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_q x^q) \cdot (\beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_r x^r) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_s x^s$ mit Koeffizienten c_i aus $\mathfrak{K}$, bestimme in $\mathfrak{K}$ das (sicher endliche) reziproke Ideal $(d_0, \ldots, d_t)$ zum $\mathfrak{M}$-Ideal $(c_0, \ldots, c_s)$ und bilde das $\widetilde{\mathfrak{M}}$-Ideal $\tilde{\mathfrak{m}} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_q) \cdot (\beta_0, \ldots, \beta_r) \cdot (d_0, \ldots, d_t)$. Es ist offenbar $\tilde{\mathfrak{m}} \supseteq (c_0, \ldots, c_s) \cdot (d_0, \ldots, d_t) \cdot \widetilde{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M} \cdot \widetilde{\mathfrak{M}} = \widetilde{\mathfrak{M}}$, und aus dem „Kroneckerschen" Satz 4 von 2. folgt leicht, daß alle Produkte $\alpha_\varrho \cdot \beta_\sigma \cdot d_\tau$ in $\widetilde{\mathfrak{M}}$ liegen, daß also $\tilde{\mathfrak{m}} \subseteq \widetilde{\mathfrak{M}}$ sein muß. Wir haben somit $\tilde{\mathfrak{m}} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_q) \cdot [(\beta_0, \ldots, \beta_r) \cdot (d_0, \ldots, d_t)] = \widetilde{\mathfrak{M}}$, d. h. $\tilde{\mathfrak{m}}$ ist umkehrbar.

---

[10]) Man beachte, daß jedes ganze Ideal $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{J}$ mindestens ein Primoberideal $\mathfrak{p}$ ($\neq \mathfrak{J}$!) besitzt. Vgl. Krull: Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung, Math. Annalen **101** (1923), S. 729—744.

[11]) Teilbarkeitseigenschaften § 5, S. 13. Ber. 46. Kriterium 3.

[12]) Teilbarkeitseigenschaften § 11. Der im Text skizzierte, dem Vorbild von Hurwitz nachgebildete Beweis ist dem Prüferschen Beweise gegenüber, der sich enger an Dedekind anlehnt, etwas vereinfacht.

4. Wertideale und Funktionalring.

Es sei der Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ fest gegeben, $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\tau, \ldots$ seien die sämtlichen $\mathfrak{J}$ umfassenden Bewertungsringe aus $\mathfrak{K}$, $w_\tau(a)$ bedeute den Wert des Körperelements a in der zu $\mathfrak{B}_\tau$ gehörigen Bewertung B_τ. — Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal aus $\mathfrak{K}$, so setzen wir $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}_b = \underset{\tau}{\Delta}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}_\tau)$, wobei die Durchschnittsbildung über alle $\mathfrak{B}_\tau$ zu erstrecken ist. $\mathfrak{a}_b$ besteht (außer der Null) aus allen und nur den Körperelementen a, zu denen es für jedes τ in $\mathfrak{a}$ ein der Ungleichung $w_\tau(a_\tau) \leqq w_\tau(a)$ genügendes Element a_τ gibt. — Die „*b-Operation*", die von $\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}_b$ führt, genügt den folgenden Bedingungen[13]):

(1) $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}$. (2) $\mathfrak{a}' \supseteq \mathfrak{a}$; aus $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$ folgt $\mathfrak{a}' \supseteq \mathfrak{b}'$. (3) $(\mathfrak{a}')' = \mathfrak{a}'$.
(4) $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})' = (\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}')'$. (5) $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})' = (\mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b}')'$. (6) $(\mathfrak{a}' \cap \mathfrak{b}')' = \mathfrak{a}' \cap \mathfrak{b}'$.
(7) $(a)' = (a)$; $(a) \cdot \mathfrak{a}' = \big((a) \cdot \mathfrak{a}\big)'$.

Zum Beweis beachte man: 1. $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}$ folgt aus Satz 3. 2. $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}_\tau \supseteq \mathfrak{a}$; ist $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$, so ist auch $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}_\tau \supseteq \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{B}_\tau$. 3. $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}_\tau \subseteq \mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{B}_\tau \subseteq (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}_\tau) \cdot \mathfrak{B}_\tau = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}_\tau$. 4. $(\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}') \cdot \mathfrak{B}_\tau = \mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{B}_\tau + \mathfrak{b}' \cdot \mathfrak{B}_\tau = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}_\tau + \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{B}_\tau = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{B}_\tau$. 5. $(\mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b}') \cdot \mathfrak{B}_\tau = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{B}_\tau$. 6. $(\mathfrak{a}' \cap \mathfrak{b}')' \subseteq \underset{\tau}{\Delta}(\mathfrak{a}' \cap \mathfrak{b}') \cdot \mathfrak{B}_\tau \subseteq \underset{\tau}{\Delta} \mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{B}_\tau \cap \underset{\tau}{\Delta} \mathfrak{b}' \cdot \mathfrak{B}_\tau = \mathfrak{a}' \cap \mathfrak{b}'$. 7. Ist $w_\tau(c_\tau) \leqq w_\tau(c)$, $c_\tau \subset (a) \cdot \mathfrak{a}$, so ist $w_\tau(a^{-1} \cdot c_\tau) \leqq w_\tau(a^{-1} \cdot c)$, $a^{-1} \cdot c_\tau \subset \mathfrak{a}$; aus $c \subset \big((a) \cdot \mathfrak{a}\big)'$ folgt also $a^{-1} \cdot c \subset \mathfrak{a}'$. — Anwendung der Formel $(a) \cdot \mathfrak{a}' = \big((a) \cdot \mathfrak{a}\big)'$ auf $\mathfrak{a} = \mathfrak{J}$ liefert: $(a)' = (a) \cdot \mathfrak{J}' = (a) \cdot \mathfrak{J} = (a)$.

Zum besseren Verständnis der inneren Bedeutung von Formel (1) bis (7) sei bemerkt: Rechnet man zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in dieselbe Klasse, wenn $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}_b = \mathfrak{b}' = \mathfrak{b}_b$ ist, so kann man nach Formel (4) und (5) die Addition und Multiplikation der entstehenden Idealklassen dadurch definieren, daß man sie auf die Addition und Multiplikation beliebiger Repräsentanten zurückführt, und in ähnlicher Weise läßt sich auf Grund der Formel (2) eine $\supseteq$-Beziehung für die Klassen erklären. Andererseits zeigt Formel (3), daß jede Klasse ein einziges maximales Ideal $\mathfrak{a}^*$ enthält, das eindeutig dadurch ausgezeichnet ist, daß es der Gleichung $\mathfrak{a}_b^* = \mathfrak{a}^*$ genügt. Wir bezeichnen diese maximalen Klassenideale kurz als „*b-Ideale*". Das System Σ_b aller b-Ideale ist nach Formel (6) hinsichtlich der Durchschnittsbildung abgeschlossen; nach Formel (7) enthält Σ_b alle Hauptideale, eine Tatsache, die für die arithmetische Brauchbarkeit der b-Operation von

---

[13]) Die folgenden Formeln werden uns in 6. zur Definition des Begriffes der allgemeinen '-Operation dienen. Deshalb schreiben wir schon hier bei ihnen überall $\mathfrak{a}'$ statt $\mathfrak{a}_b$. — Zu den Formeln (1) bis (7) vgl. Bericht 43., wo allerdings die Formeln (1) und (6) des Textes fehlen.

entscheidender Bedeutung ist, da ja die multiplikative Gruppe der Hauptideale die Teilbarkeitsverhältnisse der Elemente von $\mathfrak{Z}$ wiedergibt.

Hinsichtlich der Summen- und Produktbildung ist Σ_b nicht abgeschlossen. Will man eine „*b-Multiplikation*" erhalten, die nicht aus Σ_b herausführt, so muß man $\mathfrak{a}_b \times \mathfrak{b}_b = (\mathfrak{a}_b \cdot \mathfrak{b}_b)_b$ setzen. (Entsprechendes würde natürlich für die Summenbildung gelten.)

Auf der anderen Seite läßt sich für die durch die b-Operation erzeugten Idealklassen keine Durchschnittsbildung definieren. Denn es wird unter Umständen $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})'$ echtes Unterideal von $\mathfrak{a}' \cap \mathfrak{b}'$, wie die folgende Überlegung zeigt: Es sei $\mathfrak{a}$ irgend ein ganzes Ideal, für das $\mathfrak{a}_b \supset \mathfrak{a}$ ist, a bedeute ein zu $\mathfrak{a}_b$, aber nicht zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Element. Dann wird $\mathfrak{a}_b : (a) = \mathfrak{a}_b \cdot (a^{-1}) \cap \mathfrak{Z} = (\mathfrak{a} \cdot (a^{-1}))_b \cap \mathfrak{Z}_b = \mathfrak{Z}$, $\mathfrak{a} : (a) = \mathfrak{a} \cdot (a^{-1}) \cap \mathfrak{Z} \subset \mathfrak{Z}$ und nach Satz 24 von 8. muß unter diesen Umständen auch $(\mathfrak{a} : (a))_b \subset \mathfrak{Z}$ sein.

Das Arbeiten mit den Idealklassen entspricht dem Standpunkt von van der Waerden und Artin, die ausschließliche Benutzung des Systems Σ_b dem von Prüfer. Der Standpunkt des Textes ist im gewissen Sinne vermittelnd. Einerseits rechnen wir nicht mit den Idealklassen, sondern mit den b-Idealen, andererseits stellen wir (im Gegensatz zur Einleitung, wo die Kürze des Ausdrucks maßgebend war) nicht das System Σ_b selbst, sondern die b-Operation, die das System aller gewöhnlichen Ideale auf Σ_b abbildet, in den Vordergrund.

Satz 9. *Jedes umkehrbare Ideal ist b-Ideal.*

Ist nämlich $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{Z}$, so ist (nach (5) und (1)) $\mathfrak{a}_b \cdot \mathfrak{a}_b^{-1} = \mathfrak{Z}$, also (nach (2)) auch $\mathfrak{a}_b \cdot \mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{Z}$, d. h. $\mathfrak{a}_b = (\mathfrak{a}_b \cdot \mathfrak{a}^{-1}) \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$. Aus Satz 9 folgt insbesondere, daß in einem Multiplikationsring alle endlichen Ideale b-Ideale sind. Die bereits in 3. benutzte Umkehrung ergibt sich aus

Satz 10. *Eindeutigkeitssatz: Aus* $\mathfrak{a}_b \times \mathfrak{b}_b \subseteq \mathfrak{a}_b \times \mathfrak{c}_b$ *folgt stets* $\mathfrak{b}_b = \mathfrak{c}_b$, *falls* $\mathfrak{a}_b$ *„b-endlich" ist, d. h. aus einem endlichen Ideal durch den b-Prozeß entsteht,* $\mathfrak{a}_b = (a_1, \ldots, a_r)_b$.

Ist nämlich $\mathfrak{a}_b$ b-endlich, so ist $\mathfrak{a}_b \cdot \mathfrak{B}_\tau$ für jedes τ Hauptideal, und damit als $\mathfrak{B}_\tau$-Ideal umkehrbar. Aus $(\mathfrak{a}_b \times \mathfrak{b}_b) \cdot \mathfrak{B}_\tau = (\mathfrak{a}_b \cdot \mathfrak{b}_b) \cdot \mathfrak{B}_\tau = (\mathfrak{a}_b \cdot \mathfrak{B}_\tau) \cdot (\mathfrak{b}_b \cdot \mathfrak{B}_\tau) \subseteq (\mathfrak{a}_b \times \mathfrak{c}_b) \cdot \mathfrak{B}_\tau = (\mathfrak{a}_b \cdot \mathfrak{c}_b) \cdot \mathfrak{B}_\tau = (\mathfrak{a}_b \cdot \mathfrak{B}_\tau) \cdot (\mathfrak{c}_b \cdot \mathfrak{B}_\tau)$ folgt daher $\mathfrak{b}_b \cdot \mathfrak{B}_\tau \subseteq \mathfrak{c}_b \cdot \mathfrak{B}_\tau$ für jedes τ. — Satz 10 läßt sich auch so formulieren: *Bei jeder Gleichung zwischen b-Produkten kann ein auf beiden Seiten auftretender b-endlicher Faktor „wegdividiert" werden.*

Satz 11. Gaußscher Satz: *Sind* $p(x), q(x), r(x) = p(x) \cdot q(x)$ *Polynome in endlich vielen Variabeln* $x_1, \ldots, x_n$ *mit Koeffizienten aus* $\mathfrak{R}$, *und bedeutet* $\mathfrak{a}$ *bzw.* $\mathfrak{b}$ *bzw.* $\mathfrak{c}$ *das aus den Koeffizienten von p bzw. q bzw. r abgeleitete Ideal, so ist stets* $\mathfrak{a}_b \times \mathfrak{b}_b = \mathfrak{c}_b$.

Erster Beweis: Man überlegt sich ebenso einfach wie beim Kroneckerschen Satz, daß für jedes τ die Gleichung

$$(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{B}_\tau = (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{B}_\tau)\cdot(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{B}_\tau) = \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{B}_\tau$$

gilt.

Zweiter Beweis[14]): Nach einem Dedekind-Mertensschen Hilfssatz ist für großes n sicher $\mathfrak{a}^n\cdot(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}^n\cdot\mathfrak{c}$. Es ist also auch $\mathfrak{a}_\mathfrak{b}^n \times (\mathfrak{a}_\mathfrak{b}\times\mathfrak{b}_\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}_\mathfrak{b}^n\times\mathfrak{c}_\mathfrak{b}$, und da $\mathfrak{a}$ endlich ist, folgt daraus $\mathfrak{a}_\mathfrak{b}\times\mathfrak{b}_\mathfrak{b} = \mathfrak{c}_\mathfrak{b}$ nach Satz 10.

Der zweite Beweis ist für uns deshalb wichtig, weil er nicht die inhaltliche Definition der b-Ideale, sondern allein den Eindeutigkeitssatz 10 benutzt.

Mit Hilfe der b-Ideale soll nunmehr in einem rein transzendenten Oberkörper $\overline{\mathfrak{K}}$ von $\mathfrak{K}$ ein zu $\mathfrak{J}$ gehöriger „Kroneckerscher Funktionalring" konstruiert werden. Der Einfachheit halber nehmen wir dabei $\overline{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}(x)$ als einfach transzendente Erweiterung von $\mathfrak{K}$ an. Es verdient aber hervorgehoben zu werden, daß die Konstruktion in genau derselben Weise durchgeführt werden kann, wenn $\overline{\mathfrak{K}}$ aus $\mathfrak{K}$ durch Adjunktion einer Variabelnmenge $x_1, \ldots, x_\tau \ldots$ von beliebiger Mächtigkeit entsteht.

Satz 12. *In* $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(x)$ *bildet die Menge* M *aller der* $\alpha(x) = \dfrac{a_0 x^m + \ldots + a_m}{b_0 x^n + \ldots + b_n}$, *bei denen* $(a_0, \ldots, a_m)_\mathfrak{b} \subseteq (b_0, \ldots, b_n)_\mathfrak{b}$ *ist, einen Ring* $\overline{\mathfrak{M}}$, *der der Gleichung* $\overline{\mathfrak{M}} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{J}$ *genügt*[15]).

α) Die Entscheidung über die Zugehörigkeit von $\alpha(x)$ zu M hängt nicht von der besonderen Darstellung von $\alpha(x)$ ab. Es sei nämlich $\alpha(x) = \dfrac{s(x)}{r(x)} = \dfrac{s_0 x^\sigma + \ldots + s_\sigma}{r_0 x^\varrho + \ldots + r_\varrho}$ die gekürzte Darstellung von $\alpha(x)$, $\dfrac{a(x)}{b(x)} = \dfrac{a_0 x^m + \ldots + a_m}{b_0 x^n + \ldots + b_n}$ $(a(x) = s(x)\cdot t(x),\quad b(x) = r(x)\cdot t(x),\quad t(x) = t_0 x^\tau + \ldots + t_\tau)$ sei irgendeine andere Darstellung; dann folgt nach dem Gaußschen Satz aus $(s_0, \ldots, s_\sigma)_\mathfrak{b} \subseteq (r_0, \ldots, r_\varrho)_\mathfrak{b}$ sofort $(a_1, \ldots, a_m)_\mathfrak{b} = (s_0, \ldots, s_\sigma)_\mathfrak{b}\times(t_0, \ldots, t_\tau)_\mathfrak{b} \subseteq (b_0, \ldots, b_n)_\mathfrak{b} = (r_0, \ldots, r_\varrho)_\mathfrak{b}\times(t_0, \ldots, t_\tau)_\mathfrak{b}$, und umgekehrt ergibt sich aus $(a_0, \ldots, a_m)_\mathfrak{b} \subseteq (b_0, \ldots, b_n)_\mathfrak{b}$ durch die nach Satz 10 mögliche „Wegdivision" von $(t_0, \ldots, t_\tau)_\mathfrak{b}$ unmittelbar $(s_0, \ldots, s_\sigma)_\mathfrak{b} \subseteq (r_0, \ldots, r_\varrho)_\mathfrak{b}$.

β) Daß mit $\dfrac{a(x)}{b(x)}$ und $\dfrac{c(x)}{d(x)}$ auch $\dfrac{a(x)}{b(x)} + \dfrac{c(x)}{d(x)} = \dfrac{a(x)\cdot d(x) + b(x)\cdot c(x)}{b(x)\cdot d(x)}$ und $\dfrac{a(x)}{b(x)}\cdot\dfrac{c(x)}{d(x)}$ zu M gehört, folgt aus dem Gaußschen Satz.

γ) Gehört $a \subset \mathfrak{K}$ zu M, so ist $(a) \subseteq (1)_\mathfrak{b} = \mathfrak{J}$, also $a \subset \mathfrak{J}$.

---

[14]) Vgl. Teilbarkeitseigenschaften § 9.

[15]) Satz 12 bis 14 stammen von Prüfer (Teilbarkeitseigenschaften § 12).

Satz 13. *In $\mathfrak{M}$ ist jedes endliche Ideal Hauptideal, $\mathfrak{M}$ ist also ein Multiplikationsring von besonders einfacher Art.*

Es genügt zu zeigen, daß stets $(\alpha(x), \beta(x)) = (\gamma(x))$ ist. Sei $\alpha(x) = \frac{a(x)}{n(x)}$, $\beta(x) = \frac{b(x)}{n(x)}$; dann wähle man m größer als den Grad von $a(x)$ und setze $\gamma(x) = \alpha(x) + x^m \cdot \beta(x)$!

Satz 14: *Für jedes endliche Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ wird $(\mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}) \frown \mathfrak{R} = \mathfrak{a}_b$.*

Ist nämlich $\mathfrak{a} = (a_0, \ldots, a_n)$, so wird $\mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{M}} = (a_0 x^n + \ldots + a_n)$, und nach Definition ist dann und nur dann $c \subset \mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}$, d. h. $\frac{c}{a_0 x^n + \ldots + a_n} \subset \widetilde{\mathfrak{M}}$, wenn $c \subset (a_0, \ldots, a_n)_b$.

5. Der Hauptsatz über den Funktionalring $\widetilde{\mathfrak{M}}$.

Eine Bewertung B von $\mathfrak{R}$, deren Bewertungsring $\mathfrak{B}$ den Integritätsbereich $\mathfrak{I}$ umfaßt, möge „*zu $\mathfrak{I}$ gehörig*“ heißen. Da der Funktionalring $\widetilde{\mathfrak{M}}$ Multiplikationsring ist, sind nach 3. *alle zu $\widetilde{\mathfrak{M}}$ gehörigen Bewertungen $\widetilde{B}$ von $\mathfrak{R}$* (bzw., was auf dasselbe herauskommt, ihre Bewertungsringe $\widetilde{\mathfrak{B}}$) *explizit gegeben.* Es soll jetzt ein Zusammenhang zwischen den zu $\widetilde{\mathfrak{M}}$ gehörigen Bewertungen $\widetilde{B}$ und den zu $\mathfrak{I}$ gehörigen Bewertungen B hergestellt werden.

Die Bewertung $\widetilde{B}$ von $\widetilde{\mathfrak{R}}$ bzw. ihr Bewertungsring $\widetilde{\mathfrak{B}}$ heißt „*Fortsetzung*“ der Bewertung B von $\mathfrak{R}$ bzw. ihres Bewertungsringes $\mathfrak{B}$, wenn (bei geeigneter Normierung der Wertgruppe) die Elemente von $\mathfrak{R}$ in B genau dieselben Werte haben wie in $\widetilde{B}$, d. h. wenn $\widetilde{\mathfrak{B}}$ der Gleichung $\widetilde{\mathfrak{B}} \frown \mathfrak{R} = \mathfrak{B}$ genügt. — Zu jeder Bewertung B von $\mathfrak{R}$ gibt es eine eindeutig bestimmte „triviale“ Fortsetzung $\widetilde{B}^*$ auf $\widetilde{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}(x)$, die man folgendermaßen erhält: Ist $\alpha(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ irgend ein Element aus $\widetilde{\mathfrak{R}}$ und bedeutet ϱ bzw. σ den kleinsten unter den Werten, die die Koeffizienten des Polynoms $a(x)$ bzw. $b(x)$ in B haben, so wird der Wert von $\alpha(x)$ in $\widetilde{B}$ gleich $\varrho - \sigma$ gesetzt. — Wie man sieht, kann $\widetilde{B}^*$ auch dadurch charakterisiert werden, daß $\widetilde{\mathfrak{B}}^*$ in bezug auf $\mathfrak{B} = \mathfrak{I}$ gerade die Rolle des Funktionalrings $\widetilde{\mathfrak{M}}$ spielt[16]). — Da $\widetilde{B}^*$ und B dieselben Wertgruppen haben, entsprechen nach einer am Schlusse von 2. gemachten Bemerkung die Oberringe von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{R}$ eindeutig umkehrbar den Oberringen von $\widetilde{\mathfrak{B}}^*$ in $\widetilde{\mathfrak{R}}$. Sind $\mathfrak{C}$ und $\widetilde{\mathfrak{C}}^*$ zusammengehörige Oberringe, so ist $\mathfrak{C} = \widetilde{\mathfrak{C}}^* \frown \mathfrak{R}$, und es stellt $\widetilde{\mathfrak{C}}^*$ gerade die triviale Fortsetzung von $\mathfrak{C}$ auf $\widetilde{\mathfrak{R}}$ dar. (Folgt angesichts der Eindeutigkeit der Zuordnung einfach aus der Tatsache,

[16]) In gleicher Weise kann die triviale Fortsetzung auch dann eingeführt werden, wenn $\widetilde{\mathfrak{R}}$ aus $\mathfrak{R}$ durch Adjunktion einer Variabelnmenge von beliebiger Mächtigkeit entsteht!

daß die triviale Fortsetzung von $\mathfrak{C}$ sicher unter den Oberringen von $\overline{\mathfrak{B}}^*$ vorkommt).

Satz 15. *Hauptsatz über $\overline{\mathfrak{M}}$: Die zu $\overline{\mathfrak{M}}$ gehörigen Bewertungen $\overline{B}$ sind die trivialen Fortsetzungen der zu $\mathfrak{J}$ gehörigen Bewertungen B.*

Beweis: a) Gehört B zu $\mathfrak{J}$, so gehört $\overline{B}^*$ zu $\overline{\mathfrak{M}}$, d. h. aus $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{J}$ folgt $\overline{\mathfrak{B}}^* \supseteq \overline{\mathfrak{M}}$. — Es sei nämlich $\alpha(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ ein beliebiges Element aus $\overline{\mathfrak{K}}$, $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ bedeute das aus den Koeffizienten von $a(x)$ bzw. $b(x)$ abgeleitete $\mathfrak{J}$-Ideal. Ist dann $\mathfrak{a}_b \subseteq \mathfrak{b}_b$, so ist auch $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{a}_b \cdot \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{b}_b \cdot \mathfrak{B}$; da $\overline{\mathfrak{B}}^*$ der Funktionalring von $\mathfrak{B}$ ist, muß also jedes in $\overline{\mathfrak{M}}$ liegende $\alpha(x)$ auch in $\overline{\mathfrak{B}}^*$ liegen. — b) Ist $\overline{\mathfrak{B}}$ ein $\overline{\mathfrak{M}}$ umfassender Bewertungsring, und setzt man $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{B}} \cap \mathfrak{K}$, so ist $\mathfrak{B}$ ein echter Bewertungsring in $\mathfrak{K}$, und es wird $\overline{\mathfrak{B}}^* = \overline{\mathfrak{B}}$. — Daß $\mathfrak{B}$ ein echter Bewertungsring sein muß, und nicht etwa gleich dem Gesamtkörper $\mathfrak{K}$ werden kann, wird sich aus den folgenden Schlüssen als Nebenresultat ergeben. Im übrigen hat man, um zu zeigen, daß $\overline{\mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{B}}^*$ sein muß, nur $\overline{\mathfrak{B}} \supseteq \overline{\mathfrak{B}}^*$ zu beweisen; denn jeder echte Oberring von $\overline{\mathfrak{B}}^*$ hat ja nach dem, was oben bereits festgestellt wurde, mit $\mathfrak{K}$ einen echten Oberring von $\mathfrak{B}$ zum Durchschnitt. — Ist nun $\alpha(x)$ beliebig aus $\overline{\mathfrak{B}}^*$ gewählt, so können wir $\alpha(x)$ in der Form $\alpha(x) = \sum_0^N \frac{x^i}{a_i(x)}$ darstellen, wobei jedes der Nennerpolynome $a_i(x) = a_{i0} x^{m_i} + \ldots + a_{i m_i}$ mindestens einen Koeffizienten $a_{i k_i}$ besitzt, der nicht Nichteinheit in $\mathfrak{B}$ ist, für den also $a_{i k_i}^{-1}$ sicher zu $\mathfrak{B}$ gehört. Es ergibt sich dann der Reihe nach: $\frac{a_{i k_i} \cdot x^i}{a_i(x)} \subset \overline{\mathfrak{M}}$, weil $(a_{i k_i}) \subseteq (a_{i0}, \ldots, a_{i m_i})$; $\frac{x^i}{a_i(x)} = a_{i k_i}^{-1} \cdot \frac{a_{i k_i} \cdot x^i}{a_i(x)} \subset \mathfrak{B} \cdot \overline{\mathfrak{M}} \subseteq \overline{\mathfrak{B}}$; $\alpha(x) = \sum_0^N \frac{x^i}{a_i(x)} \subset \overline{\mathfrak{B}}$; $\overline{\mathfrak{B}}^* \subseteq \overline{\mathfrak{B}}$, weil $\alpha(x)$ beliebig aus $\overline{\mathfrak{B}}^*$. — Unsere Überlegungen zeigen gleichzeitig, daß aus $\mathfrak{B} = \mathfrak{K}$ notwendig $\overline{\mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{K}}$ folgen müßte, es erweist sich also $\mathfrak{B}$ wirklich als echter Bewertungsring, und damit ist der Beweis von Satz 15 abgeschlossen.

Erst Satz 15 zeigt meines Erachtens die volle Bedeutung der Funktionalringkonstruktion. Denn die Tragweite des Hauptidealsatzes 13 wird dadurch beeinträchtigt, daß im allgemeinen die Hauptideale von $\overline{\mathfrak{M}}$ keineswegs umkehrbar eindeutig den b-endlichen b-Idealen von $\mathfrak{J}$ entsprechen. Es sei z. B. $\mathfrak{J}$ Polynomring in y_1, y_2 über einem Grundkörper $\mathfrak{K}_0$. Dann gibt es in $\mathfrak{K}$ unendlich viele Bewertungsringe $\mathfrak{B}_\tau$, deren maximales Primideal $\mathfrak{m}_\tau$ mit $\mathfrak{J}$ gerade das Primideal $\mathfrak{p} = (y_1, y_2)$ zum Durchschnitt hat. $\mathfrak{p}$ ist daher b-Ideal und nach Satz 14 wird $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cdot \overline{\mathfrak{M}}) \cap \mathfrak{K}$. Andererseits hat (nach Satz 15) $\mathfrak{p} \cdot \overline{\mathfrak{M}}$ in $\overline{\mathfrak{M}}$, den unendlich vielen Bewertungsringen $\mathfrak{B}_\tau$ entsprechend, unendlich viele Primoberide ale und

damit auch unendlich viele Hauptoberideale. Alle diese Oberideale aber müssen mit $\mathfrak{R}$ den Durchschnitt $\mathfrak{p}$ haben, da $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{J}$ kein echtes Oberideal besitzt. — Bereits dieses einfache Beispiel zeigt also, daß man trotz des Hauptidealsatzes 13 keineswegs behaupten kann, der Funktionalring $\mathfrak{M}$ ermögliche eine Ausdehnung der Kroneckerschen Theorie der Hauptordnungen in endlichen Zahlkörpern auf beliebige ganz abgeschlossene Integritätsbereiche. Denn bei den Zahlkörpern ist gerade die eindeutig umkehrbare Zuordnung zwischen den sämtlichen Idealen von $\mathfrak{J}$ und den Hauptidealen von $\mathfrak{M}$ von entscheidender Bedeutung. — Im Rahmen der Bewertungstheorie dagegen muß man nach Satz 15 den Funktionalringen $\mathfrak{M}$ unbedingt eine zentrale Stellung einräumen: $\mathfrak{M}$ liefert „mittelbar" (d. h. auf dem Umwege über die trivialen Fortsetzungen $\mathfrak{B}^*$) eine „explizite Darstellung" der sämtlichen $\mathfrak{J}$ umfassenden Bewertungsringe $\mathfrak{B}$, da ja nach 3. die $\mathfrak{B}^*$ mit den Primidealquotientenringen $\mathfrak{M}_{\mathfrak{P}}$ von $\mathfrak{M}$ identisch sind. Durch die Konstruktion von $\mathfrak{M}$ wird also die bewertungstheoretische Aufgabe der Ermittlung aller den Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ umfassenden Ringe $\mathfrak{B}$ auf die idealtheoretische Aufgabe der Bestimmung aller in $\mathfrak{M}$ liegenden Primideale $\mathfrak{P}$ zurückgeführt.

6. '-Operationen und w-Operationen.

Eine Rechenvorschrift, die jedem $\mathfrak{J}$-Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ eindeutig ein Ideal $\mathfrak{a}'$ zuordnet, und zwar so, daß die in 4. für die b-Operation bewiesenen Formeln (1) bis (7) gelten, soll als „'-Operation" bezeichnet werden. Ein Ideal $\mathfrak{a}$, das der Gleichung $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$ genügt, heißt „'-Ideal"; entsteht $\mathfrak{a}' = (a_1, \ldots, a_n)'$ aus einem endlichen Ideal durch den '-Prozeß, so ist $\mathfrak{a}'$ als „'-endlich" anzusehen. Gilt für eine '-Operation der Eindeutigkeitssatz 10 von 4., so wollen wir sie „*arithmetisch brauchbar*" nennen[17]).

Satz 16. *Zu jeder arithmetisch brauchbaren '-Operation gehört in* $\mathfrak{\overline{R}} = \mathfrak{R}(x)$ *ein Funktionalring* $\mathfrak{\overline{M}}'$, *nämlich der Ring aller der* $\alpha(x) = \dfrac{a_0 x^m + \ldots + a_m}{b_0 x^n + \ldots + b_n}$, *bei denen* $(a_0, \ldots, a_m)' \subseteq (b_0, \ldots, b_n)'$. *Für* $\mathfrak{\overline{M}}'$ *gelten die Sätze* 13 *und* 14 *von* 4.

Ein besonderer Beweis ist unnötig, da in 4. alle einschlägigen Sätze allein auf Grund der Formeln (1) bis (7) und des Eindeutigkeitssatzes 10 hergeleitet wurden. (Beim Gaußschen Satz 11 ist natürlich der zweite Beweis zu wählen.)

[17]) Natürlich ist dabei (ebenso wie nachher beim Gaußschen Satz) $\mathfrak{a}'$ für $\mathfrak{a}_b$ zu setzen, und es hat das '-Produkt $\mathfrak{a}' \times \mathfrak{b}' = (\mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b}')'$ an die Stelle des b-Produktes $\mathfrak{a}_b \times \mathfrak{b}_b$ zu treten.

Zwei '-Operationen (1-Operation und 2-Operation) sollen „*äquivalent*" heißen, wenn sie jedem *endlichen* Ideal $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ dasselbe '-Ideal $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$ zuordnen. Aus der Definition des Funktionalringes $\mathfrak{M}'$ folgt sofort:

Satz 17. *Zwei arithmetisch brauchbare '-Operationen (1-Operation und 2-Operation) sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie zu demselben Funktionalring* $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2$ *führen.*

Der Äquivalenzbegriff soll uns dazu dienen, den Begriff der allgemeinen arithmetisch brauchbaren '-Operation in den Rahmen der Bewertungstheorie einzuordnen. — Ist M irgend eine Menge von zwischen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{K}$ liegenden Bewertungsringen $\mathfrak{B}_\sigma$ mit der Eigenschaft, daß $\mathfrak{J} = \underset{\sigma}{\Delta}\, \mathfrak{B}_\sigma$ wird, falls $\mathfrak{B}_\sigma$ alle Ringe von M durchläuft, so kann man mit Hilfe von M genau so eine '-Operation einführen, wie wir es in 4. bei der *b*-Operation mit Hilfe der Menge M^* *aller* zwischen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{K}$ liegenden Bewertungsringe $\mathfrak{B}_\tau$ taten. Eine '-Operation, die auf diese bewertungstheoretische Weise definiert ist, möge kurz als „*w*-Operation" („*Wertidealoperation*") bezeichnet werden. Die *b*-Operation ist gewissermaßen die „feinste" *w*-Operation, denn da bei ihr die Menge der benutzten Bewertungsringe am größten ist, erscheint sie allein als geeignet, *alle* bewertungstheoretisch faßbaren Eigenschaften von $\mathfrak{J}$ aufzudecken, während jede andere *w*-Operation zwangsläufig einen Teil dieser Eigenschaften verwischen muß

Satz 18. *Jede arithmetisch brauchbare '-Operation ist zu einer w-Operation äquivalent.*

Es sei eine bestimmte arithmetisch brauchbare '-Operation und ihr Funktionalring $\mathfrak{M}'$ gegeben. Dann ist nach den in 5. auf $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_b$ angewandten Schlüssen jeder $\mathfrak{M}'$ umfassende Bewertungsring (also jeder Primidealquotientenring $\mathfrak{M}'_{\mathfrak{p}'}$) der triviale Fortsetzungsring $\mathfrak{B}^*$ eines $\mathfrak{J}$ umfassenden Bewertungsringes $\mathfrak{B}$, und es wird (nach Satz 3) $\mathfrak{M}' = \underset{\sigma}{\Delta'}\, \mathfrak{B}^*_\sigma$, falls der Durchschnitt Δ' über alle Primidealquotientenringe $\mathfrak{B}^*_\sigma$ von $\mathfrak{M}'$ erstreckt wird. Ist nun $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ ein beliebiges endliches Ideal aus $\mathfrak{K}$, so wird einerseits (nach Satz 14) $\mathfrak{a}' = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{M}) \cap \mathfrak{K}$. Andererseits gilt in $\mathfrak{K}$ für das Hauptideal

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{M}' = (a_1, \ldots, a_n) \cdot \mathfrak{M}' = (a_1 + \ldots + a_n x^{n-1}) \cdot \mathfrak{M}'$$

die Durchschnittsdarstellung $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{M}' = \underset{\sigma}{\Delta'} (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}^*_\sigma)$, und daraus folgt sofort $\mathfrak{a}' = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{M}') \cap \mathfrak{K} = \underset{\sigma}{\Delta'} (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}^*_\sigma \cap \mathfrak{K}) = \underset{\sigma}{\Delta'} (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}_\sigma)$[18]. Das heißt also:

[18]) Die wichtige Gleichung $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}^*_\sigma \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}_\sigma$ folgt aus der Tatsache, daß sowohl $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}^*_\sigma$ als auch $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}_\sigma$ alle und nur die Elemente c aus $\mathfrak{K}$ enthält, die in der Bewertung B_σ keinen kleineren Wert haben als sämtliche Elemente von $\mathfrak{a}$.

Gründet man in $\mathfrak{K}$ auf die Menge M aller Bewertungsringe $\mathfrak{B}_\sigma$ ($\mathfrak{B}_\sigma = \widetilde{\mathfrak{B}}_\sigma^* \cap \mathfrak{K}$, $\widetilde{\mathfrak{B}}_\sigma^* = \mathfrak{M}'_{\mathfrak{p}_\sigma'}$) eine w-Operation, so genügt diese für jedes endliche Ideal $\mathfrak{a}$ der Gleichung $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}_w$.

Der praktischen Brauchbarkeit halber sei noch eine andere mögliche Kennzeichnung der Klassen äquivalenter $'$ Operationen hervorgehoben. — Ein Zwischenring $\mathfrak{Q}$ zwischen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{K}$ soll nach H. Grell *„Quotientenring von $\mathfrak{J}$“* [7]) heißen, wenn in $\mathfrak{J}$ ein „multiplikativ abgeschlossenes“ System S, das gleichzeitig mit a und b stets auch $a \cdot b$ enthält, so bestimmt werden kann, daß $\mathfrak{Q}$ aus der Menge aller Quotienten $\frac{z}{n}$ ($z \subset \mathfrak{J}$, $n \subset S$) besteht. Es gilt dann:

Satz 19. *Die Klassen äquivalenter, arithmetisch brauchbarer $'$-Operationen entsprechen eindeutig umkehrbar denjenigen Quotientenringen $\widetilde{\mathfrak{Q}}$ des zur b-Operation gehörigen Funktionalringes $\widetilde{\mathfrak{M}}$, die der Gleichung $\widetilde{\mathfrak{Q}} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{J}$ genügen.*

Zum Beweis hat man nur zu bedenken: a) Ist irgendeine Klasse äquivalenter arithmetisch brauchbarer $'$-Operationen gegeben, so genügt der für die Klasse charakteristische Funktionalring $\widetilde{\mathfrak{M}}'$ der Gleichung $\widetilde{\mathfrak{M}}' \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{J}$, und es ist (nach Satz 15) $\widetilde{\mathfrak{M}}'$ Oberring von $\widetilde{\mathfrak{M}}$. b) $\widetilde{\mathfrak{M}}$ ist Hauptidealring. c) Bei jedem Hauptidealring $\mathfrak{H}$ ist jeder im Quotientenkörper $\mathfrak{K}$ enthaltene Oberring $\mathfrak{Q}$ Quotientenring; das zu $\mathfrak{Q}$ gehörige System S besteht aus allen den $a \subset \mathfrak{H}$, für die $a^{-1} \subset \mathfrak{Q}$. — Ist nämlich $\alpha = \frac{a}{b} \subset \mathfrak{Q}$; $(a, b) = (t)$, $a = t \cdot c$, $b = t \cdot d$, so wird $(1) = (c, d)$; $1 = r \cdot c + s \cdot d$ ($r, s \subset \mathfrak{H}$); $\frac{1}{d} = r \cdot \alpha + s \subset \mathfrak{Q}$, wir haben also:

$$\alpha = \frac{c}{d} (c \subset \mathfrak{H},\ d \subset S).$$

Satz 19 ist auch deshalb bemerkenswert, weil bei ihm zum ersten Male von der Hauptidealringeigenschaft von $\widetilde{\mathfrak{M}}$ praktisch Gebrauch gemacht wird. — Es liegt natürlich nahe zu fragen, ob nicht zwei äquivalente arithmetisch brauchbare $'$-Operationen immer identisch sein müssen. Daß diese Frage verneint werden muß, zeigen die folgenden Überlegungen:

Bei einem Multiplikationsring $\mathfrak{M}$ sind alle überhaupt möglichen $'$-Operationen arithmetisch brauchbar und äquivalent.

Denn es gilt ja in diesem Falle der Eindeutigkeitssatz 10 bereits für das System der gewöhnlichen Ideale und es wird nach Satz 9 bei jeder $'$-Operation $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$ für jedes endliche Ideal $\mathfrak{a}$. — Wir wählen jetzt für $\mathfrak{M}$ insbesondere den Integritätsbereich aller ganzen algebraischen Zahlen. Dann wissen wir, daß in $\mathfrak{M}$ zwei verschiedene Primideale stets teiler-

fremd sind, und daß infolgedessen von zwei verschiedenen Primidealquotientenringen $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}_1}$ und $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}_2}$ (d. h. von zwei verschiedenen zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{K}$ liegenden Bewertungsringen) niemals einer den anderen als Untermenge enthält. Ist andererseits $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{B}_0$ ein bestimmter Primidealquotientenring von $\mathfrak{M}$, so ist $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$ stets „Häufungspunkt" allen übrigen Primidealquotientenringe im Sinne der topologischen Theorie der unendlichen algebraischen Zahlkörper[19]), und daraus folgt sofort: Es ist nicht nur $\mathfrak{M} = \underset{\mathfrak{B}_\tau \subset \mathsf{M}^*}{\Delta} \mathfrak{B}_\tau$, wenn $\mathfrak{B}_\tau$ die Menge M^* aller zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{K}$ liegenden Bewertungsringe durchläuft, sondern auch $\mathfrak{M} = \underset{\mathfrak{B}_\tau \subset \mathsf{M}}{\Delta} \mathfrak{B}_\tau$, wenn die Durchschnittsbildung nur über die Menge M aller von $\mathfrak{B}_0$ verschiedenen Bewertungsringe erstreckt wird. Für das zu $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$ in $\mathfrak{M}$ gehörige Primideal $\mathfrak{p}$ wird $\mathfrak{p}^{-1} = \mathfrak{M}$, weil jedes $\alpha \subset \mathfrak{p}^{-1}$ in $\underset{\mathfrak{B}_\tau \subset \mathsf{M}}{\Delta} \mathfrak{B}_\tau = \mathfrak{M}$ enthalten sein muß.

Es bezeichne nun der Buchstabe w die auf die Menge M gegründete Wertidealoperation, unter $\mathfrak{a}_v$ möge, wie später in 9., das Ideal $(\mathfrak{a}^{-1})^{-1}$ verstanden werden. Dann folgt aus dem bereits Festgestellten unmittelbar: Die w-Operation ist sicher von der b-Operation verschieden, weil

$$\mathfrak{p}_b = \underset{\mathfrak{B}_\tau \subset \mathsf{M}^*}{\Delta} (\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{B}_\tau) = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{B}_0 \cap \underset{\mathfrak{B}_\tau \subset \mathsf{M}}{\Delta} (\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{B}_\tau) = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{B}_0 \cap \underset{\mathfrak{B}_\tau \subset \mathsf{M}}{\Delta} \mathfrak{B}_\tau$$
$$= \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{B}_0 \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{p}_w = \underset{\mathfrak{B}_\tau \subset \mathsf{M}}{\Delta} (\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{B}_\tau) = \underset{\mathfrak{B}_\tau \subset \mathsf{M}}{\Delta} \mathfrak{B}_\tau = \mathfrak{M}$$

wird. Die v-Operation ist zwar eine arithmetisch brauchbare $'$-Operation (vgl. 9.), aber keine Wertidealoperation, weil für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{M}$ die Gleichung $\mathfrak{p}_v = (\mathfrak{p}^{-1})^{-1} = \mathfrak{J}^{-1} = \mathfrak{J}$ gilt, während bei jeder Wertidealoperation unendlich viele Primideale von $\mathfrak{M}$ in sich selbst übergeführt werden, nämlich alle die Primideale, deren Quotientenringe der zur Definition dieser Operation dienenden Bewertungsringmenge angehören. Zusammenfassend können wir also feststellen:

Es gibt bei geeigneten Integritätsbereichen äquivalente Wertidealoperationen, die nicht identisch sind. Ebenso können arithmetisch brauchbare $'$-Operationen existieren, die keine Wertidealoperationen sind.

Damit ist gezeigt, daß die Sätze von 6. sich im wesentlichen nicht weiter verschärfen lassen.

---

[19]) Vgl. Krull: Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern II., Math. Zeitschr. 31 (1930), S. 527—557. Daß im Falle des Ringes *aller* ganzen algebraischen Zahlen *jeder* Primidealquotientenring Häufungspunkt ist, folgt aus der Tatsache, daß es zu jedem endlichen algebraischen Zahlkörper $\mathfrak{K}$ stets einen endlichen algebraischen Oberkörper $\widetilde{\mathfrak{K}}$ gibt mit der Eigenschaft, daß ein gegebenes Primideal aus der Hauptordnung von $\mathfrak{K}$ in der Hauptordnung von $\widetilde{\mathfrak{K}}$ in mindestens zwei teilerfremde Faktoren zerfällt.

7. Die a-Operation.

Die b-Operation dient, wie in 4. und 5. gezeigt wurde, in erster Linie dazu, durch Konstruktion des Funktionalrings $\mathfrak{M}$ die sämtlichen zu $\mathfrak{Z}$ gehörigen Bewertungen „explizit darzustellen"; andererseits wird aber bei der Definition der b-Ideale die Kenntnis eben dieser Bewertungen vorausgesetzt. Man steht so in gewissem Sinne vor einem, wenn auch nicht logischen, so doch praktischen Zirkel. Um ihn zu beseitigen, hat man wenigstens für die endlichen b-Ideale eine neue Definition aufzusuchen, die von den zu $\mathfrak{Z}$ gehörigen Bewertungen keinen Gebrauch mehr macht. Die Lösung dieser Aufgabe erfolgt durch Einführung der Prüferschen „*a-Operation*", die auf einer Verallgemeinerung des klassischen Begriffs der „Ganz-Abhängigkeit" beruht[20]).

Das Element α aus $\mathfrak{R}$ heißt vom $\mathfrak{Z}$-Ideal $\mathfrak{a}$ „*ganz abhängig*", wenn α einer Gleichung $\alpha^r + a_1\alpha^{r-1} + \ldots + a_r = 0$ genügt, bei der a_i jeweils zu $\mathfrak{a}^i$ gehört. Sind alle von $\mathfrak{a}$ ganz abhängigen Elemente bereits in $\mathfrak{a}$ enthalten, so heißt $\mathfrak{a}$ „ganz abgeschlossen". Für $\mathfrak{a} = \mathfrak{Z}$ deckt sich unsere Definition offenbar mit der klassischen. Im übrigen ist zu zeigen:

Satz 20. *Zu jedem Ideal* $\mathfrak{a}$ *gibt es ein kleinstes umfassendes ganz abgeschlossenes Ideal* $\mathfrak{a}_a$.

Satz 21. *Der Übergang von* $\mathfrak{a}$ *zu* $\mathfrak{a}_a$ *stellt eine arithmetisch brauchbare* '*-Operation (die Prüfersche a-Operation) dar.*

Im folgenden bedeutet $\mathfrak{e}$ stets ein endliches Ideal.

Hilfssatz 1. *Hängt* a *von* $\mathfrak{a}$ *ganz ab, so auch von einem geeigneten* $\mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{a}$.

Die Richtigkeit der Behauptung folgt mühelos aus der Definition der Ganz-Abhängigkeit.

Hilfssatz 2. *Ist* $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{e}$, *so hängt* $\mathfrak{a}$, *d. h. jedes Element von* $\mathfrak{a}$, *von* $\mathfrak{b}$ *ganz ab. — Ist umgekehrt* $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_s)$ *endlich, und hängt jedes Basiselement* a_i *vom Ideale* $\mathfrak{b}$ *ganz ab, so existiert ein* $\mathfrak{e}$, *für das* $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{e}$[21]).

Beweis: a) Ist $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e} = (e_1, \ldots, e_r)$, so gelten für jedes $a \subset \mathfrak{a}$ gerade r Gleichungen $a\cdot e_i = \sum_{k=1}^{r} b_{ik}e_k$ $(i = 1, \ldots, r)$ mit Koeffizienten b_{ik}

[20]) Die Theorie der a-Operation wurde von Prüfer geschaffen (Teilbarkeitseigenschaften § 6). Die Beweise der folgenden Sätze können im wesentlichen aus der Prüferschen Arbeit herauspräpariert werden. In Einzelheiten waren allerdings Prüfer gegenüber Ergänzungen notwendig, vor allem mußte die in den „Teilbarkeitseigenschaften" ausschließlich auf endliche Ideale beschränkte Untersuchung auf Ideale ohne endliche Basis ausgedehnt werden. So erschien eine geschlossene Neudarstellung unvermeidlich.

[21]) Der Inhalt von Hilfssatz 2 dient bei Prüfer (Teilbarkeitseigenschaften, S. 14) geradezu zur Definition der von einem Ideal ganz abhängigen Elemente.

aus $\mathfrak{b}$, und wegen $\mathfrak{e} \neq (0)$ folgt daraus $|b_{ik} - a \cdot \delta_{ik}| = 0$ $\left(\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}\right)$. Die Entwicklung der Determinante $|b_{ik} - a \cdot \delta_{ik}|$ zeigt, daß a von $\mathfrak{b}$ ganz abhängt. — b) Es sei $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_s)$, und es gelte für jedes a_i eine Gleichung $a_i^{n_i} + B_{i1} \cdot a_i^{n_i - 1} + \ldots + B_{in_i} = 0$, wobei jeweils $B_{ik} \subset \mathfrak{b}^k$ $(i = 1, \ldots, s)$. Bestimmt man dann $\mathfrak{e}_0 \subseteq \mathfrak{b}$ so, daß $(B_{1k}, \ldots, B_{sk}) \subseteq \mathfrak{e}_0^k$ für jedes in Betracht kommende k, und setzt man $\mathfrak{e}_i = \mathfrak{e}_0^{n_i} + (a_i) \cdot \mathfrak{e}_0^{n_i - 1} + \ldots + (a_i)^{n_i - 1} \cdot \mathfrak{e}_0$ $(i = 1, \ldots, s)$; $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{e}_s$, so wird $(a_i) \cdot \mathfrak{e}_0 = \mathfrak{e}_0^{n_i} \cdot (a_i) + \mathfrak{e}_0^{n_i - 1} \cdot (a_i)^2 + \ldots + \mathfrak{e}_0 \cdot (a_i)^{n_i} \subseteq \mathfrak{e}_0^{n_i - 1} \cdot \mathfrak{b} \cdot (a_i) + \mathfrak{e}_0^{n_i - 2} \cdot \mathfrak{b} \cdot (a_i)^2 + \ldots + \mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{b} \cdot (a_i)^{n_i - 1} + \mathfrak{e}_0^{n_i} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{e}_i \cdot \mathfrak{b}$; $(a_1, \ldots, a_s) \cdot \mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{e}$.

Hilfssatz 2 zeigt, daß für beliebiges $\mathfrak{a}$ die Menge aller von $\mathfrak{a}$ ganz abhängigen Elemente ein $\mathfrak{a}$ umfassendes Ideal $\mathfrak{a}_a$ bildet. Hängt a von $\mathfrak{a}_a$ ganz ab, so gibt es nach Hilfssatz 1 ein $\mathfrak{e}_0 \subseteq \mathfrak{a}_a$, von dem a ganz abhängt, und nach Hilfssatz 2 existieren zwei weitere Ideale $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, für die $(a) \cdot \mathfrak{e}_1 \subseteq \mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{e}_2 \subseteq \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{e}_2$ wird; für $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_2$ hat man dann schließlich $(a) \cdot \mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{e}$, d. h. jedes von $\mathfrak{a}_a$ ganz abhängige a gehört selbst zu $\mathfrak{a}_a$, $\mathfrak{a}_a$ ist ganz abgeschlossen.

Wir wenden uns jetzt zum Beweise von Satz 21: a) Daß die a-Operation den Bedingungen (1) und (2) von 4. genügt, ist selbstverständlich. Die Gültigkeit der Gleichung $(\mathfrak{a}_a)_a = \mathfrak{a}_a$ wurde bereits bewiesen. b) Ist $a \subset (\mathfrak{a}_a \cdot \mathfrak{b}_a)_a$, so existieren nach Hilfssatz 1 und 2 fünf Ideale $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$; $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ derart, daß $\mathfrak{e}' \subseteq \mathfrak{a}_a$, $\mathfrak{e}'' \subseteq \mathfrak{b}_a$; $(a) \cdot \mathfrak{e}_0 \subseteq (\mathfrak{e}' \cdot \mathfrak{e}'') \cdot \mathfrak{e}_0$; $\mathfrak{e}' \cdot \mathfrak{e}_1 \subseteq \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}'' \cdot \mathfrak{e}_2 \subseteq \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{e}_2$, und für $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_2$ wird $(a) \cdot \mathfrak{e} \subseteq (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{e}$. a hängt also bereits von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ ganz ab, d. h. wir haben $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})_a = (\mathfrak{a}_a \cdot \mathfrak{b}_a)_a$ (Formel (5)). In ganz entsprechender Weise wird die Formel (4) bewiesen. c) Hängt a von $\mathfrak{a}_a \cap \mathfrak{b}_a$ ganz ab, so auch von $\mathfrak{a}_a$ und $\mathfrak{b}_a$. Daraus folgt sofort $(\mathfrak{a}_a \cap \mathfrak{b}_a)_a = \mathfrak{a}_a \cap \mathfrak{b}_a$ (Formel (6)). d) Ist $(a) \cdot \mathfrak{e} \subseteq ((c) \cdot \mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{e}$, so ist $(a \cdot c^{-1}) \cdot \mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{e}$, d. h. aus $a \subset ((c) \cdot \mathfrak{a})_a$ folgt $a \cdot c^{-1} \subset \mathfrak{a}_a$ (Formel (7)). e) Ist $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{e})_a \subseteq (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{e})_a$ und a beliebig aus $\mathfrak{a}_a$, so haben wir $(a) \cdot \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{e}_1 \subseteq \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{e}_1$, also $a \subset \mathfrak{b}_a$ und damit auch $\mathfrak{a}_a \subseteq \mathfrak{b}_a$, weil a beliebig aus $\mathfrak{a}_a$. (Eindeutigkeitssatz 10.)

Satz 22. *Jedes b-Ideal (und damit auch jedes w-Ideal für jede beliebige w-Operation) ist ganz abgeschlossen.*

In der Tat, liegt a nicht in $\mathfrak{a}_b$, so muß es eine zu $\mathfrak{Z}$ gehörige Bewertung B geben, in der a einen kleineren Wert hat als alle Elemente von $\mathfrak{a}$. Bedeutet nun $a^r + a_1 a^{r-1} + \ldots + a_r = p(a)$ ein Polynom in a, bei dem a_i jeweils Element von $\mathfrak{a}^i$ ist, so hat in B jeder einzelne Summand $a_i \cdot a^{r-1}$ $(i = 1, \ldots, r)$ und damit auch die Summe $a_1 a^{r-1} + \ldots + a_r$ einen größeren Wert als a^r, d. h. es muß stets $p(a) \neq 0$ sein, a kann nicht von $\mathfrak{a}_b$ ganz abhängen.

Satz 23. *Die a-Operation und die b-Operation sind äquivalent, bei endlichem* $\mathfrak{a}$ *ist also immer* $\mathfrak{a}_a = \mathfrak{a}_b$[22]).

Da die a-Operation nach Satz 21 eine arithmetisch brauchbare '-Operation darstellt, ist sie nach Satz 18 zu einer bestimmten w-Operation äquivalent, derart, daß für endliches $\mathfrak{a}$ stets $\mathfrak{a}_a = \mathfrak{a}_w$ wird. Weil aber die b-Operation die „feinste" w-Operation ist, haben wir sicher $\mathfrak{a}_a = \mathfrak{a}_w \supseteq \mathfrak{a}_b$, und da nach Satz 22 andererseits $\mathfrak{a}_b \supseteq \mathfrak{a}_a$ sein muß, wird notwendig $\mathfrak{a}_a = \mathfrak{a}_b$. Für endliche Ideale ergibt sich aus Satz 23 insbesondere:

Ein endliches Ideal $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_r)$ *ist dann und nur dann b-Ideal, wenn es ganz abgeschlossen ist.*

Damit ist für diejenigen Ringe $\mathfrak{I}$, bei denen alle Ideale endlich sind, also für die ganz abgeschlossenen Integritätsbereiche, die der Noetherschen Maximalbedingung (dem Noetherschen Teilerkettensatz) genügen, ein Ergebnis gewonnen, das nichts mehr zu wünschen übrig läßt. — Im übrigen aber steht man vor der Aufgabe, sich soweit als möglich von der immerhin einschränkenden Endlichkeitsvoraussetzung frei zu machen.

8. Primideale und Radikale als *b*-Ideale.

Hilfssatz 3. *Bei jeder arithmetisch brauchbaren '-Operation gelten für jedes endliche oder nichtendliche Ideal* $\mathfrak{a}$ *aus* $\mathfrak{R}$ *die Beziehungen:* $(\mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}') \cap \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{a}'$; $(\mathfrak{a}' \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}') \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{a}'$. *Bei der a-Operation insbesondere wird immer* $(\mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}_a) \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{a}_a$. — $(\widetilde{\mathfrak{M}}_a = \widetilde{\mathfrak{M}}_b = \widetilde{\mathfrak{M}})$.

Beweis: a) Ist $a \subset \mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}'$, so ist auch $a \subset \mathfrak{e} \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}'$ für ein geeignetes endliches Unterideal $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{a}$. Nach Satz 14 ist aber $(\mathfrak{e} \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}') \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{e}' \subseteq \mathfrak{a}'$, aus $a \subset (\mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}') \cap \mathfrak{R}$ folgt daher $a \subset \mathfrak{a}'$. b) Bei der a-Operation ist, wie unmittelbar aus ihrer Definition zu ersehen, stets $\mathfrak{a}_a$ gleich der Summe aller $\mathfrak{e}_a$, falls $\mathfrak{e}$ die endlichen Unterideale von $\mathfrak{a}$ durchläuft.

Könnte man auch für die b-Operation zeigen, daß immer $\mathfrak{a}_b$ gleich der Summe aller $\mathfrak{e}_b$ ($\mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{a}$) sein muß, so wäre nach dem Hilfssatz die volle Identität der a- und b-Operation gesichert. Aber aus der Definition der b-Operation allein lassen sich jedenfalls in der gewünschten Richtung keine Schlüsse ziehen. Unter diesen Umständen ist von besonderer Wichtigkeit:

Satz 24. *Jedes Primideal* $\mathfrak{p}$ *ist b-Ideal*; $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_a = \mathfrak{p}_b$.

Zunächst ist jedes Primideal ganz abgeschlossen, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_a$; denn aus $\alpha^r + a_1 \alpha^{r-1} + \ldots + a_r = 0$, $(a_1, \ldots, a_r) \subseteq \mathfrak{p}$ folgt $\alpha \subset \mathfrak{I}$ (weil $\mathfrak{I}$ ganz abgeschlossen), $\alpha^r \subset \mathfrak{p}$, $\alpha \subset \mathfrak{p}$. — Um $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_b$ zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß in $\mathfrak{R}$ mindestens ein Bewertungsring $\mathfrak{B}$ existiert, dessen maximales Primideal $\mathfrak{m}$ der Gleichung $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{I} = \mathfrak{p}$ genügt; dabei können und

[22]) Vgl. die Skizze im Bericht (46., S. 129 f.).

wollen wir $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ voraussetzen, denn aus $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{J}_\mathfrak{p} = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ folgt immer $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{J} = \mathfrak{p}$. Nach dem Hilfssatz 3 wird $(\mathfrak{p} \cdot \overline{\mathfrak{M}}) \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{p}_a = \mathfrak{p}$. Es ist also $\mathfrak{p} \cdot \overline{\mathfrak{M}}$ sicher von $\overline{\mathfrak{M}}$ verschieden, und es gibt daher auch in $\overline{\mathfrak{M}}$ mindestens ein (von $\overline{\mathfrak{M}}$ verschiedenes!) Primoberideal $\tilde{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{p} \cdot \overline{\mathfrak{M}}$. Für $\tilde{\mathfrak{p}}$ folgt aus der Beziehung $\mathfrak{p} \subseteq (\tilde{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{R}) \subset \mathfrak{J}$ sofort $\mathfrak{p} = \tilde{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{R}$, da ja $\mathfrak{p}$ wegen der zulässigen Voraussetzung $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{J}$ maximal ist. Nach 2. ist ferner $\overline{\mathfrak{M}}_{\tilde{\mathfrak{p}}} = \overline{\mathfrak{B}}^*$ Bewertungsring in $\overline{\mathfrak{R}}$ mit dem maximalen Primideal $\overline{\mathfrak{m}} = \tilde{\mathfrak{p}} \cdot \overline{\mathfrak{M}}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$. Setzen wir $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{B}}^* \cap \mathfrak{R}$, $\mathfrak{m} = \overline{\mathfrak{m}} \cap \mathfrak{R}$, so ist $\mathfrak{B}$ Bewertungsring, $\mathfrak{m}$ maximales Primideal in $\mathfrak{B}$, und es wird

$$\mathfrak{m} \cap \mathfrak{J} = \overline{\mathfrak{m}} \cap \mathfrak{J} = \overline{\mathfrak{m}} \cap \overline{\mathfrak{M}} \cap \mathfrak{J} = \tilde{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{J} = \mathfrak{p}.$$

Satz 24 ist noch einer leichten Verallgemeinerung fähig. Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges ganzes Ideal, so verstehen wir unter dem „*Radikal*“ $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{a}$ die Menge aller der Körperelemente a, von denen eine Potenz in $\mathfrak{a}$ liegt. Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{r}$, enthält also $\mathfrak{a}$ selbst mit a^r stets auch a, so soll $\mathfrak{a}$ kurz „*Radikal*“ genannt werden. Ein (ganzes) Ideal $\mathfrak{r}$ ist dann und nur dann Radikal, wenn es Durchschnitt von (endlich oder unendlich vielen) Primidealen ist[23]); das Radikal von $\mathfrak{a}$ ist gleich dem Durchschnitt aller Primoberideale von $\mathfrak{a}$.

Satz 25. *Jedes Radikal* $\mathfrak{r}$ *ist b-Ideal*: $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_a = \mathfrak{r}_b$; $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_a$ *und* $\mathfrak{a}_b$ *haben stets dasselbe Radikal.*

Zum Beweis hat man nur zu bedenken: Ist $\mathfrak{p}$ irgendein Primoberideal von $\mathfrak{a}$, so ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_a \supseteq \mathfrak{a}_a$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_b \supseteq \mathfrak{a}_b$. Als wichtige Anwendung von Satz 25 sei hervorgehoben:

Satz 26. *Ist ein* $\mathfrak{J}$*-Ideal* $\mathfrak{a}$ *aus* $\mathfrak{R}$ *nicht im gewöhnlichen Sinne umkehrbar, ist also* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1} \neq \mathfrak{J}$, *so ist* $\mathfrak{a}$ *auch nicht „a-umkehrbar“ oder „b-umkehrbar“, d. h. so ist stets auch* $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1})_a \neq \mathfrak{J}$ *und* $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1})_b \neq \mathfrak{J}$.

Ist nämlich $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1}$ von $\mathfrak{J}$ verschieden, so ist es auch das Radikal $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1}$[24]). — Satz 26 zeigt, daß die Verhältnisse bei der a- und der b-Operation ganz anders liegen als bei der Artin-van der Waerdenschen „v-Operation“, deren Bedeutung vor allem darauf beruht, daß das System Σ_v aller v-Ideale hinsichtlich der v-Multiplikation in sehr vielen und wichtigen Fällen eine Gruppe bildet, in denen von der Umkehrbarkeit aller gewöhnlichen endlichen Ideale nicht die Rede ist (vgl. die Schlußbemerkung von 9.).

9. Einige Bemerkungen über v-Ideale.

Ein Ideal $\mathfrak{q}$, das zu einem anderen Ideal $\mathfrak{a}$ reziprok ist, $\mathfrak{q} = \mathfrak{a}^{-1}$, möge für den Augenblick kurz „*Quotient*“ genannt werden.

---

[23]) Vgl. die in Anm. [10]) zitierte Arbeit oder auch den Bericht (3., S. 9).

[24]) Anderer Beweis in den „Teilbarkeitseigenschaften“ (§ 6, S. 18).

Satz 27. *Ein Quotient* $\mathfrak{q} = \mathfrak{a}^{-1}$ *ist für jede beliebige w-Operation v-Ideal.*

Es sei nämlich M die Menge aller der Bewertungsringe $\mathfrak{B}_\sigma$, die zur Definition einer bestimmten w-Operation dienen. Dann ist $\mathfrak{I} = \bigcap_{\mathfrak{B}_\sigma \subset \mathsf{M}} \mathfrak{B}_\sigma$; $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}_\sigma) \cdot (\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{B}_\sigma) \subseteq \mathfrak{B}_\sigma$ für jeden $\mathfrak{B}_\sigma \subset \mathsf{M}$; daher

$$\mathfrak{a} \cdot \bigcap_{\mathfrak{B}_\sigma \subset \mathsf{M}} (\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{B}_\sigma) \subseteq \bigcap_{\mathfrak{B}_\sigma \subset \mathsf{M}} \mathfrak{B}_\sigma = \mathfrak{I}; \quad \mathfrak{q}_w = \bigcap_{\mathfrak{B}_\sigma \subset \mathsf{M}} (\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{B}_\sigma) \subseteq \mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{q}; \quad \mathfrak{q}_w = \mathfrak{q}.$$

Zu jedem Ideal $\mathfrak{a}$ existiert ein kleinster umfassender Quotient, nämlich $\mathfrak{a}^{-1})^{-1}$. Der Übergang von $\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{a}_v = (\mathfrak{a}^{-1})^{-1}$ ist die Artin-van der Waerdensche v-Operation.

Satz 28. *Die v-Operation genügt den Bedingungen* (1) bis (7) *von* 4. *Außerdem gilt für sie immer der „Gaußsche" Satz* 11.

Der Beweis der Formeln (1) bis (7) kann ohne Schwierigkeit aus den Darstellungen der v-Idealtheorie bei van der Waerden und Prüfer herauspräpariert werden[8]). Der Gaußsche Satz für v-Ideale folgt nach Prüfer fast unmittelbar aus dem „Kroneckerschen" Satz 4[25]). — Satz 28 zeigt, daß für jedes $\mathfrak{a}$ und für jede w-Operation stets $\mathfrak{a}_w \subseteq \mathfrak{a}_v$ sein muß. Daraus folgt:

Satz 29. *Ist die v-Operation arithmetisch brauchbar, also zu einer w-Operation äquivalent, so ist der zu ihr gehörige Funktionalring* $\mathfrak{M}_v$ *Oberring aller anderen Funktionalringe.*

Die v-Operation bildet also gewissermaßen den Gegenpol der b-Operation, sobald sie selbst arithmetisch brauchbar ist. Daß das keineswegs immer der Fall ist, zeigt ein von Prüfer angegebenes Beispiel[26]), das seiner Wichtigkeit und Einfachheit halber kurz besprochen werden soll:

Es sei $\mathfrak{I}_0$ ein beliebiger ganz abgeschlossener Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{I}$ sei im Körper $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_0(x, y)$ der Ring aller der Polynome $p(x, y)$ in den Variabeln x, y, für die $p(0, 0) \subset \mathfrak{I}_0$. — $\mathfrak{I}$ ist ganz abgeschlossen; denn genügt $\alpha(x, y)$ aus $\mathfrak{K}$ einer Gleichung $\alpha(x, y)^r + p_1(x, y) \cdot \alpha(x, y)^{r-1} + \ldots + p_r(x, y) = 0$ mit Polynomkoeffizienten $p_i(x, y)$ aus $\mathfrak{I}$, so muß offenbar $\alpha(x, y)$ selbst ein Polynom sein, und aus $\alpha(0, 0)^r + p_1(0, 0) \cdot \alpha(0, 0)^{r-1} + \ldots + p_r(0, 0) = 0$ folgt $\alpha(0, 0) \subset \mathfrak{I}_0$ und damit $\alpha(x, y) \subset \mathfrak{I}$. — Betrachten wir nun in $\mathfrak{I}$ das Ideal (x, y), so wird, wie mühelos aus der Definition von $\mathfrak{I}$ zu ersehen, $(x, y)^{-1} = \mathfrak{K}_0 \cdot \mathfrak{I}$ gleich dem Ring *aller* Polynome aus $\mathfrak{K}$, und $((x, y)^{-1})^{-1} = (x, y)_v$ gleich dem Ideal *aller* für $x = y = 0$ verschwindenden Polynome, $(x, y)_v = \mathfrak{K}_0 \cdot (x, y)$. — Es ist also $(r) \cdot (x, y)_v = (x, y)_v$ für jedes $r \neq 0$ aus $\mathfrak{K}_0$, und das widerspricht dem Eindeutigkeitssatz, da im allgemeinen $(r) \neq \mathfrak{I}$.

---

[25]) Teilbarkeitseigenschaften § 9, S. 25.

[26]) Teilbarkeitseigenschaften § 7, S. 19 f.

Der Brauchbarkeitsbereich der v-Operation ist somit enger als der Brauchbarkeitsbereich der b-Operation. In der Tat zeigt sich die wirkliche Bedeutung der v-Operation erst, wenn man sich auf sogenannte „vollständig ganz abgeschlossene" Integritätsbereiche beschränkt. Man erhält dann den Satz, daß die Menge *aller* (endlichen oder nichtendlichen) v-Ideale immer hinsichtlich der v-Multiplikation eine Gruppe bildet[27]). Die genauere Untersuchung der Tragweite dieses Resultats und die Behandlung der vollständig ganz abgeschlossenen Integritätsbereiche vom Standpunkt der Bewertungstheorie aus muß späteren Beiträgen vorbehalten bleiben.

10. Isolierte Komponentenideale. Die A-Operation in O-Ringen.

Es sei zunächst $\mathfrak{Z}$ irgendein (nicht einmal notwendig ganz abgeschlossener) Integritätsbereich, S bedeute ein „multiplikativ abgeschlossenes" (in Zukunft kurz „m. a.") System aus $\mathfrak{Z}$, das gleichzeitig mit a und b stets auch das Produkt $a \cdot b$ enthält. Ist $\mathfrak{a}$ irgendein ganzes $\mathfrak{Z}$-Ideal, so möge unter $\mathfrak{a}_S$ das durch S erzeugte „*isolierte Komponentenideal*" (in Zukunft kurz „*i. K.-I.*") von $\mathfrak{a}$ verstanden werden, d. h. das ganze Ideal aller der Elemente aus $\mathfrak{Z}$, die durch Multiplikation mit geeigneten Elementen aus S in Elemente von $\mathfrak{a}$ verwandelt werden können[28]). Man erhält so im Bereich aller ganzen Ideale von $\mathfrak{Z}$ eine (bei fest vorgegebenem S) eindeutig bestimmte „S-Operation", und es gilt:

Hilfssatz 4. *Die S-Operation genügt den Bedingungen* (1) bis (6) *von* 4.

Ein Beweis ist überflüssig, da es sich um ganz einfache Verifikationen handelt. — Trotz Hilfssatz 3 ist die S-Operation keine '-Operation im Sinne von 6. Denn es wird, abgesehen von der Beschränkung auf ganze Ideale, $(a)_S = \mathfrak{Z}$ für jedes Hauptideal mit zu S gehörigem Basiselement a, Bedingung (7) ist also niemals erfüllt[29]). — Um gleichwohl den Anschluß an 6. zu gewinnen, beschränken wir uns von jetzt ab auf den Fall, daß $\mathfrak{Z}$ einen ganz abgeschlossenen „O-Ring" darstellt, d. h. einen ganz abgeschlossenen Ring, der dem Noetherschen Teilerkettensatz genügt, in dem also alle Ideale endlich sind. Bei den weiteren Untersuchungen stützen wir uns auf zwei Grundeigenschaften, die jeder ganz abgeschlossene O-Ring $\mathfrak{Z}$ besitzt:

---

[27]) Moderne Algebra § 103. Herausarbeitung des Unterschieds zwischen den Begriffen „ganz" und „vollständig ganz abgeschlossen" zuerst in Bewertungstheorie § 4; vgl. ferner Bericht 36., S. 102 sowie 43., S. 120.

[28]) Zum Begriff der i. K.-I. vgl. z. B. die Zusammenstellung im Bericht (6., S. 15 f.)

[29]) Abgesehen natürlich von dem trivialen Fall, daß S nur Einheiten aus $\mathfrak{Z}$ enthält, und daß dementsprechend $\mathfrak{a}_S = \mathfrak{a}$ für jedes $\mathfrak{a}$ wird.

A. *In $\mathfrak{J}$ ist jedes ganze Ideal* $\mathfrak{a}$ *Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen* $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_s$.

B. *Jedes ganze Hauptideal* (a) *besitzt eine Durchschnittsdarstellung* $(a) = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_s$, *bei der die zu den Primäridealen* $\mathfrak{q}_i$ *gehörigen Primideale* $\mathfrak{p}_i$ *„minimale Primideale" (von* $\mathfrak{J}$*) sind, d. h. in* $\mathfrak{J}$ *keine echten Primunterideale haben*[30]).

Wir verstehen von jetzt ab unter Λ eine Menge von Primidealen aus $\mathfrak{J}$, die a) kein minimales Primideal von $\mathfrak{J}$, b) gleichzeitig mit $\mathfrak{p}$ auch jedes echte Primoberideal von $\mathfrak{p}$ enthält. Jeder Menge Λ ordnen wir — zunächst nur im Bereich der ganzen $\mathfrak{J}$-Ideale — eine „Λ-Operation" zu durch die Festsetzung: Unter $\mathfrak{a}_\Lambda$ soll das (eindeutig bestimmte) Ideal verstanden werden, das entsteht, wenn man bei irgendeiner Primäridealzerlegung von $\mathfrak{a}$ alle die Komponenten wegläßt, deren zugehörige Primideale in Λ liegen[31]). Für die so definierte Λ-Operation ergibt sich leicht aus der Grundeigenschaft A.:

Hilfssatz 5. *Zu endlich vielen ganzen Idealen* $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_s$ *und endlich vielen nicht zu* Λ *gehörigen Primidealen* $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_t$ *gibt es in* $\mathfrak{J}$ *immer ein Element* a, *das für* $i = 1, \ldots, s$ *der Gleichung* $\mathfrak{a}_i : (a) = \mathfrak{a}_i \cdot (a^{-1}) \cap \mathfrak{J} = (\mathfrak{a}_i)_\Lambda$ *genügt, und in keinem der Primideale* $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_t$ *enthalten ist.*

Für das m. a. System $S = \{a\}$ aller Potenzen von a wird offenbar $(\mathfrak{a}_i)_\Lambda = (\mathfrak{a}_i)_{\{a\}} = ((a) \cdot \mathfrak{a}_i)_{\{a\}}$ $(i = 1, \ldots, s)$, d. h. bei endlich vielen ganzen Idealen kann man die Λ-Operation stets durch die i. K.-I.-Bildung mit einem geeigneten festen m. a. System S ersetzen. Aus Hilfssatz 4 ergibt sich daher im Bereich der ganzen Ideale die Gültigkeit der Formeln (1) bis (6) auch für die Λ-Operation.

Hilfssatz 6. *Ist* $\mathfrak{a} = (\alpha) \cdot \mathfrak{b}$ ($\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *ganz,* (α) *beliebig*), *so ist stets auch* $\mathfrak{a}_\Lambda = (\alpha) \cdot \mathfrak{b}_\Lambda$.

Zum Beweise genügt es zu zeigen, daß $\mathfrak{a}_\Lambda \supseteq (\alpha) \cdot \mathfrak{b}_\Lambda$ sein muß; denn dann wird entsprechend $\mathfrak{b}_\Lambda \supseteq (\alpha^{-1}) \cdot \mathfrak{a}_\Lambda$, $(\alpha) \cdot \mathfrak{b}_\Lambda \supseteq \mathfrak{a}_\Lambda$ und damit $\mathfrak{a}_\Lambda = (\alpha) \cdot \mathfrak{b}_\Lambda$. Wir wählen zu $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_2$ ein Element a im Sinne von Hilfssatz 5. Aus $(a) \cdot \mathfrak{b}_\Lambda \subseteq \mathfrak{b}$ folgt dann $(a) \cdot [(\alpha) \cdot \mathfrak{b}_\Lambda] \subseteq \mathfrak{a} = (\alpha) \cdot \mathfrak{b}$ und wegen

---

[30]) Die folgenden Untersuchungen berühren sich methodisch eng mit derjenigen Arbeit, in der van der Waerden — nicht dem Namen, aber der Sache nach — im Spezialfalle der ganz abgeschlossenen O-Ringe zum ersten Male die v-Ideale einführte. (Zur Produktzerlegung der Ideale in ganz abgeschlossenen Ringen, Math. Annalen 101 (1929), S. 293—308.) Auch dort bilden die Sätze A. und B. die Grundlage, Satz B. insbesondere wird zum ersten Male aufgestellt und bewiesen.

[31]) Müssen alle Primärkomponenten von $\mathfrak{a}$ weggelassen werden, so ist $\mathfrak{a}_\Lambda = \mathfrak{J}$ zu setzen! — Die Art, wie wir die Ideale $\mathfrak{a}_\Lambda$ definieren, entspricht genau der Art, in der E. Noether ursprünglich den Begriff des isolierten Komponentenideals eingeführt hat. [Idealtheorie in Ringbereichen, Math. Annalen 83 (1921), S. 24—66, § 7.]

$\mathfrak{a}_\Lambda = \mathfrak{a} \cdot (a^{-1}) \cap \mathfrak{J}$ ergibt sich daraus weiter $(\alpha) \cdot \mathfrak{b}_\Lambda \subseteq \mathfrak{a}_\Lambda$, sobald nur $(\alpha) \cdot \mathfrak{b}_\Lambda \subseteq \mathfrak{J}$ bewiesen ist. Es sei nun $\gamma = \frac{z}{n}$ $(z, n \subset \mathfrak{J})$ ein beliebig, aber fest vorgegebenes Element aus $(\alpha) \cdot \mathfrak{b}_\Lambda$, $(n) = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_t$ sei eine Zerlegung des Nennerideals (n), bei der die zu den Primäridealen $\mathfrak{q}_i$ gehörigen Primideale $\mathfrak{p}_i$ alle in $\mathfrak{J}$ minimal sind (Grundeigenschaft B.). Dann dürfen wir nach Hilfssatz 5 annehmen, daß a in keinem der Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_t$ enthalten ist, und es ergibt sich aus $c = a \cdot \frac{z}{n} \subset \mathfrak{a}_\Lambda \subseteq \mathfrak{J}$; $a \cdot z = c \cdot n \subset (n)$; $a \cdot z \subset \mathfrak{q}_i$ $(i = 1, \ldots, t)$ sofort $z \subset \mathfrak{q}_i$ $(i = 1, \ldots, t)$; $z \subset (n)$; $\frac{z}{n} = \gamma \subset \mathfrak{J}$. — Da γ ein beliebiges Element aus $(\alpha) \cdot \mathfrak{b}_\Lambda$ war, haben wir somit $(\alpha) \cdot \mathfrak{b}_\Lambda \subseteq \mathfrak{J}$ und der Hilfssatz ist bewiesen.

Hilfssatz 6 gestattet es, die Λ-Operation auch für nichtganze Ideale zu definieren: Ist $\mathfrak{x}$ ein nichtganzes Ideal, (a) ein Hauptideal, für das $(a) \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{a}$ ganz wird, so soll $\mathfrak{x}_\Lambda = (a^{-1}) \cdot \mathfrak{a}_\Lambda$ gesetzt werden. — In der Tat, nach Hilfssatz 6 ist unsere Definition eindeutig, d. h. von der besonderen Wahl von a unabhängig. Sind nämlich $(a) \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{a}$ und $(b) \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ ganz, so haben wir: $\mathfrak{a} = (a \cdot b^{-1}) \cdot \mathfrak{b}$, also $\mathfrak{a}_\Lambda = (a \cdot b^{-1}) \cdot \mathfrak{b}_\Lambda$; $(a^{-1}) \cdot \mathfrak{a}_\Lambda = (b^{-1}) \cdot \mathfrak{b}_\Lambda$.

Satz 30. *Die Λ-Operation genügt für ganze und nichtganze Ideale den Bedingungen* (1) *bis* (7), *sie ist also eine '-Operation im Sinne von* 6.

Beweis: a) Aus der Art, wie die Λ-Operation bei nichtganzen auf die Λ-Operation bei ganzen Idealen zurückgeführt wurde, folgt sofort, daß die Formeln (1) bis (7) nur für ganze Ideale bewiesen zu werden brauchen. Daß bei ganzen Idealen die Λ-Operation den Bedingungen (1) bis (6) genügt, wurde bereits im Anschluß an Hilfssatz 5 festgestellt. — b) Die Richtigkeit der Formel (7), d. h. der Gleichung $(\alpha) \cdot \mathfrak{a}_\Lambda = ((\alpha) \cdot \mathfrak{a})_\Lambda$ bei ganzem $\mathfrak{a}$ und ganzem $\mathfrak{b} = (\alpha) \cdot \mathfrak{a}$ bildet gerade den Inhalt von Hilfssatz 5.

11. Verknüpfung der Λ-Operationen und der Wertidealoperationen. w_Λ-Operationen.

Die größte Primidealmenge, die in einem ganz abgeschlossenen O-Ring $\mathfrak{J}$ zur Definition einer Λ-Operation benutzt werden kann, ist die Menge Λ^* *aller* nicht minimalen Primideale. Die Λ^*-Operation genügt (nach van der Waerden) der Gleichung $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1})_{\Lambda^*} = \mathfrak{J}$ für beliebiges $\mathfrak{a}$; es sind also in $\mathfrak{J}$ alle Ideale „Λ^*-umkehrbar", und die Λ^*-Operation ist infolgedessen arithmetisch brauchbar[32]). (Im übrigen ist sie identisch mit der in 9. kurz besprochenen v-Operation.) — Für $\Lambda \neq \Lambda^*$ dagegen werden die Λ-Opera-

[32]) Vgl. die in Anm. [30]) zitierte Arbeit, sowie Moderne Algebra § 103.

tionen i. a. arithmetisch unbrauchbar sein, es wird also für sie der Eindeutigkeitssatz 10 von 4. keine Gültigkeit haben.

Indessen kann man den Λ-Prozeß wenigstens dazu benutzen, um aus bekannten arithmetisch brauchbaren $'$-Operationen neue Operationen der gleichen Art herzuleiten. Es sei eine bestimmte arithmetisch brauchbare $'$-Operation gegeben; wir dürfen sie durch den Buchstaben w charakterisieren, da sie wegen der Endlichkeit aller $\mathfrak{Z}$-Ideale nach 6. eine Wertidealoperation darstellt. Ist nun Λ eine Primidealmenge aus $\mathfrak{Z}$, die natürlich wie bisher immer den Bedingungen a) und b) von 10. genügen muß, so möge durch das Symbol w_Λ der Übergang von $\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{a}_{w_\Lambda} = (\mathfrak{a}_w)_\Lambda$ gekennzeichnet werden. Dann gilt:

Satz 31. *Die w_Λ-Operation ist eine arithmetisch brauchbare $'$-Operation.*

Beweis: a) Die Gültigkeit der Formeln (1) und (2) folgt sofort aus der Tatsache, daß diese Formeln für die w- und die Λ-Operation einzeln gelten. — b) Mit $\mathfrak{a}_w$ ist — (nach Formel (7), (1) und (6)) — auch $\mathfrak{a}_w : (a) = \mathfrak{a}_w \cdot (a^{-1}) \cap \mathfrak{Z}$ für beliebige ganze $\mathfrak{a}$ und (a) w-Ideal. Insbesondere sind also nach Hilfssatz 5 von 10. alle ganzen, und damit wie sofort zu sehen auch alle nichtganzen, w_Λ-Ideale gleichzeitig w-Ideale: $(\mathfrak{a}_{w_\Lambda})_w = \mathfrak{a}_{w_\Lambda}$ für beliebiges $\mathfrak{a}$. Mit Hilfe dieser Bemerkung beweist man die Formeln (3), (6) und (7) ebenso einfach wie die unter a) bereits erledigten Formeln (1) und (2). — c) nach Gewinn der Formel (7) darf man sich beim Beweis der noch fehlenden Formeln und des Eindeutigkeitssatzes auf ganze Ideale beschränken. — Es ist $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})_{w_\Lambda} = ((\mathfrak{a} + \mathfrak{b})_w)_\Lambda = (\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w)_{w_\Lambda}$ wegen der Gültigkeit von Formel (4) für die w-Operation. Um (4) für die w_Λ-Operation zu beweisen, hat man daher nur zu zeigen, daß für $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w$, $\mathfrak{d} = \mathfrak{a}_{w_\Lambda} + \mathfrak{b}_{w_\Lambda}$ die Gleichung $\mathfrak{c}_{w_\Lambda} = \mathfrak{d}_w$ gilt. Es sei a nach Hilfssatz 5 von 10. in $\mathfrak{Z}$ so gewählt, daß $\mathfrak{a}_{w_\Lambda} = \mathfrak{a}_w : (a)$, $\mathfrak{b}_{w_\Lambda} = \mathfrak{b}_w : (a)$, $\mathfrak{c}_{w_\Lambda} = \mathfrak{c}_w : (a)$, $\mathfrak{d}_{w_\Lambda} = \mathfrak{d}_w : (a)$ ist; $\{a\}$ bedeute wie in 10. das m. a. System der Potenzen von a. Dann hat man: $\mathfrak{c}_{w_\Lambda} \subseteq \mathfrak{d}_{w_\Lambda}$, weil $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{d}$; $((a) \cdot \mathfrak{d}_w)_{\{a\}} = (((a) \cdot \mathfrak{d})_w)_{\{a\}} = (\mathfrak{d}_w)_{\{a\}} = (\mathfrak{d}_w)_\Lambda = \mathfrak{d}_{w_\Lambda} \subseteq \mathfrak{c}_{w_\Lambda}$, weil $(a) \cdot \mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{c}$; $\mathfrak{c}_{w_\Lambda} = \mathfrak{d}_{w_\Lambda}$. Damit ist Formel (4) bewiesen. Der Beweis von Formel (5) verläuft nach genau demselben Schema. — d) Es sei $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c})_{w_\Lambda} \subseteq (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})_{w_\Lambda}$ und damit erst recht $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c})_w \subseteq (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})_{w_\Lambda}$. Das Element a aus $\mathfrak{Z}$ sei so gewählt, daß $(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})_{w_\Lambda} = ((\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})_w) : (a)$; $\mathfrak{a}_{w_\Lambda} = \mathfrak{a}_w : (a)$, $\mathfrak{b}_{w_\Lambda} = \mathfrak{b}_w : (a)$ wird. Dann ergibt sich: $(a) \cdot (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c})_w = (((a) \cdot \mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{c})_w \subseteq (a) \cdot (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})_{w_\Lambda} \subseteq (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})_w$; $((a) \cdot \mathfrak{a})_w = (a) \cdot \mathfrak{a}_w \subseteq \mathfrak{b}_w$ (Eindeutigkeitssatz der w-Operation); $((a) \cdot \mathfrak{a}_w)_{\{a\}} = (\mathfrak{a}_w)_{\{a\}} = \mathfrak{a}_{w_\Lambda} \subseteq (\mathfrak{b}_w)_{\{a\}} = \mathfrak{b}_{w_\Lambda}$. — Aus $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c})_{w_\Lambda} \subseteq (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})_{w_\Lambda}$ folgt also $\mathfrak{a}_{w_\Lambda} \subseteq \mathfrak{b}_{w_\Lambda}$, — Eindeutigkeitssatz der w_Λ-Operation!

Nach 6. muß der w_Λ-Operation ein bestimmter Quotientenring des Funktionalrings der w-Operation entsprechen; dieser Quotientenring soll nunmehr bestimmt werden. Wie früher bedeute $\mathfrak{K}$ den Quotientenkörper von $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{M}_w$ den in $\widetilde{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}(x)$ zur w-Operation gehörigen Funktionalring.

Wir verstehen nun unter S_Λ das durch Λ eindeutig bestimmte m. a. System aller der Polynome $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ aus $\mathfrak{M}_w$, bei denen das Koeffizientenideal $(a_0, \ldots, a_n)$ in $\mathfrak{J}$ kein nicht zu Λ gehöriges Primoberideal besitzt; mit $\mathfrak{M}_\Lambda$ bezeichnen wir den durch S_Λ bestimmten Quotientenring, also den Ring aller Quotienten $\frac{z}{n}$ $(z \subset \mathfrak{M}_w, n \subset S_\Lambda)$. Dann gilt:

Satz 32. *$\mathfrak{M}_\Lambda$ ist gerade der Funktionalring der w_Λ-Operation.*

Beweis: a) Da in $\mathfrak{J}$ alle Ideale endlich sind, entsprechen nach 6. die Funktionalringe in $\mathfrak{K}$ eindeutig umkehrbar den arithmetisch brauchbaren $'$-Operationen in $\mathfrak{K}$. — b) Es sei $\mathfrak{M}_{w_\Lambda}$ der zur w_Λ-Operation in $\mathfrak{K}$ gehörige Funktionalring; $\tilde{a}(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ sei ein Polynom aus S_Λ. Dann wird $(a_0, \ldots, a_n)_{w_\Lambda} = (a_0, \ldots, a_n) \cdot \mathfrak{M}_{w_\Lambda} \cap \mathfrak{K} = (\tilde{a}(x)) \cdot \mathfrak{M}_{w_\Lambda} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{J}$, $(\tilde{a}(x)) \cdot \mathfrak{M}_{w_\Lambda} = \mathfrak{M}_{w_\Lambda}$, d. h. es muß $\tilde{a}(x)$ in $\mathfrak{M}_{w_\Lambda}$ Einheit sein. Wegen $\mathfrak{M}_{w_\Lambda} \supseteq \mathfrak{M}_w$ ist daher $\mathfrak{M}_{w_\Lambda} \supseteq \mathfrak{M}_\Lambda$. — c) Um $\mathfrak{M}_{w_\Lambda} \subseteq \mathfrak{M}_\Lambda$ zu beweisen, hat man nur zu zeigen, daß für jedes ganze Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{J}$ immer $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{M}_\Lambda \cap \mathfrak{K} \supseteq \mathfrak{a}_{w_\Lambda}$ wird. Wegen $\mathfrak{M}_\Lambda \supseteq \mathfrak{M}_w$ ist sicher $\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a}_w$ und damit auch $\mathfrak{b}_\Lambda \supseteq \mathfrak{a}_{w_\Lambda}$. Es sei nun $\mathfrak{c} = \mathfrak{b} : \mathfrak{b}_\Lambda$ das ganze Ideal aller der Elemente a aus $\mathfrak{J}$, für die $(a) \cdot \mathfrak{b}_\Lambda \subseteq \mathfrak{b}$ wird; dann besitzt $\mathfrak{c}$ kein nicht in Λ liegendes Primoberideal, und da $\mathfrak{c}$ außerdem endlich ist, $\mathfrak{c} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$, wird $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{M}_\Lambda = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) \cdot \mathfrak{M}_\Lambda = \mathfrak{M}_\Lambda$ nach Definition von $\mathfrak{M}_\Lambda$; man erhält daher: $(\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{b}_\Lambda) \cdot \mathfrak{M}_\Lambda \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{b}_\Lambda \cdot \mathfrak{M}_\Lambda \cap \mathfrak{K} \supseteq \mathfrak{b}_\Lambda$. Andererseits aber ist $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{b}_\Lambda \subseteq \mathfrak{b}$ und somit $\mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{M}_\Lambda \cap \mathfrak{K} \supseteq (\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{b}_\Lambda) \cdot \mathfrak{M}_\Lambda \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{b}_\Lambda$. — Es ergibt sich also schließlich $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{M}_\Lambda \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{b} = \mathfrak{b}_\Lambda \supseteq \mathfrak{a}_{w_\Lambda}$, und damit ist der Beweis von Satz 32 abgeschlossen.

12. b_Λ-Operationen in beliebigen ganz abgeschlossenen Integritätsbereichen.

Die Methode, die in 11. zur Konstruktion des Funktionalrings $\mathfrak{M}_\Lambda$ benutzt wurde, ist in ihrer Brauchbarkeit nicht auf die O-Ringe beschränkt. Wir arbeiten dementsprechend von jetzt ab wieder mit einem beliebigen ganz abgeschlossenen Integritätsbereich $\mathfrak{J}$, wählen aber dafür der Einfachheit halber nicht mehr (wie bei 11. im O-Ring-Fall) irgendeine Wertidealoperation, sondern die b-Operation zum Ausgangspunkt unserer Betrachtungen. Außerdem nehmen wir an, es sei eine Primidealmenge M fest gegeben mit der Eigenschaft, daß $\mathfrak{J}$ gleich dem Durchschnitt aller der Primidealquotientenringe wird, die sich mit Hilfe von Primidealen aus M bilden lassen, $\mathfrak{J} = \bigcap_{\mathfrak{p}_\tau \subset \mathsf{M}} \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\tau}$. Bei den O-Ringen in 10. und 11. bestand die Menge M aus allen minimalen Primidealen; für beliebige ganz abgeschlossene Integritätsbereiche läßt sich keine immer brauchbare Menge M explizit angeben. —

Es sei jetzt ferner Λ eine weitere Primidealmenge, die a) kein Primideal aus M, b) gleichzeitig mit p auch jedes Primoberideal von p enthält, und bei der c) zu jedem in Λ liegenden Primideal p ein endliches Ideal $\mathfrak{a}$ existiert, das in p, aber in keinem nicht zu Λ gehörigen Primideal enthalten ist. (Bedingung a) und b) entsprechen genau den Bedingungen a) und b) von 10. Bedingung c) war damals wegen der Endlichkeit aller Ideale überflüssig.) Mit Hilfe der Menge Λ leitet man nun aus dem Funktionalring $\mathfrak{M}_b = \mathfrak{M}$ der b-Operation nach genau dem gleichen Rezept wie in 11. einen Funktionalring $\mathfrak{M}_\Lambda$ her: Man bildet das m. a. System S_Λ aller der Polynome $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ aus $\mathfrak{M}$, bei denen das Koeffizientenideal $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ in $\mathfrak{J}$ keine nicht zu Λ gehörigen Primoberideale besitzt und setzt $\mathfrak{M}_\Lambda$ gleich dem durch S_Λ erzeugten Quotientenring von $\mathfrak{M}$. — Als b -Operation möge die (eindeutig bestimmte) zu dem Funktionalring $\mathfrak{M}_\Lambda$ im Sinne von 6. gehörige Wertidealoperation bezeichnet werden[33]). Dann gilt:

Satz 33. *Die b_Λ-Operation ist die „feinste" Wertidealoperation, bei der alle und nur die ganzen Ideale in das Einheitsideal $\mathfrak{J}$ verwandelt werden, deren Primoberideale sämtlich der Menge Λ angehören.*

Beweis: a) Ist α irgendein Element aus $\mathfrak{M}_\Lambda \cap \mathfrak{K}$, so gibt es in S_Λ ein Polynom $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, für das $\alpha \cdot (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)$ in $\mathfrak{M}$ liegt, d. h. es gibt in $\mathfrak{J}$ ein Ideal $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, dessen sämtliche Primoberideale zu Λ gehören, und für das $(\alpha) \cdot (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ Unterideal von $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{J}$ wird. α gehört daher für jedes nicht in Λ enthaltene Primideal p zum Quotientenring $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ und damit auch zu $\bigcap_{\mathfrak{p}_\tau \subset \mathsf{M}} \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\tau} = \mathfrak{J}$ (Eigenschaft a) der Λ-Mengen). Wir haben also $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{J}$, d. h. $\mathfrak{M}_\Lambda$ definiert in $\mathfrak{K}$ wirklich eine Wertidealoperation. — b) Es sei p ein nicht in Λ vorkommendes Primideal, $\mathfrak{p}$ bedeute ein (nach 8. sicher vorhandenes) Primideal aus $\mathfrak{M}$, das der Gleichung $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{p}$ genügt. Ist dann α irgendein Element aus $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{M}_\Lambda \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{M}_\Lambda \cap \mathfrak{J}$, so zeigen die Schlüsse von a), daß es in $\mathfrak{J}$ ein nicht in p enthaltenes Ideal $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ geben muß, für das $(\alpha) \cdot (a_0, a_1, \ldots, a_n) \subseteq \mathfrak{p}$ wird, es ist also sicher $\alpha \subset \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{M}_\Lambda \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{p}$. Verstehen wir daher unter $\mathfrak{B}$ den zum Primideal $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{M}$ gehörigen Quotientenring von $\mathfrak{M}_\Lambda$, unter $\mathfrak{m}$ das maximale Primideal von $\mathfrak{B}$, so wird auch $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{J} = (\mathfrak{m} \cap \mathfrak{M}) \cap \mathfrak{J} = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{M}_\Lambda \cap \mathfrak{J} = (\mathfrak{m} \cap \mathfrak{K}) \cap \mathfrak{J} = \mathfrak{p}$. Nach 6. ist aber $\mathfrak{B} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{K}$ einer der Bewertungsringe, die der zum Funktionalring $\mathfrak{M}_\Lambda$ gehörigen b -Operation zugrunde liegen; aus der Tatsache, daß das maximale Primideal $\mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{K}$

[33]) Also diejenige w-Operation, bei der die definierende Ringmenge N aus allen und nur den Bewertungsringen $\mathfrak{B}_\tau$ von $\mathfrak{K}$ besteht, bei denen die triviale Fortsetzung $\mathfrak{B}_\tau^*$ einen Primidealquotientenring von $\mathfrak{M}_\Lambda$ darstellt.

von $\mathfrak{B}$ der Gleichung $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{J} = \mathfrak{p}$ genügt, folgt daher sofort $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{b_\Delta}$, d. h. alle nicht in Δ liegenden Primideale von $\mathfrak{J}$ sind b_Δ-Ideale. — c) Liegt das Primideal $\mathfrak{p}$ in Δ, so wird $\mathfrak{p} \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}_\Delta = \widetilde{\mathfrak{M}}_\Delta$ wegen der Eigenschaft c) der Δ-Mengen, und damit sicher $\mathfrak{p}_{b_\Delta} = \mathfrak{J}$. Es sei nun N die Menge aller der Bewertungsringe $\mathfrak{B}_\sigma$, die in $\mathfrak{K}$ der b-Operation zugrunde liegen, so daß für beliebiges $\mathfrak{a}$ stets $\mathfrak{a}_{b_\Delta} = \underset{\mathfrak{B}_\sigma \subset \mathsf{N}}{\Delta} (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}_\sigma)$ wird. Bei allen $\mathfrak{B}_\sigma \subset \mathsf{N}$ muß nach dem bereits Bewiesenen der Durchschnitt $\mathfrak{m}_\sigma \cap \mathfrak{J}$ des maximalen Primideals $\mathfrak{m}_\sigma$ mit $\mathfrak{J}$ ein nicht in Δ liegendes Primideal darstellen. Gehören daher alle Primoberideale des ganzen Ideales $\mathfrak{a}$ zu Δ, so kann $\mathfrak{a}$ in keinem $\mathfrak{m}_\sigma$ enthalten sein, und es wird $\mathfrak{a}_{b_\Delta} = \underset{\mathfrak{B}_\sigma \subset \mathsf{N}}{\Delta} (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}_\sigma) = \underset{\mathfrak{B}_\sigma \subset \mathsf{N}}{\Delta} \mathfrak{B}_\sigma = \mathfrak{J}$. — d) Es sei $\widetilde{\mathfrak{M}}_w$ der Funktionalring irgendeiner w-Operation, bei der $\mathfrak{p}_w = \mathfrak{J}$ wird für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset \Delta$. Dann muß nach c) notwendig $(a_0, a_1, \ldots, a_n)_w = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}_w \cap \mathfrak{K} = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}_w \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{J}$ sein für jedes ganze endliche Ideal $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, dessen Primoberideale alle in Δ liegen. Es sind daher alle Polynome aus S_Δ in $\widetilde{\mathfrak{M}}_w$ Einheiten, und es wird somit $\widetilde{\mathfrak{M}}_w \supseteq \widetilde{\mathfrak{M}}_\Delta$. Das heißt aber, daß die b_Δ-Operation die „feinste" Wertidealoperation mit den in Satz 33 angegebenen Eigenschaften darstellt.

Man könnte vermuten, daß überhaupt alle Wertidealoperationen b-Operationen sind. Daß das nicht richtig ist, zeigt die folgende Überlegung: Es sei $\mathfrak{p}$ ein endliches Primideal, das in $\mathfrak{J}$ maximal ist, also (außer $\mathfrak{J}$ selbst) kein ganzes Oberideal besitzt. Wir nehmen an, daß in $\widetilde{\mathfrak{M}} = \widetilde{\mathfrak{M}}_b$ zwei verschiedene, der Gleichung $\widetilde{\mathfrak{m}}_1 \cap \mathfrak{J} = \widetilde{\mathfrak{m}}_2 \cap \mathfrak{J} = \mathfrak{p}$ genügende Primideale $\widetilde{\mathfrak{m}}_1$ und $\widetilde{\mathfrak{m}}_2$ existieren; diese Voraussetzung ist nach 6. dann und nur dann erfüllt, wenn es in $\mathfrak{K}$ zwei verschiedene Bewertungsringe $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ gibt, deren maximale Primideale $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ beide mit $\mathfrak{J}$ den Durchschnitt $\mathfrak{p}$ haben. Ist $\widetilde{a}$ ein zu $\widetilde{\mathfrak{m}}_1$, aber nicht zu $\widetilde{\mathfrak{m}}_0$ gehöriges Element aus $\widetilde{\mathfrak{M}}$, so ist gleichzeitig mit $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{J}$ auch $(\mathfrak{p} + (\widetilde{a})) \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}$ in $\widetilde{\mathfrak{M}}$ endlich und damit Hauptideal: $(\mathfrak{p} + (\widetilde{a})) \cdot \widetilde{\mathfrak{M}} = (\tilde{c})$. Der zu dem m. a. System S aller Potenzen von $\tilde{c}$ gehörige Quotientenring $\widetilde{\mathfrak{M}}_S$ von $\widetilde{\mathfrak{M}}$ ist echter Oberring von $\widetilde{\mathfrak{M}}$, er definiert daher in $\mathfrak{K}$ eine von der b-Operation verschiedene Wertidealoperation, die durch den Buchstaben w gekennzeichnet werden möge. Wir behaupten nun:

Alle Primideale von $\mathfrak{J}$ *sind w-Ideale:* $\mathfrak{q}_w = \mathfrak{q}$ *für jedes Primideal* $\mathfrak{q}$ *aus* $\mathfrak{J}$.

Ist nämlich zunächst $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$, so erhält man, da $\tilde{c}$ und seine Potenzen nicht in $\widetilde{\mathfrak{m}}_2$ enthalten sind, sofort: $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\widetilde{\mathfrak{m}}_2} \supseteq \widetilde{\mathfrak{M}}_S$; $\widetilde{\mathfrak{m}}_2 \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}_S = \widetilde{\mathfrak{m}}_2 \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}_{\widetilde{\mathfrak{m}}_2} \cap \widetilde{\mathfrak{M}}_S$; $\widetilde{\mathfrak{m}}_2 \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}_S \cap \mathfrak{K} = \widetilde{\mathfrak{m}}_2 \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}_{\widetilde{\mathfrak{m}}_2} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{p}$, und daraus folgt genau so wie beim Beweise von Satz 33 die Gleichung $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_w$. — Ist aber $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$, $\tilde{\mathfrak{q}}$ ein

(nach 8. sicher vorhandenes) Primideal aus $\tilde{\mathfrak{M}}$, für das $\tilde{\mathfrak{q}} \cap \mathfrak{J} = \mathfrak{q}$ wird, so kann $\tilde{\mathfrak{q}}$ das Element $\tilde{c}$ nicht enthalten, da sonst $\mathfrak{q} = \tilde{\mathfrak{q}} \cap \mathfrak{J} \supset \mathfrak{p}$ sein müßte, was der Maximaleigenschaft von $\mathfrak{p}$ widerspricht. Man kann nun genau so weiterschließen wie im Fall $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$, nur daß diesmal der Primidealquotientenring $\tilde{\mathfrak{M}}_{\tilde{\mathfrak{q}}}$ an Stelle des Primidealquotientenrings $\tilde{\mathfrak{M}}_{\tilde{\mathfrak{m}}_2}$ tritt.

Mit den skizzierten Überlegungen zeigt man z. B. im konkreten Fall der Polynomringe in $n > 1$ Variabeln ohne Schwierigkeit, daß immer unendlich viele w-Operationen existieren mit der Eigenschaft, daß *alle* Ringprimideale w-Ideale sind. Von diesen Operationen gehört dann, abgesehen von der b-Operation selbst, keine einzige in die Klasse der b_Δ-Operationen.

Schlußbemerkungen.

Aus den letzten Betrachtungen von 12. geht hervor, daß die Menge aller Wertidealoperationen auch bei ganz einfachem Bau des gegebenen Ringes $\mathfrak{J}$ auf den ersten Blick kaum zu übersehen ist. Ich halte es daher für zweckmäßig, die Untersuchung zunächst auf die wichtigsten Sonderfälle, insbesondere auf die b-Operation zu beschränken. Unter den bisher ungelösten Aufgaben, die sich dann von selbst darbieten, sei eine besonders hervorgehoben: *Ist etwa bei einem Primärideal* $\mathfrak{q}$ *immer auch* $\mathfrak{q}_b$ *Primärideal?* Nach 8. sind jedenfalls alle Primideale b-Ideale. Aus dieser feststehenden Tatsache folgt sofort, daß bei einem Primärideal $\mathfrak{q}$ das Ideal $\mathfrak{q}_b$ immer eine einzige isolierte Primärkomponente $\mathfrak{q}'_b$ besitzt, und daß $\mathfrak{q}'_b$ zum gleichen Primideal $\mathfrak{p}$ gehört wie $\mathfrak{q}$. Die Gleichung $\mathfrak{q}_b = \mathfrak{q}'_b$ aber ist keineswegs selbstverständlich. Ist nämlich z. B. $\mathfrak{B}$ ein Bewertungsring, dessen maximales Primideal $\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{J}$ ein echtes Primoberideal $\mathfrak{p}_1$ von $\mathfrak{p}$ zum Durchschnitt hat, so wird jedenfalls dann, wenn $\mathfrak{m}$ das einzige Primideal von $\mathfrak{B}$ ist, $\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{B} \cap \mathfrak{J}$ ein zu $\mathfrak{p}_1$ und nicht ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal, in der Durchschnittsdarstellung $\mathfrak{q}_b = \underset{\sigma}{\Delta} \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{B}_\sigma = \underset{\sigma}{\Delta} (\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{B}_\sigma \cap \mathfrak{J}) = \underset{\sigma}{\Delta} \mathfrak{a}_\sigma$ treten also i. a. Komponenten auf, die wenigstens geeignet sein *könnten*, den primären Charakter von $\mathfrak{q}_b$ zu stören. — Allein aus der Definition der b-Operation heraus läßt sich also jedenfalls keine Entscheidung treffen; und auch die Heranziehung des a-Prozesses scheint auf den ersten Blick nicht viel zu nützen. — Daß andererseits die positive Erledigung des Primäridealproblems vor allem für die O-Ringe von weittragender Bedeutung wäre, ist unmittelbar klar.

(Eingegangen am 3. März 1936.)

The Perron-Stieltjes Integral.

By

A. J. Ward in Cambridge.

Considerable attention has been given to the question of integration with respect to a function; various authors have shown how to define an integral which generalises the Stieltjes integral in the same way as Lebesgue generalised the ordinary integral. The Lebesgue-Stieltjes integral, however, is by its very nature restricted to the case in which the integrating function is of bounded variation, while the ordinary Stieltjes integral has no such limitation. An integral which includes both these (Riemann-Stieltjes and Lebesgue-Stieltjes) is therefore not without interest. Such an integral may be obtained by applying the methods of Perron [1]). It is interesting also on account of its close connection with differentiation.

In the first section of this paper I give definitions of differentiation with respect to a function. It is shown that the theorem, due to Denjoy [2]), which governs the possible values of the derivates of a function, can be extended to the case when the base-function is VBG^* on the set of points considered [3]). It seems likely that the class of functions VBG^* on a given set of points is the most general class for which it is profitable to define derivates, and it is noteworthy that the same class of functions proves to be of importance for the theory of the Perron-Stieltjes integral. The second chapter is devoted to the definition and simple properties of the integral. Finally, I consider the case of a base-function which is VBG^*, and give the analogue of the theorem which states that every function ACG^* in an interval is the Perron integral of its derivative, and conversely [4]).

---

[1]) Other authors have defined a Perron-Stieltjes integral with respect to functions of bounded variation; see R. L. Jeffery, *Trans. American Math. Soc.* **34** (1932), S. 645; J. Ridder, *Math. Zeitschr.* **40** (1935), S. 127. The definitions employed are not applicable to general base-functions. (The present work was carried out independently of the work of Ridder, and in some places conventions are used which are different from his.)

[2]) A. Denjoy, *Journal de Math.* (1915) S. 105—240, especially S. 190—192.

[3]) S. Saks, *Théorie de l'Intégrale* (Warsaw 1933), S. 158 ff. The definitions are reproduced here for completeness. See Nr. 1.

[4]) Saks, loc. cit. S. 198, 216.

By the kindness of Mr. L. C. Young, I have been able to compare this work with some (unpublished) work of his in which the ideas of the Denjoy integral are applied to Stieltjes integration. It is not surprising that the theorems proved for the 'Perron-Stieltjes' integral are often very similar to those which hold for Young's 'Denjoy-Stieltjes' integral, although the methods of attack are quite different[5]). (In some cases, however, we found that we had carried out similar but independent work.) He suggested that it might be possible to define $(PS)\int (f_1\,d\varphi_1 + f_2\,d\varphi_2)$ and to prove Theorem 14, which he had proved for Denjoy-Stieltjes integrals. This definition and this theorem have been added in accordance with his suggestions.

1. Unless otherwise stated, all functions mentioned are supposed to be real and finite, and defined for all values of x in a fixed interval $a \leqq x \leqq b$. The 'base-function' with respect to which we differentiate or integrate is usually denoted by $\varphi(x)$ or $\psi(x)$, and other functions by $f(x)$, $g(x)$ and so on. Following Saks, we denote by $\omega(\varphi; E)$ the oscillation of $\varphi(x)$ on a set E. Let now (I_k), $k = 1, 2, \ldots, n$, be any finite system of non-overlapping closed intervals whose end-points lie in E; form the sum $\sum_{k=1}^{n} \omega(\varphi; I_k)$. The upper bound of all such sums is denoted by $V^*(\varphi, E)$: if it is finite we say that $\varphi(x)$ is VB^* on E. Finally, $\varphi(x)$ is said to be VBG^* on E if E can be expressed as a finite or enumerable sum of sets E_n on each of which φ is VB^*.

Given two functions $f(x)$, $\varphi(x)$, we say that $f(x)$ is *AC with respect to* $\varphi(x)$ on a set E, if, for any $\varepsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that, if (I_k) is any finite set of non-overlapping closed intervals whose end-points lie in E, then

$$\sum_k |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon \quad \text{whenever} \quad \sum_k \omega(\varphi, I_k) < \delta,$$

where x_k, y_k are the end-points of I_k. In the same way, if for any $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that

$$\sum_k \omega(f, I_k) < \varepsilon \quad \text{whenever} \quad \sum_k \omega(\varphi, I_k) < \delta,$$

the intervals (I_k) fulfilling the same conditions as before, we say that $f(x)$ is AC^* *with respect to* $\varphi(x)$ on E. If a given set E can be expressed as a finite or enumerable sum of sets E_n, on each of which $f(x)$ is AC^* with respect to $\varphi(x)$, we say that $f(x)$ is ACG^* *with respect to* $\varphi(x)$ on E.

---

[5]) In fact, the final theorems, 12 and 13, are not far from a demonstration that the Perron-Stieltjes integral is equivalent to a Denjoy-Stieltjes integral.

1. 1. **Differentiation with respect to a function.**

Let $f(x)$, $\varphi(x)$ be any two functions, of which $\varphi(x)$ is defined at all points of the interval $a \leqq x \leqq b$, but $f(x)$ may be undefined at some points. We define the upper right-hand derivate of $f(x)$ with respect to $\varphi(x)$ as

$$D^+(f, x; \varphi) = \overline{\lim_{h \to +0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)}$$

with the conventions that if the quotient takes the form $0/0$ it is not counted in evaluating the limit, and that, if $a > 0$, then $a/0 = +\infty$ and $-a/0 = -\infty$. We define the three other derivates similarly, and if they all exist and are equal we write the common value as $D(f, x; \varphi)$. By $df(x)/d\varphi(x)$, however, we denote a rather more general conception, which we may call the Roussel derivative[6]). We say that $f(x)$ is *continuous with respect to* $\varphi(x)$ at the point x, if for some number k

$$\lim_{h \to 0} [f(x+h) - f(x) - k\{\varphi(x+h) - \varphi(x)\}] = 0.$$

If in addition[7]) we have

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - k\{\varphi(x+h) - \varphi(x)\}}{\omega(\varphi; x, h)} = 0$$

(where $\omega(\varphi; x, h)$ is the oscillation of φ in the closed interval $\langle x, x+h\rangle$ or $\langle x+h, x\rangle$, according to the sign of h), then we write[8])

$$df(x)/d\varphi(x) = k.$$

We take as our starting-point the following theorem, which is a slight generalisation of the Denjoy results.

Theorem 1[9]). *If $\varphi(x)$ is strictly monotone, and $f(x)$ is defined in any set H, then all the points of H fall into one of three sets:*

(i) *a set E_0 where $D^+(f, x; \varphi) = D_-(f, x; \varphi)$, finite;*

(ii) *a set E_∞ where $D^+(f, x; \varphi) = +\infty$, $D_-(f, x, \varphi) = -\infty$;*

(iii) *a set N such that $m\varphi(N) = 0$*[10]).

---

[6]) Roussel, *Comptes rendus* (Paris), 187, S. 926 (19. Nov. 1928).

[7]) This second condition does not include the continuity condition, as it is possible that $\varphi(x)$ may oscillate infinitely in the neighbourhood of the point x.

[8]) It is easily seen that if φ is bounded in the neighbourhood of x, then the existence of a finite $D(f, x; \varphi)$ involves the existence (and equality) of $df(x)/d\varphi(x)$, but not conversely.

[9]) A theorem equivalent to this is proved by Ridder (loc. cit. 134) in the more general case when $\varphi(x)$ is VB [but not when $\varphi(x)$ is VBG^*]. His conventions in the definition of the derivates with respect to $\varphi(x)$ are different from ours; also it should be observed that $m\varphi(E)$ is not to be confused with „the φ-measure of E", which cannot in general be defined unless $\varphi(x)$ is VB.

[10]) $\varphi(N)$ denotes the set of values assumed by $\varphi(x)$ for those values of x which lie in N.

To prove this it is only necessary to express $f(x)$ as a function of φ and apply the Denjoy theorems; the arguments involved are trivial. We shall show that the same theorem is true for any $\varphi(x)$ which is VBG^* on H. It will then be shown that if $f(x)$ itself is VBG^*, the set E_∞ can be included in the set N; that is, $m\varphi(E_\infty) = 0$.

1.2. Lemma 1. *If $\varphi(x)$ is VB^* on a set E, it is VB^* on the closed set $E + E'$* [11]).

Lemma 2. *If $\varphi(x)$ is VB^* on a set E, then there exists a strictly increasing function $\chi(x)$ such that all four derivates satisfy $|D_{\pm}^{\pm}(\varphi, x; \chi)| \leqq 1$ at each point of E, except possibly the extreme points.*

By lemma 1, we may suppose E closed; let c, d be its extreme points. Write

$$\chi(y) = y + V^*(\varphi; [E\langle a, y\rangle + \langle y\rangle]) - V^*(\varphi; [E\langle y, b\rangle + \langle y\rangle]). \tag{1}$$

$\chi(y)$ is obviously strictly increasing, and it is easy to see that for any x of E and any y such that $c \leqq y \leqq d$ we have

$$|\chi(y) - \chi(x)| \geqq |\varphi(y) - \varphi(x)|. \tag{2}$$

Hence the result follows.

Lemma 3. *If $\chi(x)$ is strictly increasing, and all four derivates of a function $\varphi(x)$ satisfy $|D_{\pm}^{\pm}(\varphi, x; \chi)| \leqq k$ at each point of a set E, then $m_e\varphi(E) \leqq k\, m_e\chi(E)$.*

Given $\varepsilon > 0$, we can find, for any point x of E, a number $h = h(x, \varepsilon)$ so small that

$$|\varphi(x) - \varphi(\xi)| < (k + \varepsilon)|\chi(x) - \chi(\xi)| \tag{3}$$

whenever $|\chi(x) - \chi(\xi)| < h$ [12]). We can therefore find h_0, depending only on ε, so small that equation (3) is satisfied whenever

$$|\chi(x) - \chi(\xi)| < h_0,$$

if x belongs to a set $E_0 \subset E$ such that $m_e\varphi(E_0) > m_e\varphi(E) - \varepsilon$.

Let U be an open set including $\chi(E)$ and such that $mU < m_e\chi(E) + \varepsilon$; then U can be expressed as a sum of open intervals I_n, possibly overlapping, such that $mI_n < h_0$ for each n, and $\sum_n mI_n < m_e\chi(E) + 2\varepsilon$. Let J_n be the set of points x for which $\chi(x)$ lies in I_n; if x_0, x_1 are any two points of $E_0 J_n$ we clearly have $|\chi(x_0) - \chi(x_1)| < h_0$ and so $|\varphi(x_0) - \varphi(x_1)| < (k + \varepsilon)|\chi(x_0) - \chi(x_1)|$. It follows that $m_e\varphi(E_0 J_n)$

[11]) Saks, *loc. cit.* 159.

[12]) Since $\chi(x)$ is *strictly* increasing.

$\leqq (k+\varepsilon)\, m I_n$. Since E_0 is a sub-set of E, every point of E_0 lies in some set J_n, and therefore

$$\begin{aligned} m_e\, \varphi(E_0) &\leqq \sum_n m_e\, \varphi(E_0 J_n) \\ &\leqq (k+\varepsilon) \sum_n m I_n \\ &\leqq (k+\varepsilon)\, \{m_e\, \chi(E) + 2\varepsilon\}. \end{aligned}$$

Hence

$$m_e\, \varphi(E) \leqq (k+\varepsilon)\, \{m_e\, \chi(E) + 2\varepsilon\} + \varepsilon.$$

Since ε is arbitrarily small, the result follows.

Theorem 2. *If $f(x)$ is defined on a set H, and $\varphi(x)$ is $V\,BG^*$ on a set $E \subset H$, then all the points of E fall into one of three sets:*

(i) *a set E_0 where $D^+(f, x; \varphi) = D_-(f, x; \varphi)$, finite;*

(ii) *a set E_∞ where $D^+(f, x; \varphi) = +\infty$, $D_-(f, x; \varphi) = -\infty$;*

(iii) *a set N such that $m\, \varphi(N) = 0$.*

Express E as $\sum_{n=1} E_n$ where $\varphi(x)$ is $V\,B^*$ on each E_n. It is clearly sufficient to prove that the set $N E_n$, which we can express as $E_n - E_\infty - E_0$, satisfies $m\, \varphi(N E_n) = 0$ for each n. Write $F_n = E_n + E_n'$ and let c_n, d_n be the extreme points of F_n. By lemmas 1 and 2, we can define $\chi_n(x)$ such that the derivates of φ satisfy $|D_{\pm}^{\pm}(\varphi, x; \chi_n)| \leqq 1$ at each point of F_n except perhaps c_n and d_n. Apply theorem 1 to the functions φ and χ_n; the set can be divided as follows[13]):

A set G_1 where $D(\varphi, x; \chi_n) = 0$;

a set G_2 where $D(\varphi, x; \chi_n)$ exists and is not zero;

a set N_n such that $m\, \chi_n(N_n) = 0$.

The set can, however, also be divided with respect to $f(x)$ and $\chi_n(x)$, as follows:

A set H_1 where $D(f, x; \chi_n)$ exists;

a set H_2 where

$$D^+(f, x; \chi_n) = D_-(f, x; \chi_n), \text{ finite};$$
$$D_+(f, x; \chi_n) = -\infty, \; D^-(f, x; \chi_n) = +\infty;$$

a set H_3 where

$$D_+(f, x; \chi_n) = D^-(f, x; \chi_n), \text{ finite};$$
$$D^+(f, x; \chi_n) = +\infty, \; D_-(f, x; \chi_n) = -\infty;$$

---

[13]) With each theorem such as theorem 1 there is of course associated a similar theorem relating to the other two derivates, which we assume without further proof. It follows that if all the derivates are finite, they are equal to each other, except on a set satisfying $m\, \chi_n(N_n) = 0$.

a set H_4 where

$$D^+(f, x; \chi_n) = D^-(f, x; \chi_n) = +\infty;$$
$$D_+(f, x; \chi_n) = D_-(f, x; \chi_n) = -\infty;$$

a set H_5 such that $m\chi_n(H_5) = 0$.

Now it is clear that all points of $G_2(H_1 + H_2 + H_3 + H_4)$ fall into one of the sets E_0, E_∞. (It may be necessary to consider the sign of $D(\varphi, x; \chi_n)$; for example, for points of the set $G_2 H_2$.) Hence $NE_n \subset H_5 + N_n + G_1$. Apply lemma 3 to the set $H_5 + N_n$ with $k = 1$ and to the set G_1 with $k = 0$; we have $m\varphi(H_5 + N_n + G_1) = 0$ and so $m\varphi(NE_n) = 0$. This proves the theorem.

1.3. Lemma 4. *If $f(x)$ is ACG^* with respect to $\varphi(x)$ on a set E, on which $\varphi(x)$ is VBG^*, then $f(x)$ is VBG^* on E.*

We can split E into at most $\aleph_0$ sets E_n on each of which $\varphi(x)$ is VB^* and $f(x)$ is AC^* with respect to $\varphi(x)$. Define the function $\chi_n(x)$ corresponding to the function $\varphi(x)$ and the set $F_n = E_n + E_n'$, as in lemma 2. Since $f(x)$ is AC^* with respect to $\varphi(x)$ on E_n, we can find $\delta > 0$ such that, for any finite set of intervals with end-points in E_n,

$$\text{(4)} \qquad \sum_k \omega(f, I_k) < 1 \quad \text{if} \quad \sum_k \omega(\varphi, I_k) < \delta.$$

Consider the sub-set E_{np} of E_n for which $p\delta \leqq \chi_n(x) < (p+1)\delta$. If x_1 and x_2 $(x_1 < x_2)$ are any two points of E_{np}, we have from (1),

$$\omega(\varphi; \langle x_1, x_2\rangle) \leqq V^*(\varphi, \langle x_1, x_2\rangle) \leqq \chi_n(x_2) - \chi_n(x_1).$$

Thus for any set of intervals I_k with end-points in E_{np} we have

$$\Sigma\omega(\varphi, I_k) \leqq \Sigma\omega(\chi_n, I_k) < \delta,$$

and so from (4), $\Sigma\omega(f, I_k) < 1$. That is, $f(x)$ is VB^* on E_{np}; it follows that $f(x)$ is VBG^* on E.

Theorem 3. *If $f(x)$ and $\varphi(x)$ are both VBG^* on a set E, then $D(f, x; \varphi)$ exists, and is finite and equal to $df(x)/d\varphi(x)$, everywhere in E except possibly in a set N such that $m\varphi(N) = 0$.*

Corollary. *If, on E, $\varphi(x)$ is VBG^* and $f(x)$ ACG^* with respect to $\varphi(x)$, then a finite $df(x)/d\varphi(x)$ exists everywhere in E except for a set N such that $m\varphi(N) = 0$.*

We can express E as the sum of sets E_n on each of which both $f(x)$ and $\varphi(x)$ are VB^*. By constructing functions as in lemma 2 for both $f(x)$ and $\varphi(x)$, and adding them together, we obtain a strictly increasing function $\chi_n(x)$ such that

$$|D_{\pm}^{\pm}(f, x; \chi_n)| \leqq 1$$

and also

$$|D_{\pm}^{\pm}(\varphi, x; \chi_n)| \leqq 1$$

at each point of E_n, except possibly the extreme points. By Theorem 1, both $D(f, x; \chi_n)$ and $D(\varphi, x; \chi_n)$ exist and are finite except in a set N_n such that $m\chi_n(N_n) = 0$. The argument now proceeds as in Theorem 2. We observe that at a point where $D(f, x; \chi_n)$ and $D(\varphi, x; \chi_n)$ both exist and $D(\varphi, x; \chi_n) \neq 0$, both $D(f, x; \varphi)$ and $df(x)/d\varphi(x)$ must exist (and be equal).

The corollary follows at once from lemma 4.

2. The Perron-Stieltjes Integral.

The Perron integral is defined by means of major and minor functions, which in turn are usually defined by inequalities relating to derivates[14]). There would be obvious difficulties in extending such a definition to the case of integrals with respect to a general function $\varphi(x)$, which may attain the same value at an infinite set of points. For this reason we define the Perron-Stieltjes integral by means of inequalities concerning the increments $M(x+h) - M(x)$, $\varphi(x+h) - \varphi(x)$ *directly*, and not in terms of the derivates of M with respect to φ. The resulting integral is found to include the ordinary Stieltjes integral, whether $\varphi(x)$ is of bounded variation or not. It also includes the Lebesgue-Stieltjes integral with respect to an increasing function; but it does not include the 'Lebesgue-Stieltjes' integral with respect to a function of bounded variation (defined by Mlle N. Bary and Menchoff), which may exist in an interval (a, b) without existing in a smaller interval (a, x)[15]).

2.1. Given any functions $f(x)$, $\varphi(x)$ we say that $M(x)$ is a major function of $f(x)$ with respect to $\varphi(x)$ if $M(a) = 0$, and for any point x of $\langle a, b\rangle$ there exists $\delta(x) > 0$ such that

(5) $M(\xi) \geqq M(x) + f(x)\{\varphi(\xi) - \varphi(x)\}$ if $0 \leqq \xi - x \leqq \delta(x)$,

(6) $M(\xi) \leqq M(x) + f(x)\{\varphi(\xi) - \varphi(x)\}$ if $0 \geqq \xi - x \geqq -\delta(x)$.

(If x is equal to a or b, we consider only the one inequality which is appropriate.)

The upper Perron-Stieltjes integral of $f(x)$ with respect to $\varphi(x)$ is defined as

$$(PS)\overline{\int_a^b} f(x)\,d\varphi(x) = \underline{bound}\ M(b) \quad \text{(all major functions)}$$

if finite major functions exist; otherwise we write $+\infty$ for the value of the upper integral.

---

[14]) Ridder (loc. cit.) applies the same method in defining his Perron-Stieltjes integral.

[15]) N. Bary and D. Menchoff, Ann. Mat. pura appl. (4) (1928), S. 19—54.

It is easy to see that $M(x) - (PS)\int_a^{-x} f(t) \cdot d\varphi(t)$ is an increasing function of x.

Minor functions and the lower integral are defined in the corresponding way, the inequalities being reversed.

Let $M(x)$, $m(x)$ be any major and minor functions, write

$$\omega(x) = M(x) - m(x).$$

For any x there exists $\delta(x) > 0$ such that

$$\omega(\xi) \geqq \omega(x) \quad \text{if} \quad 0 \leqq \xi - x \leqq \delta(x),$$
$$\omega(\xi) \leqq \omega(x) \quad \text{if} \quad 0 \geqq \xi - x \geqq -\delta(x),$$

(from the definitions). It easily follows that $\omega(x)$ is an increasing function. Since this is true for any $M(x)$, $m(x)$,

$$(PS)\int_a^{-x} f(t)\, d\varphi(t) - (PS)\int_{-a}^{x} f(t)\, d\varphi(t)$$

is a positive increasing function of x. (We do not give the details of this argument, as they are almost exactly the same as for the ordinary Perron integral.

If

$$(PS)\int_a^{-b} f(x)\, d\varphi(x) = (PS)\int_{-a}^{b} f(x)\, d\varphi(x)$$

we write the common value as $(PS)\int_a^b f(x)\, d\varphi(x)$; if it is finite we say that $f(x)$ is integrable with respect to $\varphi(x)$ in (a, b). In future we drop the prefix (PS) when there is no ambiguity[16]).

The following properties are easily proved:

(I) If $a < c < b$ and $f(x)$ is integrable in (a, b), then it is integrable in (a, c), (c, b), and

$$\int_a^b f(x)\, d\varphi(x) = \int_a^c f(x)\, d\varphi(x + \int_c^b f(x)\, d\varphi(x).$$

---

[16]) The same principles may be applied to form the 'Perron' integral of any differential expression depending on one variable. For example, we may define $(PS)\int^{-} \{f_1(x)\, d\varphi_1(x) + f_2(x)\, d\varphi_2(x)\}$ in exactly the same way as we have defined $(PS)\int^{-} f(x)\, d\varphi(x)$, only replacing (5) and (6) by

$M(\xi) - M(x) \geqq f_1(x)\{\varphi_1(\xi) - \varphi_1(x)\} + f_2(x)\{\varphi_2(\xi) - \varphi_2(x)\}$ if $0 \leqq \xi - x \leqq \delta$,

$M(\xi) - M(x) \leqq f_1(x)\{\varphi_1(\xi) - \varphi_1(x)\} + f_2(x)\{\varphi_2(\xi) - \varphi_2(x)\}$ if $0 \geqq \xi - x \geqq -\delta$.

I owe this remark, and Theorem 14 which depends on it, to Mr L. C. Young.

The converse also holds.

$$\text{(II)} \qquad \overline{\int_a^b} c f(x)\, d\varphi(x) = c \overline{\int_a^b} f(x)\, d\varphi(x) \quad \text{if} \quad c \geqq 0;$$

$$= c \int_{-a}^{b} f(x)\, d\varphi(x) \quad \text{if} \quad c \leqq 0.$$

$$\text{(III)} \qquad \overline{\int_a^b} \{f_1(x) + f_2(x)\}\, d\varphi(x) \leqq \overline{\int_a^b} f_1(x)\, d\varphi(x) + \overline{\int_a^b} f_2(x)\, d\varphi(x),$$

$$\int_a^b (f_1 \pm f_2)\, d\varphi(x) = \int_a^b f_1\, d\varphi + \int_a^b f_2\, d\varphi,$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, d\{\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\} \leqq \overline{\int_a^b} f(x)\, d\varphi_1(x) + \overline{\int_a^b} f(x)\, d\varphi_2(x),$$

$$\int_a^b f(x)\, d\{\varphi_1 \pm \varphi_2\} = \int_a^b f(x)\, d\varphi_1 \pm \int_a^b f\, d\varphi_2,$$

provided that the right-hand side has a meaning, in each case.

It will be noticed that we have not introduced any continuity condition in the definition of the integral. There are, however, continuity properties implicit in the definition, and the integral, if it exists, is always continuous with respect to $\varphi(x)$. For convenience we write

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, d\varphi(t), \quad \overline{F}(x) = \overline{\int_a^x} f(t)\, d\varphi(t), \quad \underline{F}(x) = \int_{-a}^{x} f(t)\, d\varphi(t).$$

Given any $\varepsilon > 0$, we can choose a major function with $M(b) < \overline{F}(b) + \varepsilon$. For any x, taking $\delta(x)$ as in the definitions (5) and (6), we then have, since $M(x) - \overline{F}(x)$ is an increasing function,

$$\overline{F}(\xi) - \overline{F}(x) \geqq M(\xi) - M(x) - \varepsilon$$

$$\geqq f(x)\{\varphi(\xi) - \varphi(x)\} - \varepsilon \text{ if } 0 \leqq \xi - x \leqq \delta(x),$$

and similarly

$$\overline{F}(\xi) - \overline{F}(x) \leqq f(x)\{\varphi(\xi) - \varphi(x)\} + \varepsilon \text{ if } 0 \geqq \xi - x \geqq -\delta(x).$$

Taking into account the corresponding inequalities for $\underline{F}(x)$, we see that if $f(x)$ is integrable,

$$\text{(7)} \qquad F(\xi) - F(x) - f(x)\{\varphi(\xi) - \varphi(x)\} \to 0 \text{ as } \xi - x \to 0.$$

2.2. Relations with other integrals.

In this section we prove first that the PS-integral includes the ordinary Perron integral, and next that it includes the 'modified Stieltjes

integral' of S. Pollard[17]), (which is itself a generalisation of the ordinary Stieltjes integral). Finally, we consider its relations with the LS-integral.

Theorem 4. *If* $(P)\int_a^b f(x)\,dx$ *exists, then* $(PS)\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)$ *(where* $\varphi(x) = x$*) exists and has the same value.*

Given any $\varepsilon > 0$ we can find a function $M(x)$ with

$$\text{min. } [D_+(M,x),\ D_-(M,x)] \geqq f(x)$$

everywhere, and $M(b) < (P)\int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon$. Then consider the function $M_1(x) = M(x) + \varepsilon(x-a)/(b-a)$. We have

$$\text{min } [D_+(M_1,x),\ \ D_-(M_1,x)] > f(x),$$

and hence for sufficiently small $\delta(x)$ the conditions for a PS-major function are satisfied.

Thus $(PS)\int_a^{-b} f(x)\,d(x) \leqq M_1(b) < (P)\int_a^b f(x)\,dx + 2\varepsilon$. From this and the corresponding result for the lower integral we have the theorem.

(Note. In the ordinary Perron-Bauer theory $f(x)$ is allowed to take infinite values, which are ruled out here; it is however a standard result that these infinite values may be replaced by zero without altering the integral, so that there is no real restriction in supposing $f(x)$ finite everywhere.)

Theorem 5. *If* $(M)\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)$ *exists*[18]*, then* $(PS)\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)$ *exists and has the same value.*

Let L be the value of the Pollard integral. For any $\varepsilon > 0$ there exists a set of points $y_1 < y_2 < \ldots y_N$ with the following property: — if $a = x_0 \leqq \xi_1 \leqq x_1 \leqq \xi_2 \leqq \ldots \leqq \xi_n \leqq x_n = b$ is any subdivision of (a,b) such that $y_1, y_2, \ldots, y_N$ occur somewhere among the points $x_1, \ldots, x_n$, then

$$|L - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\{\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})\}| < \varepsilon.$$

Define $M(\alpha,\beta)$ as the upper bound of

$$\sum_{i=1}^{P} f(\xi_i)\{\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})\}$$

---

[17]) S. Pollard, The Stieltjes Integral and its generalisations, Quart. Journ. **49**, 198 (1920), S. 87—94.

[18]) S. Pollard, loc. cit., p. 90.

for all divisions of the type

$$\alpha = x_0 \leqq \xi_1 \leqq x_1 \leqq \ldots \leqq \xi_P \leqq x_P = \beta.$$

Then $M(\alpha, y_1) + M(y_1, y_2) + \ldots + M(y_{N-1}, y_N) + M(y_N, b) \leqq L + \varepsilon$.

Now clearly, if $\alpha < x < \xi$,

$$M(\alpha, \xi) \geqq M(\alpha, x) + f(x)\{\varphi(\xi) - \varphi(x)\};$$

if $\alpha < \xi < x$,

$$M(\alpha, \xi) \leqq M(\alpha, x) + f(x)\{\varphi(\xi) - \varphi(x)\}.$$

For any x, let $n(x)$ be the greatest integer such that $y_{n(x)} \leqq x$.

Write

$$M(x) = M(a, y_1) + \sum_{i=1}^{n(x)-1} M(y_i, y_{i+1}) + M(y_{n(x)}, x).$$

From the inequalities just obtained it is easy to see that $M(x)$ is a major function, and $M(b) \leqq L + \varepsilon$. With the corresponding result for a minor function, this proves the theorem.

In the case when $\varphi(x)$ is monotone increasing, the development of the properties of the PS-integral proceeds almost exactly as for the ordinary P-integral. We show that if $F(x) = (PS)\int_a^x f(t)\,d\,\varphi(t)$ then $D(F, x; \varphi) = f(x)$ except in a set N, where $m\,\varphi(N) = 0$. We then show that if $(LS)\int_a^b f \cdot d\,\varphi$ exists, the PS-integral exists and has the same value; that the converse holds if $f(x)$ is always positive. Finally we prove that if $f_n(x) \to f(x)$ and we have always $g(x) \leqq f_n(x) \leqq h(x)$, where g, h are PS-integrable, then if all the $f_n(x)$ are PS-integrable, so is $f(x)$, and

$$\int_a^b f(x)\,d\,\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,d\,\varphi(x).$$

The proofs of these statements follow standard lines, and are omitted.

2. 3. The Stieltjes Transformation.

Theorem 6. *If* $\varphi(x) = \int_a^x g(t)\,d\,\psi(t)$ *for* $a \leqq x \leqq b$, *and* $f(x)$ *is bounded in* $\langle a, b\rangle$, *then*

$$\int_a^{-b} f(x)\,d\,\varphi(x) = \int_a^{-b} f(x)\,g(x)\,d\,\psi(x)$$

and

$$\int_{-a}^{b} f(x)\,d\,\varphi(x) = \int_{-a}^{b} f(x)\,g(x)\,d\,\psi(x).$$

Suppose that $\int_a^{-b} f(x)\,d\varphi(x) = L < \infty$, and $|f(x)| \leqq K$. Given $\varepsilon > 0$, choose a major function $M(x)$ of $f(x)$ with respect to $\varphi(x)$, and major and minor functions $N(x)$, $n(x)$ of g with respect to ψ, such that

$$M(b) < L + \varepsilon, \quad \varphi(b) - \varepsilon < n(b) \leqq N(b) < \varphi(b) + \varepsilon.$$

Write $\omega(x) = N(x) - n(x)$, $M_1(x) = M(x) + K\omega(x)$; then if $x \leqq \xi$ and $\xi - x$ is sufficiently small we have:

$$n(\xi) - n(x) \leqq \varphi(\xi) - \varphi(x) \leqq N(\xi) - N(x),$$
$$n(\xi) - n(x) \leqq g(x)\{\psi(\xi) - \psi(x)\} \leqq N(\xi) - N(x),$$

and so

$$|g(x)\{\psi(\xi) - \psi(x)\} - \{\varphi(\xi) - \varphi(x)\}|$$
$$\leqq \{N(\xi) - N(x)\} - \{n(\xi) - n(x)\} = \omega(\xi) - \omega(x).$$

Hence, for sufficiently small positive $\xi - x$,

$$\begin{aligned} M_1(\xi) - M_1(x) &= M(\xi) - M(x) + K\{\omega(\xi) - \omega(x)\} \\ &\geqq f(x)\{\varphi(\xi) - \varphi(x)\} + K\{\omega(\xi) - \omega(x)\} \\ &\geqq f(x)\{\varphi(\xi) - \varphi(x)\} + f(x)\{g(x)[\psi(\xi) - \psi(x)] \\ &\qquad - [\varphi(\xi) - \varphi(x)]\} \\ &\geqq f(x)\,g(x)\{\psi(\xi) - \psi(x)\}. \end{aligned}$$

There is a similar inequality for $\xi \leqq x$ and hence $M_1(x)$ is a major function of $f(x)\,g(x)$ with respect to ψ. Since $M_1(b) < L + (2K + 1)\varepsilon$ we see that

$$\int_a^{-b} f(x)\,g(x)\,d\psi(x) \leqq \int_a^{-b} f(x)\,d\varphi(x).$$

The reverse inequality is similarly proved; finally, the case of the lower integrals follows by writing $-f(x)$ for $f(x)$.

2. 4. Differential Properties.

We need first a covering theorem (analogous to W. H. Young's lemma).

Lemma 5. *If with each point x of a set E is associated an interval $(x, x + h)$, h varying with x; then given any number A less than $m_e\,\varphi(E)$, we can find a finite non-overlapping set of such intervals $(x_\nu, x_\nu + h_\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, such that $\Sigma m_e\,\varphi[E(x_\nu, x_\nu + h_\nu)] > A$.*

We can find p so large that the sub-set E_p, composed of those points of E for which $h > 1/p$, satisfies $m_e\,\varphi(E_p) > A$. Let $\langle c, d\rangle$ be the smallest closed interval containing E_p. We can find a point x_1 of E_p, either coinciding with c or so near to c that $m_e\,\varphi[E_p(x_1, d)] > A$. Let $(x_1, x_1 + h_1)$ be the interval associated with x_1, and let $\langle c_1, d\rangle$ be the

smallest closed interval containing the set $E_p\langle x_1 + h_1, d\rangle$. Then

$$m_e\,\varphi[E_p(x_1, x_1 + h_1)] + m_e\,\varphi[E_p(c_1, d)] \geqq m_e\,\varphi[E_p(x_1, d)] > A,$$

so that we can choose a point x_2 of E_p, such that $x_2 \geqq c_1$, lying so near c_1 that

$$m_e\,\varphi[E_p(x_1, x_1 + h_1)] + m_e\,\varphi[E_p(x_2, d)] > A.$$

We then take out the interval $(x_2, x_2 + h_2)$, and proceed in the same way; since each value of h is greater than $1/p$ the process must terminate. Finally we obtain a finite set of intervals $(x_1, x_1 + h_1), \ldots, (x_n, x_n + h_n)$ such that

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_e\,\varphi[E(x_\nu, x_\nu + h_\nu)] \geqq \sum_{\nu=1}^{n} m_e\,\varphi[E_p(x_\nu, x_\nu + h_\nu)] > A.$$

Theorem 7. *If*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,d\,\varphi(t) \quad (a \leqq x \leqq b),$$

then $dF(x)/d\,\varphi(x) = f(x)$ *except possibly at points of a set* N *such that* $m\,\varphi(N) = 0$.

We remark first that if in any interval $\varphi(x)$ is constant, then $F(x)$ also is constant, so that the equation $dF(x)/d\,\varphi(x) = f(x)$ is true in a conventional sense. Consider the set N_1 of points x_0 such that $\varphi(x)$ is not constant in any interval $\langle x_0, x_1\rangle$, $(x_1 > x_0)$, and that

$$\overline{\lim_{x \to x_0 + 0}} \frac{F(x) - F(x_0) - f(x_0)\{\varphi(x) - \varphi(x_0)\}}{\omega(\varphi, \langle x_0, x\rangle)} > 0.$$

We shall show that $m\,\varphi(N_1) = 0$, and a similar argument applied to three other sets defined by analogous inequalities would complete the proof of the theorem, for we have already shown that $F(x)$ is continuous with respect to $\varphi(x)$ at every point.

Suppose on the contrary that $m_e\,\varphi(N_1) > 0$. We can find p such that the set N_p where

$$\overline{\lim_{x \to x_0 + 0}} \frac{F(x) - F(x_0) - f(x_0)\{\varphi(x) - \varphi(x_0)\}}{\omega(\varphi, \langle x_0, x\rangle)} > \frac{1}{p}$$

satisfies $m_e\,\varphi(N_p) > 0$. Take η such that $0 < \eta < m_e\,\varphi(N_p)$ and a minor function $m(x)$ with $F(b) - m(b) < \eta/p$. Since $m(x) - m(x_0) \leqq f(x_0)\{\varphi(x) - \varphi(x_0)\}$ for all sufficiently small $x - x_0 \geqq 0$, we have for x_0 in N_p,

$$\overline{\lim_{x \to x_0 + 0}} \frac{F(x) - F(x_0) - [m(x) - m(x_0)]}{\omega(\varphi, \langle x_0, x\rangle)} > \frac{1}{p}.$$

Applying lemma 5, we can now find a finite non-overlapping set of intervals $(x_\nu, x_\nu + h_\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, such that

(8) $F(x_\nu + h_\nu) - F(x_\nu) - [m(x_\nu + h_\nu) - m(x_\nu)] > (1/p)\,\omega(\varphi, \langle x_\nu, x_\nu + h_\nu\rangle)$

and

$$(9) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} \omega(\varphi, \langle x_\nu, x_\nu + h_\nu \rangle) \geqq \sum_{\nu=1}^{n} m_e \varphi [N_p(x_\nu, x_\nu + h_\nu)] > \eta.$$

Then since $F(x) - m(x)$ is a positive increasing function, we must have from (8) and (9)

$$F(b) - m(b) > \eta / p,$$

which is a contradiction. Thus $m \varphi(N_1) = 0$.

It is also possible to give a differentiation theorem in terms of the ordinary derivates.

Theorem 8. *If* $F(x) = \int_a^x f(t)\, d\varphi(t)$, *then* $D^+(F, x) = f(x)\, D^+(\varphi, x)$ *or* $D^+(F, x) = f(x)\, D_+(\varphi, x)$, *according as* $f(x) \geqq 0$ *or* $f(x) \leqq 0$, *almost everywhere in* (a, b), *except possibly where the product takes the form* $0 \times \infty$.

At points x_0 where the statement is untrue, we must have

$$\overline{\lim_{x \to x_0 + 0}} \frac{F(x) - F(x_0) - f(x_0)\{\varphi(x) - \varphi(x_0)\}}{x - x_0} > 0$$

or

$$\underline{\lim_{x \to x_0 + 0}} \frac{F(x) - F(x_0) - f(x_0)\{\varphi(x) - \varphi(x_0)\}}{x - x_0} < 0.$$

The proof proceeds exactly as in the last theorem, with the substitution of $m_e E$ for $m_e \varphi(E)$, and $(x - x_0)$ for $\omega(\varphi, \langle x_0, x \rangle)$.

3. In the preceding sections we have given some properties of the PS-integral, assuming that it exists for the pair of functions considered. We now turn to the questions of the existence and structural properties of the integral. It appears to be necessary to assume that at least one of the functions concerned is VBG^* (on some set considered) in order to obtain any non-trivial results. In fact, we may say that the class of functions VBG^* in $\langle a, b \rangle$ is related to the PS-integral in much the same way as the class of functions of bounded variation is related to the ordinary Stieltjes integral.

After some lemmas dealing with the structure of VBG^* functions[19]), we give a necessary and sufficient condition for the integral to vanish identically. There follows a theorem on integration by parts (which may of course be interpreted as asserting that a certain PS-integral exists whenever the related integral exists). Finally we prove that a PS-integral with respect to a function VBG^* in $\langle a, b \rangle$ is ACG^* with respect to that function, and conversely; subject to the necessary continuity condition.

---

[19]) Similar lemmas are used in the work of L. C. Young on Denjoy-Stieltjes integration, but the work here published was carried out independently.

3. 1. Lemma 6. *$\varphi(x)$ is VBG^* on a set E if and only if there exists a strictly increasing function $\chi(x)$ such that all the derivates $D^{\pm}_{\pm}(\varphi, x; \chi)$ are finite at all points of E, except perhaps an enumerable set.*

Suppose the condition satisfied; then the points of E where the derivates are finite can be divided into sets E_n such that, if x lies in E_n,

$$|\varphi(\xi) - \varphi(x)| \leqq n\ |\chi(\xi) - \chi(x)|$$

whenever

$$|\chi(\xi) - \chi(x)| \leqq 1/n.$$

Subdivide each E_n into sub-sets E_{np} defined by the inequality $p/n \leqq \chi(x) < (p+1)/n$. It is clear that $\varphi(x)$ is VB^* on each E_{np} and hence (taking the exceptional points as constituting each a set in itself) $\varphi(x)$ is VBG^* on E.

Conversely, suppose $\varphi(x)$ VBG^* on E, and VB^* on each of a sequence of sets E_n which together make up E. Construct for each E_n the function $\chi_n(x)$ of lemma 2, and write

$$\chi(x) = \sum_n \frac{\chi_n(x) - \chi_n(a)}{2^n\{\chi_n(b) - \chi_n(a)\}}.$$

$\chi(x)$ is a strictly increasing function defined in $\langle a, b\rangle$, and it is clear that $|D^{\pm}_{\pm}(\varphi, x; \chi)| \leqq 2^n$ at each point of E_n, except perhaps the extreme points of E_n. Thus the derivates are finite at all points of E except possibly an enumerable set.

Theorem 9. *If $F(x) = \int_a^x f(t)\, d\varphi(t)$ for $a \leqq x \leqq b$, then $F(x)$ is VBG^* on E if and only if E can be expressed as $G + H$, where $\varphi(x)$ is VBG^* on G and $f(x) = 0$ at each point of H.*

Let $M(x)$, $m(x)$ be any major and minor functions of $f(x)$ with respect to $\varphi(x)$, and write $\omega(x) = M(x) - m(x)$. For brevity we write also $\delta\varphi = \delta\varphi(x, h)$ for $\varphi(x+h) - \varphi(x)$, and so on. We observe that, for sufficiently small h, both $f(x)\cdot\delta\varphi(x, h)$ and $\delta F(x, h)$ lie between $\delta m(x, h)$ and $\delta M(x, h)$, so that

$$|\delta F - f(x)\cdot\delta\varphi| \leqq |\delta\omega|. \tag{10}$$

Suppose now $\varphi(x)$ VBG^* on G, and let $\chi(x)$ be the function of lemma 6 corresponding to the set G. Write $\chi_1(x) = \chi(x) + \omega(x)$. At all points of G except an enumerable set, there exists $K = K(x)$ such that

$$|\delta\varphi| \leqq K(x)\cdot|\delta\chi|$$

for sufficiently small h. Hence, using (10), we have

$$(11) \qquad \begin{aligned} |\delta F| &\leqq |f(x)\cdot\delta\varphi| + |\delta\omega|, \\ &\leqq K\cdot|f(x)|\cdot|\delta\chi| + |\delta\omega|, \\ &\leqq \{K|f(x)| + 1\}\,|\delta\chi_1|, \end{aligned}$$

since $\chi(x)$ and $\omega(x)$ are both increasing functions. At points of H, where $f(x) = 0$, we have immediately

$$(12) \qquad |\delta F| \leqq |\delta\omega| \leqq |\delta\chi_1|$$

for sufficiently small h. By lemma 6, it follows from (11) and (12) that $F(x)$ is VBG^* on $G + H$.

Conversely, suppose $F(x)$ VBG^* on $E = G + H$, and $f(x) = 0$ on H, but $f(x) \neq 0$ on G.

Let $\chi(x)$ be the function of lemma 6, defined with reference to $F(x)$ and E. At all points of G except an enumerable set, we have, for sufficiently small h,

$$|\delta F| \leqq K(x)\,|\delta\chi|$$

and so

$$|f(x)\cdot\delta\varphi| \leqq K(x)\,|\delta\chi| + |\delta\omega|.$$

Since $f(x)$ does not vanish on G, it follows that

$$|\delta\varphi| \leqq \{K(x) + 1\}\,\{|\delta\chi| + |\delta\omega|\}/|f(x)|.$$

Thus $\varphi(x)$ is VBG^* on the set G.

Lemma 7. *If $\chi(x)$ is strictly increasing, and $D(\varphi, x; \chi)$ exists and satisfies $|D(\varphi, x; \chi)| > k > 0$ at each point of a set E such that $m\varphi(E) = 0$, then $m\chi(E) = 0$.*

For each point x of E we can find $n = n(x)$ so large that

$$|\varphi(\xi) - \varphi(x)| > k|\chi(\xi) - \chi(x)|$$

whenever

$$|\chi(\xi) - \chi(x)| \leqq 1/n.$$

If $m_e\chi(E) > 0$, we can find a fixed n_0 such that this condition is satisfied for $n = n_0$ whenever x lies in a subset E_1 of E such that $m_e\chi(E_1) > 0$. We may also suppose that $-n_0 < \chi(a) < \chi(b) < n_0$. Let now ΣI_p be any open set containing $\varphi(E)$, composed of the non-overlapping intervals I_p. Let E_{pq} be the subset of E_1 composed of points satisfying:

$$\varphi(x) \text{ belongs to } I_p, \text{ and}$$

$$q/n_0 \leqq \chi(x) \leqq (q+1)/n_0.$$

If x, y are any two points of E_{pq} we have

$$mI_p \geqq |\varphi(x) - \varphi(y)| \geqq k|\chi(x) - \chi(y)|.$$

Hence $k \cdot m_e \chi(E_{pq}) \leqq m I_p$, and so, summing over the possible values of q, we have

$$m_e \chi(\sum_q E_{pq}) \leqq 2n^2 (m I_p)/k$$

and so

$$m_e \chi(E_1) \leqq 2n^2 (m \Sigma I_p)/k.$$

Since $m \Sigma I_p$ may be arbitrarily small, we must have $m \chi(E_1) = 0$, contrary to supposition.

Lemma 8. *If $\varphi(x)$ is VBG* on E and continuous at each point of E, and also $m \varphi(E) = 0$, then there exists an increasing function $\psi(x)$ such that $D(\varphi, x; \psi) = 0$ at each point of E.*

Let $\chi(x)$ be the function of lemma 6. By Theorem 1, $D(\varphi, x; \chi)$ exists, and is finite, at the points of E, except possibly for a set N such that $m \chi(N) = 0$. Let E_n be the sub-set of E consisting of points at which $|D(\varphi, x; \chi)| > 1/n$. By lemma 7, $m \chi(E_n) = 0$, and so $m \chi(\Sigma E_n) = 0$. Thus we see that E can be divided into three sets: a set G of points where $D(\varphi, x; \chi) = 0$; a set H, such that $m \chi(H) = 0$, of points at which $\chi(x)$ is continuous and all the derivates of φ with respect to χ are finite; and a set of points (x_n), at most enumerable, where $\chi(x)$ may be discontinuous or one of the derivates of φ not finite.

Let U_n be an open set containing $\chi(H)$ and such that $m U_n < 1/4^n$. Define $\psi_n(x) = m\{U_n[y \leqq \chi(x)]\}$, y being a variable describing the set U_n; $\psi_n(x)$ is clearly an increasing function, and it is easy to see that, since $\chi(x)$ is continuous at points of H, $D(\psi_n; x; \chi) = 1$ at each point of H. We note that $0 \leqq \psi_n(a) \leqq \psi_n(b) < 1\,4^n$. If now x_n is one of the enumerable set of points not in G or H, write

$$\begin{aligned} &\beta_n(x) = 0 && \text{if} \quad x < x_n, \\ &\beta_n(x) = 1/2^{n+1} && \text{if} \quad x = x_n, \\ &\beta_n(x) = 1/2^n && \text{if} \quad x > x_n. \end{aligned} \tag{13}$$

Finally write

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \psi_n(x) + \sum_{x_n} \beta_n(x) + \chi(x).$$

If x belongs to H, let K be the greatest modulus of the four derivates, $|D_{\pm}^{\pm}(\varphi, x; \chi)|$; then

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{h \to 0}} \left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{\psi(x+h) - \psi(x)} \right| &\leqq K \overline{\lim_{h \to 0}} \left| \frac{\chi(x+h) - \chi(x)}{\psi(x+h) - \psi(x)} \right| \\ &\leqq K \overline{\lim_{h \to 0}} \left| \frac{\chi(x+h) - \chi(x)}{2^n [\psi_n(x+h) - \psi_n(x)]} \right| \\ &\leqq K/2^n. \end{aligned}$$

It follows, n being arbitrary, that $D(\varphi, x; \psi) = 0$. The same holds at each point x_n, $\varphi(x)$ being continuous, owing to the presence of the terms $\beta_n(x)$; and at points of G owing to the presence of the term $\chi(x)$ in $\psi(x)$.

Theorem 10. $\int_a^x f(t)\,d\varphi(t)$ *exists and vanishes for all* x *such that* $a \leqq x \leqq b$, *if and only if* $f(x) = 0$ *except in a set* E, *such that* $\varphi(x)$ *is* VBG^* *on* E *and continuous at each point of* E, *and* $m\varphi(E) = 0$.

Suppose $\int_a^x f(t)\,d\varphi(t) = 0$ for $a \leqq x \leqq b$. By Theorem 7 the set E on which $f(x) \neq 0$ satisfies $m\varphi(E) = 0$; by the remark at the end of § 2. 1, $\varphi(x)$ must be continuous at each point of E; and by Theorem 9, $\varphi(x)$ is VBG^* on E.

Conversely, suppose the conditions satisfied; let $\psi(x)$ be the function of lemma 8 constructed for the set E. Given any $\varepsilon > 0$ and any x of E, we can find h_0 so small that

$$|f(x)| \cdot |\varphi(x+h) - \varphi(x)| \leqq \varepsilon |\psi(x+h) - \psi(x)| \quad \text{if} \quad |h| \leqq h_0.$$

Thus $\varepsilon\{\psi(x) - \psi(a)\}$ is a major function; similarly $-\varepsilon\{\psi(x) - \psi(a)\}$ is a minor function. It follows that $\int_a^x f(t)\,d\varphi(t) = 0$ for every x.

3. 2. Integration by Parts.

The theorem which we are about to give is in some ways less general than the corresponding result for the ordinary Stieltjes integral, for we restrict one function to be VBG^*. However, it includes the most important case of that result — namely, when $\varphi(x)$ is of bounded variation; for then we know that the Stieltjes integral exists only if $f(x)$ is continuous except at the points of a set N such that $m\varphi(N) = 0$.

Theorem 11. *If* $\varphi(x)$ *is bounded and* VBG^* *in* $\langle a, b\rangle$, *and* $f(x)$ *is bounded in* $\langle a, b\rangle$ *and continuous except at the points of a set* N, *such that* $m\varphi(N) = 0$ *and* $\varphi(x)$ *is continuous at each point of* N, *then*

$$\int_a^{-b} f(x)\,d\varphi(x) + \int_{-a}^{b} \varphi(x)\,df(x) = \varphi(b)f(b) - \varphi(a)f(a)$$

if either integral is finite.

Let $\chi(x)$ be a strictly increasing function such that the derivates of $\varphi(x)$ with respect to $\chi(x)$ are finite except perhaps at an enumerable set of points (lemma 6). Since $\varphi(x)$ is bounded, if we add to $\chi(x)$ a series of functions of the form $\beta_n(x)$, (13), we obtain a function $\chi_1(x)$ such that the derivates of $\varphi(x)$ with respect to χ_1 are finite everywhere.

Suppose now $\overline{\int_a^b} f(x)\,d\varphi(x) < \infty$ and let $M(x)$ be any major function for this integral. Let $\psi(x)$ be the function of lemma 8 such that $D(\varphi, x; \psi) = 0$ at each point of N. Take any $\varepsilon > 0$ and write

$$m_1(x) = \varphi(x) f(x) - M(x) - \varepsilon\{\psi(x) + \chi_1(x)\}.$$

For sufficiently small $h > 0$ we write

$$\begin{aligned} \delta m_1(x, h) &= \delta(\varphi f)(x, h) - \delta M(x, h) - \varepsilon\{\delta\psi(x, h) + \delta\chi_1(x, h)\} \\ &= \varphi(x)\cdot\delta f + \delta f\cdot\delta\varphi + f(x)\cdot\delta\varphi - \delta M - \varepsilon(\delta\psi + \delta\chi_1) \\ &\leqq \varphi(x)\,\delta f + \delta f\cdot\delta\varphi - \varepsilon(\delta\psi + \delta\chi_1). \end{aligned} \tag{14}$$

If $f(x)$ is continuous at x, we have for some K and sufficiently small $h > 0$, $|\delta\varphi| \leqq K\cdot\delta\chi_1$ and $|\delta f| < \varepsilon/K$; hence from (14)

$$\begin{aligned} \delta m_1(x, h) &\leqq \varphi(x)\cdot\delta f - \varepsilon\cdot\delta\psi \\ &\leqq \varphi(x)\cdot\delta f. \end{aligned}$$

If however x belongs to N, we have for sufficiently small $h > 0$, $|\delta\varphi| < \varepsilon\cdot\delta\psi/2R$, where R is the upper bound of $|f|$. Hence $|\delta f\cdot\delta\varphi| < \varepsilon\cdot\delta\psi$ and so again we have

$$\delta m_1(x, h) \leqq \varphi(x)\cdot\delta f(x, h).$$

From this and the corresponding inequality for $h < 0$ we see that $m_1(x) - m_1(a)$ is a minor function for $\underline{\int_a^b} \varphi(x)\,df(x)$. Thus we have, for any $M(x)$ and any $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} &\underline{\int_a^b} \varphi(x)\,df(x) \\ &\geqq \varphi(b) f(b) - \varphi(a) f(a) - M(b) - \varepsilon\{\psi(b) - \psi(a) + \chi_1(b) - \chi_1(a)\} \end{aligned}$$

and so

$$\underline{\int_a^b} \varphi(x)\,df(x) \geqq \varphi(b) f(b) - \varphi(a) f(a) - \overline{\int_a^b} f(x)\,d\,\varphi(x).$$

The converse inequality is similarly proved.

It may be remarked that the conditions of the theorem, while far from being necessary, are not so artificial as they might at first appear. In fact, it is possible to prove the following theorem: If $\varphi(x)$ is VBG^* in $\langle a, b\rangle$, and, for $a \leqq x \leqq b$,

$$\int_a^x f(t)\,d\,\varphi(t) + \int_a^x \varphi(t)\,df(t) = \varphi(x) f(x) - \varphi(a) f(a),$$

then $f(x)$ is continuous except at the points of a set N such that $m\,\varphi(N) = 0$.

3.3. Theorem 12. *If* $F(x) = \int_a^x f(t)\,d\varphi(t)$, *and* $\varphi(x)$ *is* VBG^* *on a set* E, *then* $F(x)$ *is* ACG^* *with respect to* $\varphi(x)$ *on* E.

By Theorem 9, $F(x)$ is VBG^* on E. It follows that we can divide E into an enumerable sequence of sets E_n, on each of which both $\varphi(x)$ and $F(x)$ are VB^*. We shall show that $F(x)$ is AC^* with respect to $\varphi(x)$ on each E_n.

Take any E_n and consider the closed set $E_n + E_n'$. If any of its black intervals (α, β) are such that $\varphi(x)$, and therefore $F(x)$, is constant in the closed interval $\langle\alpha, \beta\rangle$, we add them to $E_n + E_n'$, and thus obtain a closed set H (say), on which, as is easily seen, $F(x)$ and $\varphi(x)$ are VB^*. Given any $\varepsilon > 0$, choose a major function $M(x)$ such that $M(b) < F(b) + \varepsilon$. Since $M(x) - F(x)$ is monotone, $M(x)$ also is VB^* on H. Define $M_1(x)$ as equal to $M(x)$ on H and linear in the black intervals of H; similarly $\varphi_1(x)$ equal to $\varphi(x)$ on H and linear in the intervals. Then $M_1(x)$ and $\varphi_1(x)$ are of bounded variation; let $\Phi(x)$ be the total variation of $\varphi_1(t)$ in the interval $a \leqq t \leqq x$, and $\Psi(x)$ the total variation of $M_1(t)$. Enumerate the black intervals of H as (c_n, d_n), and the discontinuities of $M_1(x)$ as (x_n).

Choose N so large that

$$m_e\,\Psi[H(|f| < N)] > m\,\Psi(H) - \varepsilon, \tag{15}$$

$$\sum_{n>N} |\Psi(d_n) - \Psi(c_n)| < \varepsilon, \tag{16}$$

$$\sum_{n>N} |\Psi(x_n + 0) - \Psi(x_n - 0)| < \varepsilon. \tag{17}$$

Define R as max $[|f(x_1)|, |f(x_2)|, \ldots, |f(x_N)|, 1]$.

Take δ_1 as the least of

$$\omega(\varphi, \langle c_n, d_n\rangle), \text{ for } n \leqq N, \text{ and } \varepsilon/RN\ ^{20}). \tag{18}$$

Divide $\langle a, b\rangle$ by points $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = b$, such that

$$\sum_{n=1}^{p} |\varphi_1(t_n) - \varphi_1(t_{n-1})| > \Phi(b) - \delta_1. \tag{19}$$

It is clear that we may suppose the points t_n taken as points of H, so that $\varphi_1(t_n) = \varphi(t_n)$; also we may suppose $\omega(\varphi, \langle t_{n-1}, t_n\rangle) > 0$ (otherwise we could simply omit t_n from the set of dividing-points). Take δ as the least of

$$\tfrac{1}{2}\delta_1, \omega(\varphi, \langle t_{n-1}, t_n\rangle) \text{ for } n = 1, 2, \ldots, p. \tag{20}$$

---

20) By the construction of H, $\omega(\varphi, \langle c_n, d_n\rangle) > 0$ for each n.

Let (X_i, Y_i) be any finite system of non-overlapping intervals whose end-points lie in H. We shall show that if

$$\Sigma \omega(\varphi, \langle X_i, Y_i\rangle) < \delta, \tag{21}$$

then

$$\Sigma \{F(Y_i) - F(X_i)\} > -12\varepsilon.$$

We see from (20) and (21) that any interval (X_i, Y_i) can contain at most one of the points t_n. If it does contain one, replace it by the two intervals (X_i, t_n) and (t_n, Y_i). Number the whole set of intervals thus obtained as (ξ_i, η_i), $i = 1, 2, \ldots, m$ (say). Since each of the original intervals was divided into at most two parts, we have

$$\begin{aligned} \Sigma \omega(\varphi, \langle \xi_i, \eta_i\rangle) &\leqq 2\Sigma \omega(\varphi, \langle X_i, Y_i\rangle) \\ &< 2\delta \\ &< \delta_1. \end{aligned} \tag{22}$$

We see therefore, from (18), that the intervals (ξ_i, η_i) cannot contain any interval (c_n, d_n) for $n \leqq N$.

Let now H_N denote the sub-set of H composed of points where $|f(x)| < N$. We show that

$$\sum_i m_e \Psi(H_N \langle \xi_i, \eta_i\rangle) > \sum_i \{\Psi(\eta_i) - \Psi(\xi_i)\} - 8\varepsilon.$$

Since $\Psi(x)$ is an increasing function, we have from (15)

$$\sum_i m \Psi(H\langle \xi_i, \eta_i\rangle) - \sum_i m_e \Psi(H_N \langle \xi_i, \eta_i\rangle) \leqq m\Psi(H) - m_e \Psi(H_N) < \varepsilon. \tag{23}$$

Again, for each interval $\langle \xi_i, \eta_i\rangle$

$$\begin{aligned} m\Psi(H\langle \xi_i, \eta_i\rangle) &= \Psi(\eta_i) - \Psi(\xi_i) - \sum_{\xi_i \leqq x < \eta_i} \{\Psi x_n + 0) - \Psi(x_n)\} \\ &\quad - \sum_{\xi_i < x_n \leqq \eta_i} \{\Psi(x_n) - \Psi(x_n - 0)\} - \sum_{\xi_i \leqq c_n < d_n \leqq \eta_i} m\Psi(c_n, d_n) \\ &= \Psi(\eta_i) - \Psi(\xi_i) - A_i - B_i - C_i, \end{aligned} \tag{24}$$

say. To estimate the last term, we have at once from (16),

$$\begin{aligned} \sum_i C_i &\leqq \sum_{n>N} \{\Psi(d_n) - \Psi(c_n)\} \\ &< \varepsilon. \end{aligned} \tag{25}$$

To estimate the discontinuity terms, write $\omega_+(\varphi, x)$ for

$$\lim_{h \to +0} \omega(\varphi, \langle x, x+h\rangle)$$

(the discontinuity of $\varphi(x)$ on the right). For any set whatever (x_{n_j}) of discontinuities of $M_1(x)$, we have from (7), § 2. 1,

$$\begin{aligned} \omega_+(F, x_{n_j}) &= |f(x_{n_j})| \cdot \omega_+(\varphi, x_{n_j}) \\ &\leqq R\omega_+(\varphi, x_{n_j}) \text{ if } n_j \leqq N. \end{aligned}$$

Hence, remembering the definitions of $\Psi(x)$ and $M_1(x)$, we have

$$\begin{aligned}\sum_j \{\Psi(x_{n_j}+0) - \Psi(x_{n_j})\} &\leqq \sum_{n_j \leqq N} \omega_+(M_1, x_{n_j}) + \sum_{n>N} \omega_+\{\Psi, x_n\} \\ &\leqq \sum_{n_j \leqq N} \omega_+(M, x_{n_j}) + \varepsilon \\ &\leqq \sum_{n_j \leqq N} \omega_+(F, x_{n_j}) + 2\varepsilon \\ &\leqq \sum_{n_j \leqq N} R\,\omega_+(\varphi, x_{n_j}) + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

For each point x_n lying in any $\langle \xi_i, \eta_i)$, we have

$$\begin{aligned}\omega_+(\varphi, x_n) &\leqq \omega(\varphi, \langle \xi_i, \eta_i\rangle) \\ &< \delta_1 \\ &< \varepsilon/(RN).\end{aligned}$$

It follows that $\Sigma A_i \leqq N R\varepsilon/(RN) + 2\varepsilon \leqq 3\varepsilon$; similarly $\Sigma B_i \leqq 3\varepsilon$. Hence, combining this result with (24) and (25) we get

$$\sum_i m\,\Psi(H\langle \xi_i, \eta_i\rangle) \geqq \sum_i \{\Psi(\eta_i) - \Psi(\xi_i)\} - 3\varepsilon - 3\varepsilon - \varepsilon,$$

and so from (23)

$$\sum_i m_e\,\Psi(H_N\langle \xi_i, \eta_i\rangle) > \sum_i \{\Psi(\eta_i) - \Psi(\xi_i)\} - 8\varepsilon. \tag{26}$$

Now with each point x of $H_N\langle \xi_i, \eta_i)$ which is not an end-point of a black interval (c_n, d_n)[21], we can associate an interval $(x, x+h)$ such that $x+h$ lies in $H\langle \xi_i, \eta_i)$ and also

$$\begin{aligned}M_1(x+h) - M_1(x) &= M(x+h) - M(x) \\ &\geqq f(x)\{\varphi(x+h) - \varphi(x)\} \\ &\geqq -N|\varphi(x+h) - \varphi(x)|.\end{aligned} \tag{27}$$

By lemma 5, we can find a finite set of such intervals, not overlapping, say (λ_i, μ_i), $i = 1, 2, \ldots, k$, such that

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} \{\Psi(\mu_i) - \Psi(\lambda_i)\} &\geqq \sum_{i=1}^{k} m_e\,\Psi[H_N(\lambda_i, \mu_i)] \\ &> \sum_{i=1}^{m} m_e\,\Psi[H_N\langle \xi_i, \eta_i\rangle] - \varepsilon \\ &> \sum_{i=1}^{m} \{\Psi(\eta_i) - \Psi(\xi_i)\} - 9\varepsilon.\end{aligned} \tag{28}$$

Let the complementary intervals, which together with (λ_i, μ_i) make up the intervals (ξ_i, η_i), be enumerated as (l_i, m_i); then clearly from (28)

$$\Sigma\{\Psi(m_i) - \Psi(l_i)\} < 9\varepsilon,$$

---

[21]) The points which we omit form at most an enumerable set, and so do not affect the measure of $\Psi(H_N)$.

and so, since all the end-points belong to H,

$$\Sigma |M(m_i) - M(l_i)| < 9\varepsilon.$$

Hence, using (27), we have

$$(29) \qquad \sum_{i=1}^{m} \{M(\eta_i) - M(\xi_i)\} > \sum_{i=1}^{k} \{M(\mu_i) - M(\lambda_i)\} - 9\varepsilon$$

$$> -N \sum_{i=1}^{k} |\varphi(\mu_i) - \varphi(\lambda_i)| - 9\varepsilon.$$

Since no interval (ξ_i, η_i) includes, as an interior point, any of the division-points t_n, we see from (19) that

$$\sum_{i=1}^{k} |\varphi_1(\mu_i) - \varphi_1(\lambda_i)| \leqq \sum_{i=1}^{m} |\varphi_1(\eta_i) - \varphi_1(\xi_i)| + \delta_1$$

$$< 2\delta_1 \qquad \text{by (22)}$$

$$< 2\varepsilon/N \qquad \text{by (18).}$$

(All the points concerned belong to H, so that φ and φ_1 are interchangeable.) Thus we have from (29)

$$\sum_{i=1}^{m} \{M(\eta_i) - M(\xi_i)\} > -N(2\varepsilon/N) - 9\varepsilon$$

$$> -11\varepsilon,$$

and so finally

$$\sum_{i=1}^{m} \{F(\eta_i) - F(\xi_i)\} > -12\varepsilon,$$

that is,

$$\Sigma \{F(Y_i) - F(X_i)\} > -12\varepsilon.$$

A similar proof, using a minor function, establishes a similar inequality in the opposite sense (the value of δ may of course be different). Thus there exists $\delta_2 > 0$ such that, if $\Sigma\, \omega(\varphi, \langle X_i, Y_i \rangle) < \delta_2$, then

$$\sum_{F(Y_i) > F(X_i)} \{F(Y_i) - F(X_i)\} < 12\varepsilon,$$

and

$$\sum_{F(Y_i) < F(X_i)} \{F(Y_i) - F(X_i)\} > -12\varepsilon;$$

that is,

$$\Sigma |F(Y_i) - F(X_i)| < 24\varepsilon.$$

Thus $F(x)$ is AC with respect to $\varphi(x)$ on the closed set H. On the other hand, $F(x)$ is VB^* on H, and $\varphi(x)$ is not constant in any of the black intervals, taken closed, $\langle c_n, d_n \rangle$. It easily follows that $F(x)$ is AC^* with respect to $\varphi(x)$ on H, and so also on the smaller set E_n [22]). This completes the proof of the theorem.

---

[22]) The proof is exactly analogous to that for functions AC with respect to x. Saks, loc. cit. 162—164. Theorem 13.

3.4. Lemma 9. *If $\varphi(x)$ is VB^* on a set E such that $m\varphi(E) = 0$, and $F(x)$ is AC^* with respect to $\varphi(x)$ on E, then $mF(E) = 0$.*

Corollary. *If $\varphi(x)$ is VBG^* on E, $m\varphi(E) = 0$, and $F(x)$ is ACG^* with respect to $\varphi(x)$ on E, then $mF(E) = 0$.*

Consider the function $\chi(x)$ of lemma 2, formed with respect to the closed set $E + E'$. We remark that if I is any closed interval whose end-points lie in E, then

$$\omega(\varphi, I) \leqq \omega(\chi, I). \tag{30}$$

As in lemma 8, E may be divided into a set G of points where $D(\varphi, x; \chi) = 0$ and a set H such that $m\chi(H) = 0$ We deal with these sets separately, remarking first that, by the omission of an enumerable set of points[23]), we may suppose that no point of G or H is the left-hand end-point of a 'black interval' of E, and that $\chi(x)$ is continuous at each point of H.

Given $\varepsilon > 0$, we can find $\delta > 0$ such that for any set of closed non-overlapping intervals I_k, whose end-points lie in E, $\Sigma\omega(F, I_k) < \varepsilon$ whenever $\Sigma\omega(\varphi, I_k) < \delta$. With each point x of G, we can associate an interval $(x, x+h)$ such that $x+h$ belongs to E, and

$$\omega(\varphi, \langle x, x+h\rangle) \leqq \eta\{\chi(x+h) - \chi(x)\} \tag{31}$$

where $\eta < \delta/\{\chi(b) - \chi(a)\}$. By lemma 5, we can find a finite non-overlapping set of such intervals $(x_\nu, x_\nu + h_\nu)$ such that

$$\begin{aligned} m_e F(G) - \varepsilon &< \sum_\nu m_e F[G(x_\nu, x_\nu + h_\nu)] \\ &< \sum_\nu \omega[F; \langle x_\nu, x_\nu + h_\nu\rangle]. \end{aligned} \tag{32}$$

We have certainly $\sum_\nu \{\chi(x_\nu + h_\nu) - \chi(x_\nu)\} \leqq \chi(b) - \chi(a)$, and so from (31)

$$\begin{aligned} \sum_\nu \omega(\varphi, \langle x_\nu, x_\nu + h_\nu\rangle) &\leqq \eta\{\chi(b) - \chi(a)\} \\ &< \delta. \end{aligned}$$

Hence from (32) and the AC^* condition,

$$m_e F(G) - \varepsilon < \varepsilon. \tag{33}$$

Consider now the set H; we can enclose $\chi(H)$ in an open set U of measure less than δ. With each point of H, since we suppose $\chi(x)$ continuous, we can associate an interval $(x, x+h)$ such that $x+h$ belongs to E, and so small that the whole interval $\langle\chi(x), \chi(x+h)\rangle$ lies in U. We can now again pick out a finite set of such intervals such that

$$m_e F(H) - \varepsilon < \sum_\nu \omega[F; \langle x_\nu, x_\nu + h_\nu\rangle].$$

---

[23]) This clearly cannot alter the measure of $F(G)$ or $F(H)$.

By (30), since $\sum_{\nu} \{\chi(x_\nu + h_\nu) - \chi(x_\nu)\} \leqq m\,U < \delta$, we have $m_e F(H) - \varepsilon < \varepsilon$

From this and (33), since ε is arbitrary, we obtain the desired result

Theorem 13. *If $\varphi(x)$ is VBG^* in the interval $a \leqq x \leqq b$, and $F(x)$ is, with respect to $\varphi(x)$, both continuous and ACG^* in the interval, then*

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,d\varphi(t), \qquad a \leqq x \leqq b,$$

where $f(x)$ is defined as follows:

(i) *$f(x) = dF(x)/d\varphi(x)$ at points where this exists;*

(ii) *At any point x_0 where $\varphi(x)$ is discontinuous*[24]*, $f(x_0)$ is defined so as to make $F(x) - f(x_0)\,\varphi(x)$ continuous at x_0;*

(iii) *At the remaining points, $f(x) = 0$.*

Let N be the set of points at which $\varphi(x)$ is continuous and $dF/d\varphi$ does not exist. By Theorem 3, Corollary, $m\,\varphi(N) = 0$, and so, by lemma 9, Corollary, $m\,F(N) = 0$. By lemma 4, $F(x)$ is VBG^* in $\langle a, b\rangle$; we can therefore construct, as in lemma 8, an increasing function $\psi(x)$ such that $D(F, x; \psi) = 0$ at each point of N.

Let $\chi(x)$ be the function of lemma 6, such that the derivates of φ with respect to χ are finite except at an enumerable set of points. Enumerate these exceptional points and the points of discontinuity of $\varphi(x)$, together, as (x_n), $n = 1, 2, \ldots$. Take any $\varepsilon > 0$ and write

$$M(x) = F(x) + \varepsilon\,\{\psi(x) + \chi(x) + \sum_n \beta_n(x)\}$$

where $\beta_n(x)$ is defined as in (13). We say that $M(x) - M(a)$ is a major function of $f(x)$ with respect to $\varphi(x)$.

Consider first a point x where $dF/d\varphi$ exists and the derivates of φ with respect to χ are finite. There exists K such that, for sufficiently small h,

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| \leqq K\,|\chi(x+h) - \chi(x)|.$$

Since $dF/d\varphi = f(x)$, for sufficiently small $h > 0$ we have

$$\begin{aligned} |\delta F(x,h) - f(x)\cdot\delta\varphi(x,h)| &\leqq \varepsilon\cdot\omega(\varphi, \langle x, x+h\rangle)/(2K) \\ &\leqq \varepsilon\,\{\chi(x+h) - \chi(x)\} \end{aligned}$$

and so

$$\begin{aligned} f(x)\cdot\delta\varphi(x,h) &\leqq \delta F(x,h) + \varepsilon\cdot\delta\chi(x,h) \\ &\leqq \delta M(x,h). \end{aligned}$$

There is a similar inequality for $h < 0$. In the same way, the conditions for a major function are satisfied at the points of N, where $f(x) = 0$.

---

[24]) It is easy to see from lemma 6 that these points of discontinuity are enumerable. The required value of $f(x_0)$ must exist, since $F(x)$ is continuous with respect to $\varphi(x)$.

For since $D(F, x; \psi) = 0$, we have $\delta M \geqq \varepsilon \cdot \delta\psi + \delta F \geqq 0$ for sufficiently small $h > 0$. Finally, at any of those exceptional points x_n which does not lie in N, since $F(x) - f(x_n)\varphi(x)$ is continuous, the conditions are satisfied owing to the presence of the terms $\beta_n(x)$.

Since ε is arbitrarily small, we deduce that, for $a \leqq x \leqq b$,

$$\int_a^{-x} f(t)\, d\varphi(t) \leqq F(x) - F(a),$$

and in a similar way we can show that

$$\int_{-a}^{x} f(t)\, d\varphi(t) \geqq F(x) - F(a).$$

Theorem 14. *If $\varphi(x)$ is VBG* on a set E, and $F(x)$, $h(x)$ are any functions whatever, then*

$$\int_a^{-b} h(x)\, dF(x) = \int_a^{-b} \{h(x) f(x)\, d\varphi(x) + h(x) g(x)\, dF(x)\}$$

if either side is finite; where $f(x)$, $g(x)$ are defined thus: — at any point which belongs to E and where $dF(x)/d\varphi(x)$ is defined, we write $f(x) = dF(x)/d\varphi(x)$, $g(x) = 0$; at all other points, we write $f(x) = 0$, $g(x) = 1$.

Let $\chi(x)$ be an increasing function, as in lemma 6, such that the derivates of φ with respect to χ are finite at all points of E except an enumerable set. Suppose that $\int_a^{-b} h(x)\, dF(x) < \infty$, and let $M(x)$ be a major function for this integral. Let the points of E where the derivates of φ with respect to χ are not finite be enumerated as (x_n); define $\beta_n(x)$ as before and write, for any $\varepsilon > 0$,

$$M_1(x) = M(x) + \varepsilon\{\chi(x) + \sum_n \beta_n(x)\}.$$

Then $M_1(x) - M_1(a)$ is a major function for

$$\int_a^{-b} \{h(x) f(x)\, d\varphi(x) + h(x) g(x)\, dF(x)\}.$$

At points x where $f(x) = dF(x)/d\varphi(x)$ and the derivates of φ with respect to X are finite, we have for sufficiently small $\eta > 0$,

$$|\varphi(x+\eta) - \varphi(x)| \leqq K\{\chi(x+\eta) - \chi(x)\}$$

for some K,

$$\begin{aligned} |h(x)| \cdot |F(x+\eta) - F(x) - f(x)\{\varphi(x+\eta) - \varphi(x)\}| &\leqq \varepsilon \cdot \omega(\varphi, \langle x, x+\eta\rangle)/2K \\ &\leqq \varepsilon\{\chi(x+\eta) - \chi(x)\}, \\ M(x+\eta) - M(x) &\geqq h(x)\{F(x+\eta) - F(x)\}, \end{aligned}$$

and so, since $g(x) = 0$,

$$\begin{aligned} h(x) f(x) \{\varphi(x+\eta) - \varphi(x)\} + h(x) g(x) \{F(x+\eta) - F(x)\} \cdot \\ = h(x) f(x) \{\varphi(x+\eta) - \varphi(x)\} \\ \leqq h(x) \{F(x+\eta) - F(x)\} + \varepsilon \{\chi(x+\eta) - \chi(x)\} \\ \leqq M(x+\eta) - M(x) + \varepsilon \{\chi(x+\eta) - \chi(x)\} \\ \leqq M_1(x+\eta) - M_1(x). \end{aligned}$$

There is a similar inequality for $\eta < 0$. At points where $f(x) = 0$ and $g(x) = 1$ the conditions for a major function are obviously satisfied, and the remaining points (namely those points (x_n) where $dF(x)/d\varphi(x)$ exists and therefore $F(x)$ is continuous with respect to $\varphi(x)$) are easily seen to be covered by the terms $\beta_n(x)$. Thus $M_1(x) - M_1(a)$ is a major function. Since $M(x)$ was any major function for $\int_a^{-b} h(x)\, dF(x)$ and ε was arbitrary, we have

$$\int_a^{-b} \{h(x) f(x)\, d\varphi(x) + h(x) g(x)\, dF(x)\} \leqq \int_a^{-b} h(x)\, dF(x).$$

The reverse inequality is similarly proved.

Corollary. *If both $F(x)$ and $\varphi(x)$ are VBG^* in $\langle a, b\rangle$, then there exists a set E such that $m\varphi(E) = 0$, $dF(x)/d\varphi(x)$ exists at every point of comp (E) and at no point of E, and for any $h(x)$*

$$\int_a^{-b} h(x)\, dF(x) = \int_a^{-b} \{h(x) f(x)\, d\varphi(x) + h(x) g(x)\, dF(x)\},$$

where $f(x) = dF(x)/d\varphi(x)$ where it exists and $f(x) = 0$ on E, $g(x) = 0$ on comp (E) and $g(x) = 1$ on E.

(Eingegangen am 19. März 1936.)

Lineare Transformationen beschränkter integrierbarer Funktionen.

(Erste Mitteilung.)

Von

Hermann Raff in Tübingen.

Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit beschäftige ich mich mit Transformationen, die in der Hauptsache von der Gestalt

$$g(y) = \int_0^\tau \varphi(t,y)\, f(t)\, dt \tag{1}$$

sind. Die Vermittlungsfunktion $\varphi(t,y)$ ist hierbei eine gegebene, für $0 \leqq t < \tau$ $(\tau \leqq +\infty)$ und die unendliche Menge $\mathfrak{Y}$ definierte Funktion, und zur Transformation sind zunächst diejenigen $f(t)$ zugelassen, die bei jedem $0 < t_1 < \tau$ auf $\langle 0, t_1\rangle$ beschränkt sind und für die $g(y)$ auf $\mathfrak{Y}$ existiert.

Man sagt, $f(t)$ sei mittels $\varphi(t,y)$ zum Werte a limitierbar, falls das entsprechende $g(y)$ auf $\mathfrak{Y}$ existiert und für $y \to \eta$ gegen a strebt, wo η ein gegebener Häufungspunkt von $\mathfrak{Y}$ ist. Den eben genannten Prozeß der Zuordnung des Wertes a zur Funktion $f(t)$ bezeichnet man als Limitierungsverfahren.

Im wesentlichen ist (1) die Form, aus der K. Knopp die meisten der heute gebräuchlichen Limitierungsverfahren durch Spezialisierung gewinnt und für die er einen allgemeinen Permanenzsatz beweist, der eine Anzahl der entsprechenden speziellen Permanenzsätze als Sonderfälle umfaßt[1]). Dieser Satz lautet:

Die Transformation (1) *ist sicher regulär (d. h. für jedes zur Transformation zugelassene* $f(t)$*, für das* $\lim_{t \to \tau - 0} f(t)$ *existiert, existiert auch*

[1]) K. Knopp, Zur Theorie der Limitierungsverfahren. Erste Mitteilung. Math. Zeitschr. 31 (1929), S. 97—127, bes. S. 100 ff. — Eine ähnliche Behauptung ist ohne die wichtige Voraussetzung der Existenz des in (1) genannten Integrals durch J. Rey Pastor wiederholt aufgestellt und unter tatsächlicher Voraussetzung dieser Existenz bewiesen worden; vgl. „Un algoritmo general de convergencia", Revista Matem. Hisp.-Amer. Ser. 2, 4 (1929), S. 273—286 und „Teoría de los algoritmos lineales de convergencia y de sumación", Trabajos del Seminario Mat. Argentino 5 (1931), S. 24 ff.

$\lim_{y \to \eta \text{ auf } \mathfrak{Y}} g(y)$ *und ist gleich* $\lim_{t \to \tau - 0} f(t)$*), wenn* $\varphi(t, y)$ *den folgenden drei Bedingungen genügt:*

1. *Für jedes* y *von* $\mathfrak{Y}$ *existiert*

$$\Phi(y) = \int_0^\tau \varphi(t, y)\, dt,$$

und $\Phi(y)$ *strebt gegen* 1 *für* $y \to \eta$ *auf* $\mathfrak{Y}$.

2. *Für je zwei feste Werte* t_1 *und* t_2 *von* $\langle 0, \tau)$ *existiert*

$$\int_{t_1}^{t_2} |\varphi(t, y)|\, dt$$

und strebt gegen 0 *für* $y \to \eta$ *auf* $\mathfrak{Y}$.

3. *Es gibt eine positive Zahl* M*, so daß für alle hinreichend nahe an* η *gelegenen* y *von* $\mathfrak{Y}$

$$\int_0^\tau |\varphi(t, y)|\, dt \leqq M$$

bleibt.

Die Bedingung 2 ist jedoch für die Regularität von Transformationen der Form (1) nicht notwendig. Denn offensichtlich genügt

$$\varphi(t, y) = \begin{cases} \sin ty & \text{für } y \geqq 1 \text{ und } 0 \leqq t \leqq 1 \\ 1 & \text{für } y \geqq 1 \text{ und } y < t \leqq y + 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

der Bedingung 2 nicht, da $\lim_{y \to \infty} \int_0^1 |\varphi(t, y)|\, dt = \frac{2}{\pi}$ ist; für jedes beschränkte $f(t)$, das für $t \to \infty$ gegen a strebt und für das $g(y)$ existiert, gilt dagegen $\lim_{y \to \infty} g(y) = a$, wie ohne Schwierigkeit direkt gezeigt werden kann und wie in dem viel weiter reichenden Satz VII der vorliegenden Arbeit enthalten sein wird.

Wegen der Fruchtbarkeit des Satzes von Toeplitz und Schur[2]), der notwendige und hinreichende Bedingungen für die Regularität von Matrizenverfahren nennt, ist aber schon öfters versucht worden, ein System von Bedingungen zu geben, das für die Regularität von Transformationen

---

[2]) O. Toeplitz, Über lineare Mittelbildungen, Prace mat.-fiz. **22** (1911), S. 113—119. — I. Schur, Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **151** (1921), S. 79—111.

der Form (1) zugleich notwendig und hinreichend ist[3]). Doch ist dies bisher nur unter mehr oder minder einschränkenden Voraussetzungen über die Vermittlungsfunktion gelungen, und so wird diese Frage in der vorliegenden Arbeit aufs Neue aufgegriffen.

Da (1) bei verhältnismäßig einfachen Vermittlungsfunktionen, z. B. bei

$$\varphi(t, y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{für } y \geqq 1 \text{ und } 0 \leqq t \leqq y \\ 0 & \text{für } 1 \leqq y < t \end{cases}$$

nur dann existiert, wenn $f(t)$ für jedes $0 < t_1 < \tau$ über $\langle 0, t_1 \rangle$ integrierbar ist, und da zu jedem den Bedingungen 1 bis 3 genügenden $\varphi(t, y)$ ein beschränktes (nichtintegrierbares), für $t \to \tau$ stetiges $f(t)$ derart gefunden werden kann, daß das zugehörige $g(y)$ für unendlich viele, sich in η häufende Werte von $\mathfrak{Y}$ nicht existiert, sollen in gewisser Einschränkung des bisherigen zur Transformation nur diejenigen Funktionen $f(t)$ zugelassen sein, die auf $\langle 0, \tau \rangle$ beschränkt und bei jedem $0 < t_1 < \tau$ über $\langle 0, t_1 \rangle$ integrierbar sind.

Auf dieser Grundlage wird im folgenden, ohne daß von vornherein Einschränkungen über $\varphi(t, y)$ gemacht werden, die oben aufgeworfene Frage nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Regularität der Transformation (1) beantwortet. Der zu beweisende Satz wird die angedeuteten Sätze von Toeplitz, Schur, Kojima, Silverman und Hahn in vollem Umfang, den Knoppschen Satz unter der eben eingeführten Voraussetzung über $f(t)$ enthalten.

Um den Beweis gedanklich durchsichtig zu gestalten und um das Problem in etwas weiterem Umfang lösen zu können, soll stufenweise vorgegangen werden. § 1 bringt einige Definitionen und Hilfssätze. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von $g(y)$ wird in § 2, eine solche für die Beschränktheit von $g(y)$ wird in § 3 gegeben. § 4 enthält notwendige und hinreichende Bedingungen für die Konvergenz von $g(y)$, falls $y \to \eta$ strebt. In § 5 wird der Begriff der I-Grenzfunktion eingeführt, der den Grenzwert von $g(y)$ in vielen Fällen anzugeben gestattet, falls dessen Existenz unter den in § 4 genannten Bedingungen

---

[3]) L. L. Silverman, On the notion of summability for the limit of a continuous Variable, Transactions of the Amer. Math. Soc. 17 (1916), S. 284—294. — T. Kojima, Theorems on convergent integrals, Tôhoku Math. Journal 14 (1918), S. 64—79. — H. Hahn, Über Folgen linearer Operationen, Monatshefte f. Math. u. Phys. 32 (1922), S. 3—88, bes. S. 38 ff. — Zu den entsprechenden Angaben von J. Rey Pastor in seiner letztgenannten Arbeit und in „Aplicaciones de los algoritmos de convergencia y de sumación", Rendiconti del Seminario Mat. e Fis. di Milano 7 (1934), S. 191—222, bes. S. 195 vgl. die Referate dieser Arbeiten im Jahrbuch über die Fortschritte der Math. (57^{I} S. 255 f., 59^{II} S. 967 ff.).

gesichert ist. Durch Kombination dieser Sätze erhält man in § 6 notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß die Transformation (1) konvergenzerzeugend, daß sie konvergenzerhaltend und daß sie regulär ist[4]).

In einer zweiten Mitteilung werde ich einige Anwendungen dieser Sätze geben. Aus Satz 4 folgt z. B. das Riemann-Lebesguesche Lemma: Für jede über das beschränkte oder unbeschränkte Intervall a, b absolut integrierbare Funktion $f(t)$ ist $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_a^b f(t)\, e^{\mathrm{int}}\, dt = 0$. Und aus Satz VII ergibt sich, daß die Fourierreihe einer stetigen Funktion $f(t)$ nicht zu konvergieren braucht, daß sie jedoch in t_0 C_1-summierbar zum Werte $f(t_0)$ ist. Vor allem aber soll Aufschluß über die Lage der Häufungspunkte von $g(y)$ gesucht werden, wenn $\varphi(t, y)$ die fest vorgegebene Vermittlungsfunktion einer regulären Transformation und $f(t)$ eine für $t \to \tau$ unstetige Funktion der oben zur Transformation zugelassenen Art ist. Dabei wird ein Satz mit notwendigen und hinreichenden Bedingungen über die Lagebeziehungen des Kerns von $f(t)$ und des Kerns von $g(y)$ gewonnen, der den Knoppschen Kernsatz[5]) unter den vorgenannten Einschränkungen über $f(t)$ enthält.

§ 1.

Einige vorbereitende Bemerkungen und Hilfssätze.

Unter Mengen $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \ldots$ sind mit einer später genannten Ausnahme stets lineare meßbare Mengen zu verstehen. Soweit nicht ausdrücklich anders vermerkt ist, bleibt es dem Leser überlassen, ob er in diesen Mengen jeweils *R-meßbare* (im Riemannschen Sinn meßbare) oder *L-meßbare* (im Lebesgueschen Sinn meßbare) Mengen sehen will; nur hat er den einmal gewählten Inhaltsbegriff festzuhalten und in Verbindung mit dem entsprechenden Integralbegriff zu verwenden. $|\mathfrak{M}|$ bedeute je nach dem anzuwendenden Inhaltsbegriff den *R-Inhalt* oder den *L-Inhalt* von $\mathfrak{M}$. Als *Nullmenge* wird jede Menge vom Inhalt 0 bezeichnet.

Alle in der vorliegenden Arbeit auftretenden Funktionen $f(t), \varphi(t), \ldots$ sind als eindeutige, auf $\mathfrak{M}$ definierte komplexe Funktionen vorausgesetzt, falls nichts anderes gesagt ist. Es wird als bekannt angesehen, wann $\varphi(t)$

[4]) Die Frage, wann eine Transformation konvergenzerzeugend und wann sie konvergenzerhaltend ist, hat Schur a. a. O. für Matrizentransformationen, Kojima a. a. O. für gewisse Integraltransformationen durch Angabe eines Systems von notwendigen und hinreichenden Bedingungen beantwortet.

[5]) Knopp, a. a. O., S. 113 ff.

{ *eigentlich R-integrierbar* / *im Lebesgueschen Sinn summierbar* } über $\mathfrak{M}$ heißt[6]). Hierbei ist das Riemannsche oder R-Integral über R-meßbare Mengen analog zu definieren[7]), wie das Lebesguesche oder L-Integral beschränkter Funktionen über L-meßbare Mengen festgelegt ist.

Im folgenden sollen aber in sofort zu nennendem Umfang nicht nur { eigentlich R-integrierbare / im Lebesgueschen Sinn summierbare } Funktionen verwendet werden.

Die Funktion $\varphi(t)$ heiße in dem nicht notwendig zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Punkt t_0 *regulär auf* $\mathfrak{M}$, falls $\varphi(t)$ bei irgend einem offenen, den Wert t_0 überdeckenden Intervall $\mathfrak{i}$ über $\mathfrak{i}\,\mathfrak{M}$ { eigentlich R-integrierbar / im Lebesgueschen Sinn summierbar } ist; sie heiße in t_0 *singulär auf* $\mathfrak{M}$, falls sie in t_0 nicht regulär auf $\mathfrak{M}$ ist. Die Menge der singulären Stellen von $\varphi(t)$ auf $\mathfrak{M}$ ist stets abgeschlossen; sie wird fortan mit $\mathfrak{S}(\varphi(t)), \mathfrak{M})$ oder kurz mit $\mathfrak{S}$ bezeichnet.

Nach der im Grundgedanken von Cauchy[8]) herrührenden, von Harnack[9]) erweiterten Definition gewinnt man jetzt ein *uneigentliches Integral*, das *Harnacksche Integral*, wie folgt:

$\mathfrak{M}$ sei beschränkt, und $\mathfrak{S}(\varphi(t), \mathfrak{M})$ habe den R-Inhalt 0[10]). Man überdecke $\mathfrak{S}$ mit einer aus endlich vielen offenen Intervallen bestehenden Menge $\mathfrak{E}$ von beliebig klein vorgegebenem Inhalt $\delta > 0$. $\varphi(t)$ ist dann { eigentlich R-integrierbar / im Lebesgueschen Sinn summierbar } über $\mathfrak{B} = \mathfrak{M} - \mathfrak{E}\,\mathfrak{M}$. Wenn nun $\int_{\mathfrak{B}} \varphi(t)\,dt$ bei jeder nach obigem möglichen Wahl von $\mathfrak{E}$ existiert und wenn stets

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\mathfrak{B}} \varphi(t)\,dt \tag{2}$$

---

[6]) Dabei ist zugelassen, daß $\varphi(t)$ in einer Nullmenge $\mathfrak{T}$ aus $\mathfrak{M}$ unendliche Funktionswerte besitzt. Solche Nullmengen sollen auf die Integrierbarkeit von $\varphi(t)$ keinen Einfluß haben, und es soll

$$\int_{\mathfrak{M}} \varphi(t)\,dt = \int_{\mathfrak{M}-\mathfrak{T}} \varphi(t)\,dt$$

sein. Dementsprechend werden solche Nullmengen überhaupt nicht mehr erwähnt.

[7]) Eine solche Definition findet sich z. B. bei C. Jordan, Cours d'analyse. 3 éd. 1 (1909), S. 32 f.

[8]) A. L. Cauchy, Oeuvres. Ser. 2, tome 4, S. 140—150.

[9]) A. Harnack, Anwendung der Fourierschen Reihe auf die Theorie der Function einer complexen Veränderlichen [Math. Annalen 21 (1883), S. 305—326, bes. S. 324 ff.].

[10]) Für die L-Begriffe könnte man in dieser Forderung einen „Schönheitsfehler" sehen und versuchen, $\mathfrak{S}[\varphi(t), \mathfrak{M}]$ als L-meßbare Menge des Inhalts 0 vorauszusetzen. In diesem Fall läßt sich $\mathfrak{S}$ mit einer abzählbaren Menge offener Intervalle von beliebig klein vorgegebenem Gesamtinhalt $\delta > 0$ überdecken. Nach dem Borelschen Überdeckungssatz genügen dann endlich viele dieser Intervalle zur Überdeckung der abgeschlossenen Menge $\mathfrak{S}$, d. h. $\mathfrak{S}$ hat den R-Inhalt 0.

existiert, heißt $\varphi(t)$ über $\mathfrak{M}$ integrierbar (soweit nötig, uneigentlich integrierbar), und man weist dem Symbol $\int_{\mathfrak{M}} \varphi(t)\,dt$ den in (2) sich eindeutig ergebenden Wert zu.

Nach bekanntem, ebenfalls auf Cauchy[8]) zurückgehendem Vorbild heißt $\varphi(t)$ über unbeschränktes $\mathfrak{M}$ integrierbar, falls $\varphi(t)$ für jedes beschränkte Intervall $\mathfrak{i}$[11]) im eben genannten Sinn über $\mathfrak{i}\,\mathfrak{M}$ integrierbar ist und falls für jede Folge von Intervallen $\mathfrak{i}$ derart, daß die linken Endpunkte der $\mathfrak{i}$ gegen $-\infty$, die rechten gegen $+\infty$ streben,

$$\lim_{\mathfrak{i}} \int_{\mathfrak{i}\,\mathfrak{M}} \varphi(t)\,dt \tag{3}$$

existiert. Dem Symbol $\int_{\mathfrak{M}} \varphi(t)\,dt$ wird der in (3) sich eindeutig ergebende Wert zugewiesen.

Im nachstehenden wird dieser Integralbegriff überall verwendet, wo nicht ausdrücklich ein anderes Integral vorausgesetzt ist. Dabei heißt $\varphi(t)$ über $\mathfrak{M}$ *absolut integrierbar*, falls $\varphi(t)$ und $|\varphi(t)|$ über $\mathfrak{M}$ integrierbar sind, und $\varphi(t)$ heißt über $\mathfrak{M}$ *bedingt integrierbar*, falls zwar $\varphi(t)$, nicht aber $|\varphi(t)|$ über $\mathfrak{M}$ integrierbar ist[12]).

Unter der *Funktionenklasse B über* $\mathfrak{M}$ verstehe man die Menge der auf $\mathfrak{M}$ beschränkten, bei jedem $\mathfrak{i}$ über $\mathfrak{i}\,\mathfrak{M}$ (eigentlich) integrierbaren Funktionen $f(t)$, unter der *Funktionenklasse* B_1 *über* $\mathfrak{M}$ die Menge der zur Klasse B über $\mathfrak{M}$ gehörigen Funktionen $f(t)$, für die $|f(t)| \leqq 1$ ist.

Nun läßt sich zeigen

Hilfssatz 1. *Wenn $\varphi(t)$ absolut integrierbar ist*[13]) *und $f(t)$ zur Klasse B gehört, ist $\varphi(t)\,f(t)$ absolut integrierbar*[14]).

---

[11]) Kleine Frakturbuchstaben bedeuten in der vorliegenden Arbeit stets lineare Intervalle, und zwar bleibt der Buchstabe $\mathfrak{i}$ für beschränkte Intervalle vorbehalten.

[12]) Für die L-Begriffe folgt aus dieser Definition, daß jedes L-summierbare $f(t)$ auch absolut integrierbar ist und umgekehrt. — Die folgenden Untersuchungen lassen sich parallel für das „Cauchy-Dirichletsche Integral" (vgl. hierzu Encyklopädie der mathemat. Wissensch. II C, S. 1052), sowie für gewisse Kombinationen des Harnackschen und des Cauchy-Dirichletschen Integrals gestalten. Im Interesse einer möglichst kurzen Darstellung wird auf die Verfolgung dieser Parallelität verzichtet; eine wesentliche Einschränkung der Resultate bedeutet dies nicht, da die absolute Integrierbarkeit der später verwendeten Funktionen $\varphi(t, y)$ für die Richtigkeit der zu nennenden Sätze notwendig ist, von welcher dieser Definitionen man auch ausgeht.

[13]) Der Kürze wegen und weil keine Verwechslungen zu befürchten sind, bleibt fortan der Zusatz „über $\mathfrak{M}$" weg, wenn es sich um Integration über $\mathfrak{M}$ handelt.

[14]) Wie der Wert von $\varphi(t)\,f(t)$ für $\varphi(t) = \infty$ und $f(t) = \infty$ festgelegt wird, hat im angegebenen Fall auf Integrierbarkeit und Integralwert keinen Einfluß.

Auf den einfachen Beweis wird verzichtet.

Hilfssatz 2. *$\varphi(t)$ sei absolut integrierbar. Zu beliebig klein gewähltem $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $f(t)$ der Klasse B_1, so daß $\varphi(t) f(t)$ absolut integrierbar und*

$$\left| \int_{\mathfrak{M}} (|\varphi(t)| - \varphi(t) f(t))\, dt \right| < \varepsilon \tag{4}$$

ist[15]).

Beweis: Wegen der absoluten Integrierbarkeit von $\varphi(t)$ kann ein $\mathfrak{i}$ und eine den Durchschnitt $\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{S}(\varphi, \mathfrak{M})$ überdeckende, aus endlich vielen offenen Intervallen bestehende Menge $\mathfrak{E}$ gefunden werden, so daß für $\mathfrak{A} = \mathfrak{M} - \mathfrak{i}\,\mathfrak{M} + \mathfrak{E}\,\mathfrak{M}$

$$\int_{\mathfrak{A}} |\varphi(t)|\, dt < \frac{\varepsilon}{4} \tag{5}$$

ist. $\varphi(t)$ ist $\left\{ \begin{array}{c} \text{eigentlich } R\text{-integrierbar} \\ \text{im Lebesgueschen Sinn summierbar} \end{array} \right\}$ über $\mathfrak{M} - \mathfrak{A}$. Demnach gibt es eine Teilmenge $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{M} - \mathfrak{A}$ und ein $\vartheta > 0$, so daß $\frac{1}{\vartheta} \geqq |\varphi(t)| \geqq \vartheta$ auf $\mathfrak{N}$ ist und für $\mathfrak{B} = \mathfrak{M} - \mathfrak{A} - \mathfrak{N}$

$$\int_{\mathfrak{B}} |\varphi(t)|\, dt < \frac{\varepsilon}{4} \tag{6}$$

gilt. Nach bekannten Sätzen der Integralrechnung gehört

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\overline{\varphi(t)}}{|\varphi(t)|} & \text{für } t \text{ von } \mathfrak{N} \\ 1 & \text{für } t \text{ von } \mathfrak{M} - \mathfrak{N} \end{cases} \tag{7}$$

zur Klasse B_1; wegen Hilfssatz 1 ist $\varphi(t) f(t)$ absolut integrierbar, und weil $\mathfrak{M} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{N}$ ist und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{N}$ paarweise fremd sind, folgt aus (5) bis (7) die Beziehung (4), w. z. b. w.

$\mathfrak{Y}$ bedeute im folgenden eine beliebige, aber feste Menge komplexer Zahlen, η einen festen, endlichen oder unendlichen Häufungspunkt von $\mathfrak{Y}$, $\varphi(t, y)$ eine für jedes t von $\mathfrak{M}$ und jedes y von $\mathfrak{Y}$ unter Zulassung unendlicher Werte definierte eindeutige komplexe Funktion, $f(t)$ in Übereinstimmung mit dem in der Einleitung Ausgeführten eine Funktion der Klasse B. Wenn nun

$$g(y) = \int_{\mathfrak{M}} \varphi(t, y) f(t)\, dt \tag{I}$$

---

[15]) Bei Transformationen, die den in der vorliegenden Arbeit untersuchten ähnlich sind, hat Silverman, a. a. O. S. 287, Voraussetzungen über die Nullstellen der später verwendeten Funktionen $\varphi(t, y)$ getroffen und Kojima, a. a. O., die gleichmäßige Stetigkeit von $\varphi(t, y)$ in t vorausgesetzt. Der einfache Hilfssatz 2 macht solche Voraussetzungen überflüssig.

in einer Umgebung von η auf $\mathfrak{Y}$ existiert[16]*), heißt $g(y)$ die φ-Transformierte von $f(t)$. In den nachstehenden Paragraphen wird $g(y)$ stets solche φ-Transformationen bedeuten.*

Bei beliebigem, aber festem endlichen oder unendlichen Häufungspunkt τ von $\mathfrak{M}$ bezeichne man als *Klasse C_τ über $\mathfrak{M}$* die Menge der Funktionen der Klasse B_1 über $\mathfrak{M}$, die für $t \to \tau$ gegen 0 streben.

Dann gilt für jedes solche τ

Hilfssatz 3. *Wenn $\varphi(t)$ nur bedingt integrierbar ist, gibt es ein $f(t)$ der Klasse C_τ über $\mathfrak{M}$, so daß $\varphi(t) f(t)$ nicht integrierbar ist.*

Beweis: Man erkennt leicht, daß es in diesem Fall einen endlichen oder unendlichen Häufungspunkt t_0 von $\mathfrak{M}$ der folgenden Eigenschaft gibt: Für jedes den Wert t_0 überdeckende offene Intervall $\mathfrak{j}$[17]) ist $\varphi(t)$ über $\mathfrak{j}\mathfrak{M}$ nur bedingt integrierbar. $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{j}_{\nu x}$ werden im folgenden Beweise stets solche offene, den Wert t_0 überdeckende Intervalle bezeichnen.

Jetzt läßt sich ein $\mathfrak{j}_{02}$ und eine Folge von Intervallpaaren $\mathfrak{j}_{\nu 1}$ und $\mathfrak{j}_{\nu 2}$ so bestimmen, daß, wenn $t_0 \neq \tau$ ist, τ weder innerer noch Randpunkt von $\mathfrak{j}_{02}$ ist, daß weiter

$$\mathfrak{j}_{\nu 2} \text{ in } \mathfrak{j}_{\nu 1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{j}_{\nu 1} \text{ in } \mathfrak{j}_{\nu-1,2}$$

liegt, sowie für eine Teilmenge $\mathfrak{N}_\nu$ von $(\mathfrak{j}_\nu - \mathfrak{j}_{\nu+1})\mathfrak{M}$.

$$\int_{\mathfrak{N}_\nu} |\varphi(t)|\, dt$$

existiert und $> \nu \cdot 10^\nu + 1$ ist.

Nach Hilfssatz 2 gibt es dann ein $f_\nu(t)$ der Klasse B_1 über $\mathfrak{N}_\nu$, so daß

$$\int_{\mathfrak{N}_\nu} \varphi(t) f_\nu(t)\, dt$$

existiert und

$$\left| \int_{\mathfrak{N}_\nu} \varphi(t) f_\nu(t)\, dt \right| > \nu \cdot 10^\nu \tag{8}$$

---

[16]) Unter der δ-Umgebung von η wird die Teilmenge von $\mathfrak{Y}$ verstanden, die in $0 < |y - \eta| < \delta$ bzw. $|y| > \frac{1}{\delta}$ liegt, je nachdem η ein endlicher oder unendlicher Punkt ist. Es sei noch darauf hingewiesen, daß die „δ-Umgebung von η" auch anders erklärt werden kann, so daß die folgenden Sätze auch dann gelten, wenn y auf einer Hauptrichtung gegen η strebt. Zum Begriff der Hauptrichtung vgl. E. Steinitz, Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme, Journal f. d. reine und angewandte Mathematik **144** (1914), bes. S. 30 ff.

[17]) Falls $t_0 = \infty$ ist, bedeute $\mathfrak{j}$ Intervalle der Form $a < \frac{1}{t} < b$ mit $a\,b < 0$.

st. Somit gehört die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} \frac{f_\nu(t)}{\nu} & \text{für } t \text{ von } \mathfrak{N}_\nu \text{ und } \nu = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{für } t \text{ von } \mathfrak{M} - (\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 + \ldots) \end{cases}$$

zur Klasse C_τ, ob $\tau = t_0$ ist oder nicht. Wegen (8) divergiert aber

$$\int_{\mathfrak{M}} \varphi(t) f(t)\, dt,$$

w. z. b. w.

§ 2.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von $g(y)$.

Satz 1. *Die absolute Integrierbarkeit von $\varphi(t, y)$ für jedes y einer Umgebung von η ist notwendig und hinreichend dafür, daß für jedes $f(t)$ die Klasse B das zugehörige $g(y)$ in einer Umgebung von η existiert*[18]).

Beweis: Daß die Bedingung *hinreichend* ist, folgt aus Hilfssatz 1.

Daß mindestens die *gewöhnliche Integrierbarkeit* von $\varphi(t, y)$ im behaupteten Umfang *notwendig* ist, ergibt sich durch Transformation der Funktion $f(t) \equiv 1$[19]).

Die *Notwendigkeit der absoluten Integrierbarkeit* von $\varphi(t, y)$ aber wird dargetan, indem zu jedem integrierbaren $\varphi(t, y)$, das für die Glieder einer gegen η strebenden Punktfolge (y_μ) aus $\mathfrak{Y}$ nur bedingt integrierbar ist, ein $f(t)$ der Klasse B konstruiert wird, so daß das zugehörige $g(y)$ für eine unendliche Teilfolge von (y_μ) nicht existiert.

Wegen der in § 6 gemachten Anwendungen soll dieser Teil von Satz 1 in etwas verschärfter Form bewiesen werden.

Behauptung A. *$\varphi(t, y)$ sei für die Glieder einer in η sich häufenden Punktfolge (y_μ) aus $\mathfrak{Y}$ nur bedingt (und nicht absolut) integrierbar, τ ein beliebiger, aber fester endlicher oder unendlicher Häufungspunkt von $\mathfrak{M}$. Dann gibt es ein $f(t)$ der Klasse C_τ über $\mathfrak{M}$, so daß das zugehörige $g(y)$ für eine unendliche Teilfolge von (y_μ) nicht existiert.*

Unter den Voraussetzungen über $\varphi(t, y)$ und (y_μ) gibt es wie beim Beweise von Hilfssatz 3 einen Häufungspunkt t_0 von $\mathfrak{M}$ der folgenden Eigenschaft: Bei jedem den Wert t_0 überdeckenden offenen Intervall $\mathfrak{j}$ ist $\varphi(t, y)$ für eine unendliche Teilfolge aus (y_μ) über $\mathfrak{j}\mathfrak{M}$ nur bedingt integrierbar.

---

[18]) Die beiden Umgebungen brauchen nicht gleich zu sein.

[19]) Zusammen mit Hilfssatz 3 ist damit schon bewiesen: Die absolute Integrierbarkeit von $\varphi(t, y)$ für jedes y von $\mathfrak{Y}$ ist notwendig und hinreichend dafür, daß für jedes $f(t)$ der Klasse B (der Klasse C_τ) das zugehörige $g(y)$ auf $\mathfrak{Y}$ existiert.

Man bestimme jetzt eine Folge solcher $\mathfrak{j}_\varkappa$ derart, daß, wenn $t_0 \neq \tau$ ist, τ weder innerer noch Randpunkt von $\mathfrak{j}_1$ ist, daß $\mathfrak{j}_{\varkappa+1}$ in $\mathfrak{j}_\varkappa$ liegt und daß t_0 der Durchschnitt dieser $\mathfrak{j}_\varkappa$ ist. Die abzählbare Menge derjenigen Glieder von (y_μ), für die $\varphi(t, y)$ über $\mathfrak{j}_\varkappa \mathfrak{M}$ nur bedingt integrierbar ist, nenne man $\mathfrak{Y}_\varkappa$.

Ist der Durchschnitt $\mathfrak{Y}_1 \mathfrak{Y}_2 \ldots$ endlich oder leer, so läßt sich eine unendliche Teilfolge (y_ν) von (y_μ) und eine unendliche Teilfolge $(\mathfrak{j}_\nu)$ von $(\mathfrak{j}_\varkappa)$ so finden, daß jeweils $\varphi(t, y_\nu)$ über $\mathfrak{N}_\nu = (\mathfrak{j}_\nu - \mathfrak{j}_{\nu+1})\mathfrak{M}$ nur bedingt integrierbar ist. Nach Hilfssatz 3 gibt es dann ein $f_\nu(t)$ der Klasse C_τ über $\mathfrak{M}$, so daß

$$\int_{\mathfrak{N}_\nu} \varphi(t, y_\nu) f_\nu(t)\, dt$$

divergiert.

Ist der Durchschnitt $\mathfrak{Y}_1 \mathfrak{Y}_2 \ldots$ jedoch abzählbar, dann gibt es eine wieder mit (y_μ) bezeichnete Teilfolge der Ausgangsfolge derart, daß jedes y_μ zu diesem Durchschnitt gehört. Man setzt jetzt

$$Y_\nu = y_\mu \quad \text{für} \quad \mu = \nu - \frac{q(q-1)}{2}$$

mit dem durch $q(q-1) < 2\nu \leqq q(q+1)$ festgelegten ganzzahligen q und gewinnt dadurch eine Folge (Y_ν) mit den Häufungswerten y_μ. Die Folge $(\mathfrak{j}_\nu)$ läßt sich nun als Teilfolge von $(\mathfrak{j}_\varkappa)$ so wählen, daß für eine Teilmenge $\mathfrak{N}_\nu$ von $(\mathfrak{j}_\nu - \mathfrak{j}_{\nu+1})\mathfrak{M}$

$$\int_{\mathfrak{N}_\nu} |\varphi(t, Y_\nu)|\, dt$$

existiert und $> \nu \cdot 10^\nu + 1$ ist.

Nach Hilfssatz 2 gibt es dann ein $f_\nu(t)$ der Klasse B_1 über $\mathfrak{N}_\nu$, für das

$$\int_{\mathfrak{N}_\nu} \varphi(t, Y_\nu) f_\nu(t)\, dt$$

existiert und

$$\left| \int_{\mathfrak{N}_\nu} \varphi(t, Y_\nu) f_\nu(t)\, dt \right| > \nu \cdot 10^\nu$$

ist.

Gleichviel, ob $\mathfrak{Y}_1 \mathfrak{Y}_2 \ldots$ endlich oder abzählbar ist, stets genügt die mit dem entsprechenden $\mathfrak{N}_\nu$ und $f_\nu(t)$ gebildete Funktion

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{f_\nu(t)}{\nu} & \text{für } t \text{ von } \mathfrak{N}_\nu \text{ und } \nu = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{für } t \text{ von } \mathfrak{M} - (\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 + \ldots) \end{cases}$$

der Behauptung A, wie man leicht erkennt, und zwar ob $t_0 = \tau$ oder davon verschieden ist.

Damit ist Satz 1 bewiesen.

§ 3.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Beschränktheit von $g(y)$.

Satz 2. *$\varphi(t, y)$ sei eine für jedes y einer Umgebung von η absolut integrierbare Funktion. Dafür, daß für jedes $f(t)$ der Klasse B das zugehörige $g(y)$ in der Umgebung von η beschränkt ist, ist notwendig und hinreichend: Es gibt eine Konstante $M > 0$ derart, daß für jedes y einer Umgebung von η*

$$\int_{\mathfrak{M}} |\varphi(t, y)|\, dt \leqq M \tag{9}$$

bleibt[20]*.*

Beweis: Wegen der absoluten Integrierbarkeit von $\varphi(t, y)$ ist die Existenz der in diesem Beweise auftretenden Integrale nach Hilfssatz 1 gesichert.

Unter der weiteren Voraussetzung der Existenz einer Konstanten M der im Satze genannten Art folgt aus der Definition von $g(y)$, daß diese Funktion für jedes $f(t)$ der Klasse B in einer Umgebung von η beschränkt ist.

Die *Notwendigkeit der obigen Bedingung* aber wird wieder durch den Beweis einer etwas schärferen, in § 6 mehrfach verwendeten Behauptung dargetan.

Behauptung B. *Wenn $\varphi(t, y)$ für jedes Glied der gegen η strebenden Folge (y_μ) absolut integrierbar und*

$$\lim_{\mu \to \infty} \int_{\mathfrak{M}} |\varphi(t, y_\mu)|\, dt = +\infty \tag{10}$$

ist, dann gibt es bei beliebigem, aber festem Häufungspunkt τ von $\mathfrak{M}$ ein $f(t)$ der Klasse C_τ über $\mathfrak{M}$, so daß

$$\overline{\lim_{\mu \to \infty}} \left| \int_{\mathfrak{M}} \varphi(t, y_\mu) f(t)\, dt \right| = +\infty \tag{11}$$

gilt.

Wenn nämlich (10) gilt, dann gibt es einen endlichen oder unendlichen Punkt t_0 derart, daß für jedes dieses t_0 überdeckende offene Intervall j

$$\overline{\lim_{\mu \to \infty}} \int_{\mathfrak{N}} |\varphi(t, y_\mu)|\, dt = +\infty \tag{12}$$

---

[20]) Der Beweis zu Satz 2 liefert in naheliegender, einfacher Umgestaltung als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß für jedes $f(t)$ der Klasse B (der Klasse C_τ) das zugehörige $g(y)$ auf $\mathfrak{Y}$ beschränkt ist: Es gibt ein $M > 0$, so daß für jedes y von $\mathfrak{Y}$ die Beziehung (9) gilt.

ist, wo $\mathfrak{N} = \mathfrak{j}\mathfrak{M}$ ist. $\mathfrak{j}_\varkappa$ bedeute in dem noch folgenden Beweise von Satz 3 stets solche den Wert t_0 überdeckende offene Intervalle.

Nach (12) gibt es ein $\mathfrak{j}_1$ und ein y_1' aus (y_μ), so daß, wenn $t_0 \neq \tau$ ist, τ weder innerer noch Randpunkt von $\mathfrak{j}_1$ ist, daß weiter für $\varkappa = 1$ bei $M_1 = 0$, $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{j}_1\mathfrak{M}$

$$\int_{\mathfrak{N}_{\varkappa-1}} |\varphi(t, y_\varkappa')|\, dt > \varkappa(M_\varkappa + 10^\varkappa) + 2 \cdot 10^{-\varkappa}, \tag{13}$$

sowie

$$\int_{\mathfrak{N}_\varkappa} |\varphi(t, y_\varkappa')|\, dt < 10^{-\varkappa} \tag{14}$$

ist. Nach Hilfssatz 2 läßt sich nun ein $f_1(t)$ der Klasse B_1 über $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{N}_0 - \mathfrak{N}_1$ so bestimmen, daß für $\varkappa = 1$

$$\int_{\mathfrak{L}_\varkappa} \varphi(t, y_\varkappa') f_\varkappa(t)\, dt$$

existiert und

$$\left| \int_{\mathfrak{L}_\varkappa} \varphi(t, y_\varkappa') f_\varkappa(t)\, dt \right| > \varkappa(M_\varkappa + 10^\varkappa) \tag{15}$$

ist.

Als Induktionsvoraussetzung kann jetzt verwendet werden: Es seien k verschiedene Werte $y_\varkappa'$ aus (y_μ), k Konstanten $M_\varkappa$ und k Intervalle $\mathfrak{j}_\varkappa$ derart bestimmt, daß $\mathfrak{j}_{\varkappa+1}$ in $\mathfrak{j}_\varkappa$ liegt und daß (13) und (14) für $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$ bei $\mathfrak{N}_\varkappa = \mathfrak{j}_\varkappa\mathfrak{M}$ richtig sind; weiter sei für $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$ jeweils ein $f_\varkappa(t)$ der Klasse B_1 über $\mathfrak{L}_\varkappa = \mathfrak{N}_{\varkappa-1} - \mathfrak{N}_\varkappa$ festgelegt, für das (15) gilt.

Wenn dann

$$\overline{\lim_{\mu \to \infty}} \left| \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{1}{\varkappa} \int_{\mathfrak{L}_\varkappa} \varphi(t, y_\mu) f_\varkappa(t)\, dt \right| = +\infty \tag{16}$$

ist, genügt

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{f_\varkappa(t)}{\varkappa} & \text{für } t \text{ von } \mathfrak{L}_\varkappa \text{ und } \varkappa = 1, 2, \ldots, k \\ 0 & \text{für } t \text{ von } \mathfrak{M} - (\mathfrak{L}_1 + \ldots + \mathfrak{L}_k) \end{cases} \tag{17}$$

der Behauptung B, ob $t_0 = \tau$ ist oder nicht.

Wenn aber (16) nicht gilt, also

$$\overline{\text{fin}}_{1 \leqq \mu < \infty} \left| \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{1}{\varkappa} \int_{\mathfrak{L}_\varkappa} \varphi(t, y_\mu) f_\varkappa(t)\, dt \right| = M_{k+1} \tag{18}$$

als endlicher Wert existiert, läßt sich nach (12) bei diesem M_{k+1} ein von $y_1', \ldots, y_k'$ verschiedenes y_{k+1}' aus (y_μ), ein in $\mathfrak{j}_k$ liegendes $\mathfrak{j}_{k+1}$ und ein $f_{k+1}(t)$ der Klasse B_1 über $\mathfrak{L}_{k+1} = \mathfrak{N}_k - \mathfrak{N}_{k+1} = \mathfrak{N}_k - \mathfrak{j}_{k+1}\mathfrak{M}$ so finden, daß (13) bis (15) auch für $\varkappa = k+1$ richtig sind.

Entweder bricht der so eingeleitete Induktionsprozeß mit einer Beziehung (16) ab und genügt eine Funktion der Form (17) der Behauptung B, oder man gewinnt in abzählbar vielen Schritten abzählbar viele Funktionen $f_k(t)$ der durch die Konstruktion bedingten Eigenart. Dann stellt aber

$$(19) \qquad f(t) = \begin{cases} \dfrac{f_k(t)}{k} & \text{für } t \text{ von } \mathfrak{L}_k \text{ und } k = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{für } t \text{ von } \mathfrak{M} - (\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 + \ldots) \end{cases}$$

eine Funktion der Klasse C_τ über $\mathfrak{M}$ dar, für die (11) gilt. Denn nach (14), (15), (18) und (19) ist

$$\left|\int_{\mathfrak{M}} \varphi(t, y_k') f(t)\, dt\right| \geqq \left|\int_{\mathfrak{L}_k} \varphi(t, y_k') f(t)\, dt\right| - \left|\sum_{x=1}^{k-1} \int_{\mathfrak{L}_x} \varphi(t, y_k') f(t)\, dt\right| - \int_{\mathfrak{N}_k} |\varphi(t, y_k')| \quad dt > 10^k - 10^{-k}.$$

Damit ist Satz 2 bewiesen.

§ 4.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von $\lim_{y \to \eta} g(y)$.

Voraussetzung V sei erfüllt, bedeutet im folgenden:

$\varphi(t, y)$ sei eine fest gegebene, für jedes y einer Umgebung von η absolut integrierbare Funktion, und es gebe ein $M > 0$, so daß für jedes y einer Umgebung von η

$$\int_{\mathfrak{M}} |\varphi(t, y)|\, dt \leqq M$$

bleibt.

Für jedes dieser Voraussetzung genügende $\varphi(t, y)$ und jedes $f(t)$ der Klasse B existiert $g(y)$ nach Satz 2 als eine in der Umgebung von η beschränkte Funktion.

Satz 3. *Voraussetzung V sei erfüllt. Dafür, daß für jedes $f(t)$ der Klasse B das zugehörige $g(y)$ für $y \to \eta$*[21]*) konvergiert, sind die beiden folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend:*

1. *Für jedes $\mathfrak{i}$ existiert*

$$\lim_{y \to \eta} \int_{\mathfrak{i}\mathfrak{M}} \varphi(t, y)\, dt.$$

[21]) Die Annäherung von y an η soll jeweils auf $\mathfrak{Y}$ erfolgen.

2. *Für jede Folge von (meßbaren) Teilmengen* $\mathfrak{N}_x$ *von* $\mathfrak{M}$ *derart, daß* $\mathfrak{N}_{x+1}$ *Teilmenge von* $\mathfrak{N}_x$ *und* $\lim_{x \to \infty} |\mathfrak{i}\,\mathfrak{N}_x| = 0$ *für jedes* $\mathfrak{i}$ *ist, gilt*

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \eta}} \int_{\mathfrak{N}_x} |\varphi(t, y)|\, dt = 0 \text{ [22]}.$$

Beweis.

A. Die Bedingungen sind hinreichend.

Offenbar genügt es, dies für reelle Funktionen der Klasse B zu beweisen. Wenn nun $u(t)$ eine fest gewählte reelle Funktion der Klasse B, $M_1 \geqq M$ eine obere Schranke von $|u(t)|$ auf $\mathfrak{M}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgegeben ist, dann gibt es nach Bedingung 2 ein $\mathfrak{i}$ und ein $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$, so daß für jedes y der δ_0-Umgebung von η und für $\mathfrak{P} = \mathfrak{M} - \mathfrak{i}\,\mathfrak{M}$

$$\int_{\mathfrak{P}} |\varphi(t, y)|\, dt < \frac{\varepsilon}{8 M_1} \tag{20}$$

ist. Jetzt betrachte man $u(t)$ auf $\mathfrak{i}\,\mathfrak{M}$.

a) Die Bedingungen sind hinreichend, falls die *R-Begriffe* gelten.

---

[22]) Bedingung 2 läßt sich anschaulich, aber unexakt so umschreiben: Für $y \to \eta$ sollen die durch $\varphi(t, y)$ auf $\mathfrak{M}$ erzeugten Massebelegungen nicht gegen eine Massebelegung streben, die auf Mengen vom Inhalt 0 positive Gesamtmassen voraussetzt, sondern die Massen $\int_{\mathfrak{M}} |\varphi(t, y)|\, dt$ sollen für $y \to \eta$ einigermaßen aufgelockert über Mengen eines positiven Inhalts hin verteilt sein. — Die Bedingung 2 steht in engem Zusammenhang mit der bei anderen Untersuchungen auftretenden Forderung, daß der „Grad der ungleichmäßigen Konvergenz" einer Funktionenfolge im Punkte t_0 gleich 0 sein soll (vgl. zu diesem Begriff Encyklopädie a. a. O., S. 1142). Um den Aufbau der vorliegenden Arbeit nicht zu verwickeln, wird auf die Verfolgung dieses Zusammenhangs verzichtet. — In ähnlichen Untersuchungen wie den vorliegenden haben H. Lebesgue, Sur les intégrales singulières; Annales de la Fac. des Sciences de Toulouse, Sér. 3, 1 (1909), z. B. S. 57 und H. Hahn (a. a. O. z. B. S. 45) für Folgen summierbarer Funktionen $\varphi_n(t)$ und für beschränkte Definitionsintervalle eine Bedingung verwendet, die der entsprechend spezialisierten Bedingung 2 äquivalent ist und so lautet:

2′. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so daß bei jeder L-meßbaren Teilmenge $\mathfrak{N}$ des Definitionsintervalls $\mathfrak{i}$, für die $|\mathfrak{N}| < \delta$ ist, die Ungleichung

$$\int_{\mathfrak{N}} |\varphi_n(t)|\, dt < \varepsilon$$

für alle n gilt.

Bei anderer Gelegenheit werde ich nachweisen, daß, wenn der Satz 3 auf absolut R-integrierbare Funktionen $\varphi_n(t)$ und beschränkte Definitionsintervalle spezialisiert wird, die obige Bedingung 2 nicht durch die für die R-Begriffe formulierte Bedingung 2′ ersetzt werden kann, genauer, daß diese Bedingung 2′ für die Existenz von $\lim_{n \to \infty} g_n$ mit $g_n = {}^{R}\int_{\mathfrak{i}} \varphi_n(t) f(t)\, dt$ nicht notwendig ist.

Durch fortgesetzte Halbierung sei eine Folge von Zerlegungen des Intervalls i hergestellt; $\mathfrak{I}_n$ sei die Summe derjenigen Teilintervalle $\mathfrak{i}_\nu$ der n-ten Zerlegung, für die $u(t)$ auf $\mathfrak{i}_\nu \mathfrak{M}$ eine Schwankung $\sigma \geqq \frac{\varepsilon}{8 M_1}$ hat. Wegen der eigentlichen R-Integrierbarkeit von $u(t)$ ist dann

$$\lim_{n \to \infty} |\mathfrak{I}_n| = 0.$$

Nach Bedingung 2 gibt es demnach ein n und ein $0 < \delta_1 \leqq \delta_0$, so daß für jedes y der δ_1-Umgebung von η

$$\int_{\mathfrak{L}_n} |\varphi(t, y)|\, dt < \frac{\varepsilon}{8 M_1} \tag{21}$$

gilt, wo $\mathfrak{L}_n = \mathfrak{I}_n \mathfrak{M}$ ist. Dieses n bleibt nunmehr fest.

Bedeutet jetzt $\mathfrak{i}'_\nu$ mit $\nu = 1, 2, \ldots, n'$ diejenigen Intervalle der obengenannten n-ten Zerlegung von i, für die $u(t)$ auf $\mathfrak{i}_\nu \mathfrak{M}$ eine Schwankung $\sigma < \frac{\varepsilon}{8 M_1}$ hat, dann läßt sich nach Bedingung 1 ein $0 < \delta \leqq \delta_1$ derart finden, daß bei $\mathfrak{M}_\nu = \mathfrak{i}'_\nu \mathfrak{M}$ für jedes y' und y'' der δ-Umgebung von η

$$\sum_{\nu=1}^{n'} \left| \int_{\mathfrak{M}_\nu} (\varphi(t, y') - \varphi(t, y'')\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{4 M_1} \tag{22}$$

ist.

Bezeichnet endlich u_ν einen beliebigen, aber festen Wert von $u(t)$ auf $\mathfrak{i}'_\nu \mathfrak{M}$, so gilt nach (20) bis (22) für jedes y' und y'' der δ-Umgebung von η

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathfrak{M}} \varphi(t, y')\, u(t)\, dt - \int_{\mathfrak{M}} \varphi(t, y'')\, u(t)\, dt \right| \\
&\qquad < \left| \int_{\mathfrak{i} \mathfrak{M}} (\varphi(t, y') - \varphi(t, y''))\, u(t)\, dt \right| + \frac{\varepsilon}{4} \\
&\qquad < \sum_{\nu=1}^{n'} \left| \int_{\mathfrak{M}_\nu} (\varphi(t, y') - \varphi(t, y''))\, u(t)\, dt \right| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\qquad < \sum_{\nu=1}^{n'} |u_\nu| \left| \int_{\mathfrak{M}_\nu} (\varphi(t, y') - \varphi(t, y''))\, dt \right| + \frac{3\varepsilon}{4} \\
&\qquad < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit ist a) bewiesen.

b) Die Bedingungen sind hinreichend, falls die L-Begriffe gelten. k sei eine feste natürliche Zahl $> \frac{16 M_1^2}{\varepsilon}$. Wegen der eigentlichen L-Integrierbarkeit von $u(t)$ über $\mathfrak{i} \mathfrak{M}$ läßt sich $\mathfrak{i} \mathfrak{M}$ so in $k+1$ paarweise fremde L-meßbare Teilmengen $\mathfrak{M}_\varkappa$ ($\varkappa = 0, 1, \ldots, k$) zerlegen, daß $u(t)$ über jedes $\mathfrak{M}_\varkappa$ eigentlich L-integrierbar ist und für t von $\mathfrak{M}_\varkappa$

$$-M_1 + \frac{2 M_1}{k} \varkappa \leqq u(t) < -M_1 + \frac{2 M_1}{k} (\varkappa + 1) \tag{23}$$

gilt.

Jedes $\mathfrak{M}_\varkappa$ wird durch eine Folge offener Mengen $\mathfrak{I}_\nu^{(\varkappa)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ derart überdeckt, daß $\mathfrak{I}_{\nu+1}^{(\varkappa)}$ Teilmenge von $\mathfrak{I}_\nu^{(\varkappa)}$, also $\mathfrak{I}_{\nu+1}^{(\varkappa)} - \mathfrak{M}_\varkappa$ Teilmenge von $\mathfrak{I}_\nu^{(\varkappa)} - \mathfrak{M}_\varkappa$ und $\lim\limits_{\nu\to\infty} |\mathfrak{I}_\nu^{(\varkappa)} - \mathfrak{M}_\varkappa| = 0$ ist. Nach Bedingung 2 gibt es somit ein $\nu_\varkappa$ und ein $\delta_{1\varkappa} > 0$, so daß für jedes natürliche $\nu \geqq \nu_\varkappa$ und jedes y der $\delta_{1\varkappa}$-Umgebung von η

$$\int_{\mathfrak{H}_{\nu\varkappa}} |\varphi(t, y)|\, dt < \frac{\varepsilon}{16 M_1 (k+1)} \tag{24}$$

gilt, wo $\mathfrak{H}_{\nu\varkappa} = (\mathfrak{I}_\nu^{(\varkappa)} - \mathfrak{M}_\varkappa)\,\mathfrak{M}$ ist.

Jetzt wählt man $\nu \geqq \nu_0 + \ldots + \nu_k$ fest und schreibt $\mathfrak{I}_\varkappa$ statt $\mathfrak{I}_\nu^{(\varkappa)}$. Jedem $\mathfrak{I}_\varkappa$ wird eine Folge endlicher Intervallmengen $\mathfrak{K}_\mu^{(\varkappa)}$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$ derart zugeordnet, daß $\mathfrak{K}_\mu^{(\varkappa)}$ Teilmenge von $\mathfrak{K}_{\mu+1}^{(\varkappa)}$ und von $\mathfrak{I}_\varkappa$, also $\mathfrak{I}_\varkappa - \mathfrak{K}_{\mu+1}^{(\varkappa)}$ Teilmenge von $\mathfrak{I}_\varkappa - \mathfrak{K}_\mu^{(\varkappa)}$ und $\lim\limits_{\mu\to\infty} |\mathfrak{I}_\varkappa - \mathfrak{K}_\mu^{(\varkappa)}| = 0$ ist. Nach Bedingung 2 gibt es dann ein $\mu_\varkappa$ und ein $\delta_{2\varkappa} > 0$, so daß für jedes natürliche $\mu \geqq \mu_\varkappa$ und jedes y der $\delta_{2\varkappa}$-Umgebung von η

$$\int_{\mathfrak{G}_{\mu\varkappa}} |\varphi(t, y)|\, dt < \frac{\varepsilon}{16 M_1 (k+1)} \tag{25}$$

gilt, wo $\mathfrak{G}_{\mu\varkappa} = (\mathfrak{I}_\varkappa - \mathfrak{K}_\mu^{(\varkappa)})\,\mathfrak{M}$ ist.

Nun wählt man $\mu \geqq \mu_0 + \ldots + \mu_k$ fest und setzt $\mathfrak{L}_\varkappa = \mathfrak{K}_\mu^{(\varkappa)}\,\mathfrak{M}$. Nach Bedingung 1 läßt sich schließlich

$$0 < \delta < \text{Min}\,\{\delta_0; \delta_{01}, \ldots, \delta_{k1}; \delta_{02}, \ldots, \delta_{k2}\},$$

so bestimmen, daß für jedes y' und y'' der δ-Umgebung von η

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} \Big| \int_{\mathfrak{L}_\varkappa} (\varphi(t, y') - \varphi(t, y''))\, dt \Big| < \frac{\varepsilon}{4 M_1} \tag{26}$$

ist.

Bezeichnet endlich $u_\varkappa$ einen beliebigen, aber festen Wert von $u(t)$ auf $\mathfrak{M}_\varkappa$, so gilt nach (20), (23) bis (26) und wegen $k > \frac{16 M_1^2}{\varepsilon}$ für jedes y' und y'' der δ-Umgebung von η

$$\begin{aligned}
\Big| \int_{\mathfrak{M}} \varphi(t, y')\, u(t)\, dt - \int_{\mathfrak{M}} \varphi(t, y'')\, u(t)\, dt \Big| &< \sum_{\varkappa=0}^{k} \Big| \int_{\mathfrak{M}_\varkappa} (\varphi(t, y') - \varphi(t, y''))\, u(t)\, dt \Big| + \frac{\varepsilon}{4} \\
&< \sum_{\varkappa=0}^{k} |u_\varkappa| \Big| \int_{\mathfrak{M}_\varkappa} (\varphi(t, y') - \varphi(t, y''))\, dt \Big| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< M_1 \sum_{\varkappa=0}^{k} \Big| \int_{\mathfrak{L}_\varkappa} (\varphi(t, y') - \varphi(t, y''))\, dt \Big| + \frac{3\varepsilon}{4} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit ist auch b) bewiesen.

B. Die Bedingungen sind notwendig.

Für

$$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ für } t \text{ von } \mathfrak{i}\,\mathfrak{M} \\ 0 \text{ für } t \text{ von } \mathfrak{M} - \mathfrak{i}\,\mathfrak{M} \end{cases}$$

olgt aus der Existenz von $\lim_{y \to \eta} g(y)$ sofort die Notwendigkeit der Bedingung 1.

Die Notwendigkeit von Bedingung 2 aber wird bewiesen, indem zu edem der Voraussetzung V genügendem $\varphi(t, y)$, für das Bedingung 2 verletzt ist, ein $f(t)$ der Klasse B_1 angegeben wird, so daß das zugehörige $g(y)$ für $y \to \eta$ nicht konvergiert.

Falls Bedingung 2 verletzt ist, gibt es ein $\vartheta > 0$ und eine Folge von Teilmengen $\mathfrak{N}_\varkappa$ von $\mathfrak{M}$ derart, daß $\mathfrak{N}_{\varkappa+1}$ Teilmenge von $\mathfrak{N}_\varkappa$ sowie $\lim_{\varkappa \to \infty} |\mathfrak{i}\,\mathfrak{N}_\varkappa| = 0$ für jedes $\mathfrak{i}$ ist, aber

$$\overline{\lim_{\substack{y \to \eta \\ \varkappa \to \infty}}} \int_{\mathfrak{N}_\varkappa} |\varphi(t, y)|\, dt \geqq \vartheta \tag{27}$$

gilt.

Wegen (27) und wegen Voraussetzung V läßt sich durch vollständige Induktion einfach zeigen: Zu beliebig klein vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es

1. eine Folge natürlicher Zahlen $\varkappa_\mu$ mit $\varkappa_\mu < \varkappa_{\mu+1}$,

2. eine Folge paarweis verschiedener Werte y_μ, wo y_μ in der $\frac{\delta}{\mu}$-Umgebung von η liegt,

3. eine Folge von Intervallen $\mathfrak{i}_\mu$, wo $\mathfrak{i}_\mu$ in $\mathfrak{i}_{\mu+1}$ liegt, so daß für $\mu = 1, 2 \ldots$ bei $\mathfrak{L}_\mu = \mathfrak{N}_{\varkappa_\mu}$ und $\mathfrak{K}_\mu = \mathfrak{M} - \mathfrak{i}_\mu\,\mathfrak{M}$

$$\int_{\mathfrak{L}_\mu} |\varphi(t, y_\mu)|\, dt > \vartheta - \vartheta \cdot 10^{-\mu} \quad \text{sowie} \quad \int_{\mathfrak{K}_\mu} |\varphi(t, y_\mu)\, dt| < \vartheta \cdot 10^{-\mu} \tag{28}$$

ist und daß für $\mu = 2, 3, \ldots$ bei $\mathfrak{H}_\mu = \mathfrak{L}_\mu \mathfrak{i}_{\mu-1}$

$$\int_{\mathfrak{H}_\mu} |\varphi(t, y_{\mu-1})|\, dt < \vartheta \cdot 10^{-\mu+1} \tag{29}$$

gilt.

Nach (28) und (29) ist

$$\int_{\mathfrak{L}_{\mu+1}} |\varphi(t, y_\mu)|\, dt \leqq \int_{\mathfrak{K}_\mu} |\varphi(t, y_\mu)\, dt + \int_{\mathfrak{H}_{\mu+1}} |\varphi(t, y_\mu)|\, dt < 2\vartheta \cdot 10^{-\mu} \tag{30}$$

und, wenn $\mathfrak{M}_\mu = (\mathfrak{L}_\mu - \mathfrak{L}_{\mu+1})\,\mathfrak{i}_\mu$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{M}_\mu} |\varphi(t, y_\mu)|\, dt &\geqq \int_{\mathfrak{L}_\mu} |\varphi(t, y_\mu)|\, dt - \int_{\mathfrak{K}_\mu} |\varphi(t, y_\mu)|\, dt \\ &\quad - \int_{\mathfrak{H}_{\mu+1}} |\varphi(t, y_\mu)|\, dt > \vartheta - 3\vartheta\ 10^{-\mu}. \end{aligned} \tag{31}$$

Hieraus folgt unter Verwendung von Hilfssatz 2 die Existenz eines $f_\mu(t)$ der Klasse B_1 über $\mathfrak{M}_\mu$, so daß

$$\int_{\mathfrak{M}_\mu} \varphi(t, y_\mu) f_\mu(t) \text{ reell und } > \vartheta - 4\vartheta \cdot 10^{-\mu} \tag{32}$$

ist.

Mit Hilfe dieser $f_\mu(t)$ konstruiert man ein $f(t)$ wie folgt ($f(t)$ ist eine eindeutige Funktion, weil die $\mathfrak{M}_\mu$ paarweise elementenfremd sind): Man setzt zunächst

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \text{ von } \mathfrak{M} - (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \ldots) \\ f_1(t) & \text{für } t \text{ von } \mathfrak{M}_1. \end{cases}$$

Dann nimmt man an, $f(t)$ sei schon auf $\mathfrak{M} - (\mathfrak{M}_{\mu+1} + \ldots)$ als Funktion der Klasse B_1 definiert; mit

$$H_\mu = \int \varphi(t, y_\mu) f(t)\, dt \quad \text{sowie} \quad h_{\mu+1} = \int \varphi(t, y_{\mu+1}) f(t)\, dt$$

(integriert wird in beiden Fällen über die meßbare Menge $\mathfrak{M} - (\mathfrak{M}_{\mu+1} + \ldots)$) und

$$\operatorname{sgn}(H_\mu - h_{\mu+1}) = \begin{cases} 1 & \text{für } H_\mu = h_{\mu+1} \\ \dfrac{H_\mu - h_{\mu+1}}{|H_\mu - h_{\mu+1}|} & \text{für } H_\mu \neq h_{\mu+1} \end{cases}$$

wird schließlich festgelegt

$$f(t) = -f_{\mu+1}(t) \cdot \operatorname{sgn}(H_\mu - h_{\mu+1}) \text{ für } t \text{ von } \mathfrak{M}_{\mu+1}.$$

Das so induktiv festgelegte $f(t)$ gehört zur Klasse B_1, aber das zugehörige $g(y)$ konvergiert für $y \to \eta$ nicht. Denn weil $\mathfrak{M}_\mu + \mathfrak{M}_{\mu+1} + \ldots$ Teilmenge von $\mathfrak{L}_\mu$ ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} |g(y_\mu) - g(y_{\mu+1})| \geqq |H_\mu - h_{\mu+1} - \int_{\mathfrak{M}_{\mu+1}} \varphi(t, y_{\mu+1}) f(t)\, dt| \\ - \int_{\mathfrak{L}_{\mu+1}} |\varphi(t, y_\mu)|\, dt - \int_{\mathfrak{L}_{\mu+2}} |\varphi(t, y_{\mu+1})|\, dt \end{aligned}$$

und hieraus folgt unter Beachtung von (30) und (32)

$$\begin{aligned} |g(y_\mu) - g(y_{\mu+1})| > |H_\mu - h_{\mu+1} + \operatorname{sgn}(H_\mu - h_{\mu+1}) \\ \int_{\mathfrak{M}_{\mu+1}} \varphi(t, y_{\mu+1}) f_{\mu+1}(t)\, dt| - 3\vartheta \cdot 10^{-\mu} > \vartheta - 4\vartheta \cdot 10^{-\mu}. \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis von Satz 3 vollendet.

§ 5.

I-Grenzfunktionen und der Grenzwert von $g(y)$ für $y \to \eta$.

Nachdem in Satz 3 notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von $\lim_{y \to \eta} g(y)$ genannt sind, erhebt sich sofort die Frage, ob dieser Grenzwert explizit angegeben werden kann. Damit diese Frage in

weitem Umfang beantwortet werden kann, wird der Begriff der Integral-Grenzfunktion oder I-Grenzfunktion wie folgt eingeführt:

Definition. *Voraussetzung V sei erfüllt und* $\lim\limits_{y \to \eta} \int\limits_{\mathfrak{i}\mathfrak{M}} \varphi(t, y)\, dt$ *existiere für jedes* $\mathfrak{i}$. *Die Funktion* $\Phi(t)$ *heiße I-Grenzfunktion von* $\varphi(t, y)$ *(für* $y \to \eta$*), falls* $\Phi(t)$ *für jedes* $\mathfrak{i}$ *über* $\mathfrak{i}\mathfrak{M}$ *integrierbar ist und stets*

$$\lim_{y \to \eta} \int_{\mathfrak{i}\mathfrak{M}} \varphi(t, y)\, dt = \int_{\mathfrak{i}\mathfrak{M}} \Phi(t)\, dt$$

gilt.

Hilfssatz 4. *Voraussetzung V sei erfüllt, bei jedem* $\mathfrak{i}$ *existiere* $\lim\limits_{y \to \eta} \int\limits_{\mathfrak{i}\mathfrak{M}} \varphi(t, y)\, dt$, *und* $\Phi(t)$ *sei I-Grenzfunktion von* $\varphi(t, y)$. *Dann ist* $\Phi(t)$ *absolut integrierbar.*

Beweis. Man trennt $\varphi(t, y)$ und $\Phi(t)$ in Realteil und Imaginärteil durch

$$\varphi(t, y) = u(t, y) + i\, v(t, y), \quad \Phi(t) = U(t) + i\, V(t).$$

Für jedes y einer gewissen Umgebung von η sind $u(t, y)$ und $v(t, y)$ absolut integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathfrak{M}} |u(t, y)|\, dt \leqq M \quad \text{sowie} \quad \int_{\mathfrak{M}} |v(t, y)|\, dt \leqq M.$$

Im folgenden beschränke man sich auf diese Umgebung. $U(t)$ und $V(t)$ sind bei jedem $\mathfrak{i}$ über $\mathfrak{i}\mathfrak{M}$ integrierbar.

Zunächst betrachtet man die Funktionen $u(t, y)$ und $U(t)$.

$\mathfrak{i}$ sei ein beliebig, aber fest gewähltes abgeschlossenes Intervall, $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgegeben. Die Menge der singulären Stellen von $U(t)$ auf $\mathfrak{i}\mathfrak{M}$ sei mit einer beliebigen, aus endlich vielen offenen Intervallen bestehenden Menge $\mathfrak{I}$ überdeckt.

a) Wenn die *R-Begriffe* gelten, ist $U(t)$ auf $\mathfrak{B} = (\mathfrak{i} - \mathfrak{i}\mathfrak{I})\,\mathfrak{M}$ beschränkt. Nun gibt es zwei endliche Intervallmengen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, beides Teilmengen von $\mathfrak{B}$, so daß $U(t)$ auf $\mathfrak{K}_1$ positiv, auf $\mathfrak{K}_2$ negativ ist und daß für $\mathfrak{C} = \mathfrak{B} - \mathfrak{K}_1 - \mathfrak{K}_2$

$$\int_{\mathfrak{C}} |U(t)|\, dt < \frac{\varepsilon}{3}$$

gilt. Weil $U(t)$ I-Grenzfunktion von $u(t, y)$ ist, läßt sich weiter ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ so bestimmen, daß für jedes y der δ-Umgebung von η bei $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1$ und bei $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_2$

$$\Big| \int_{\mathfrak{K}} U(t)\, dt \Big| < \int_{\mathfrak{K}} |u(t, y)|\, dt + \frac{\varepsilon}{3}$$

ist. Aus den beiden vorangehenden Abschätzungen folgt für solche y

$$\int_{\mathfrak{B}} |U(t)|\, dt < \int_{\mathfrak{B}} |u(t, y)|\, dt + \varepsilon. \tag{33 a}$$

b) Wenn aber die *L-Begriffe* gelten, ist $U(t)$ im Lebesgueschen Sinn über $\mathfrak{B} = (\mathfrak{i} - \mathfrak{i}\,\mathfrak{I})\,\mathfrak{M}$ summierbar, also gibt es eine L-meßbare Teilmenge $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{B}$, so daß $U(t)$ auf $\mathfrak{C}$ beschränkt und

$$\int_{\mathfrak{D}} |U(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{9} \tag{34}$$

für $\mathfrak{D} = \mathfrak{B} - \mathfrak{C}$ ist. $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ seien die meßbaren Teilmengen von $\mathfrak{C}$, für die entsprechend $U(t) > 0$ und $U(t) \leqq 0$ ist; K bedeute eine obere Schranke von $|U(t)|$ auf $\mathfrak{C}$.

Dann gibt es offene beschränkte Mengen $\mathfrak{I}_\varkappa$, $\varkappa = 1, 2$, so daß $\mathfrak{I}_\varkappa$ die Menge $\mathfrak{C}_\varkappa$ überdeckt,

$$|\mathfrak{I}_1\,\mathfrak{I}_2| < \frac{\varepsilon}{9K} \tag{35}$$

ist und die Durchschnitte $\mathfrak{I}\,\mathfrak{I}_\varkappa$ leer sind. Weiter lassen sich endliche Intervallmengen $\mathfrak{R}_\varkappa$, $\varkappa = 1, 2$, derart finden, daß $\mathfrak{R}_\varkappa$ Teilmenge von $\mathfrak{I}_\varkappa$ und $|\mathfrak{I}_\varkappa - \mathfrak{R}_\varkappa| < \frac{\varepsilon}{9K}$ ist. Unter Beachtung von (35) folgt hieraus

$$|\mathfrak{C}_\varkappa| = |\mathfrak{I}_\varkappa \mathfrak{C}_\varkappa| < |\mathfrak{R}_\varkappa \mathfrak{C}_\varkappa| + \frac{\varepsilon}{9K} < |\mathfrak{R}_\varkappa \mathfrak{C}| + \frac{2\varepsilon}{9K},$$

d. h.

$$\Big|\int_{\mathfrak{C}_\varkappa} U(t)\,dt\Big| < \Big|\int_{\mathfrak{R}_\varkappa \mathfrak{C}} U(t)\,dt\Big| + \frac{2\varepsilon}{9}. \tag{36}$$

Weil $U(t)$ I-Grenzfunktion von $u(t, y)$ ist, kann schließlich ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ so bestimmt werden, daß für jedes y der δ-Umgebung von η

$$\Big|\int_{\mathfrak{R}_\varkappa \mathfrak{C}} U(t)\,dt\Big| < \Big|\int_{\mathfrak{R}_\varkappa \mathfrak{B}} U(t)\,dt\Big| + \frac{\varepsilon}{9} < \int_{\mathfrak{R}_\varkappa \mathfrak{B}} |u(t, y)|\,dt + \frac{2\varepsilon}{9} \leqq M + \frac{2\varepsilon}{9} \tag{37}$$

gilt. Nach (34), (36) und (37) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \Big|\int_{\mathfrak{B}} U(t)\,dt\Big| &< \int_{\mathfrak{C}_1} U(t)\,dt - \int_{\mathfrak{C}_2} U(t)\,dt + \frac{\varepsilon}{9} \\ &< \Big|\int_{\mathfrak{R}_1 \mathfrak{C}} U(t)\,dt\Big| + \Big|\int_{\mathfrak{R}_2 \mathfrak{C}} U(t)\,dt\Big| + \frac{5\varepsilon}{9} \\ &< 2M + \varepsilon. \end{aligned} \tag{33 b}$$

Da (33 a) und (33 b) für jedes $\mathfrak{i}$, ε und $\mathfrak{I}$ der zur Konkurrenz zugelassenen Art richtig sind, ist die Existenz von $\int_{\mathfrak{M}} |U(t)|\,dt$ gesichert.

Entsprechend folgt die absolute Integrierbarkeit von $V(t)$. Mit $U(t)$ und $V(t)$ ist aber auch $\Phi(t)$ absolut integrierbar, w. z. b. w.

Mit Hilfssatz 4 läßt sich nun verhältnismäßig einfach beweisen

Satz 4. *Voraussetzung V und die Bedingung* 1 *und* 2 *von Satz* 3 *seien erfüllt; $\Phi(t)$ sei I-Grenzfunktion von $\varphi(t, y)$. Für jedes $f(t)$ der Klasse B*

existiert dann $\lim_{y \to \eta} \int_{\mathfrak{M}} \varphi(t, y) f(t)\, dt$ *sowie* $\int_{\mathfrak{M}} \Phi(t) f(t)\, dt$, *und es gilt*

$$\lim_{y \to \eta} \int_{\mathfrak{M}} \varphi(t, y) f(t)\, dt = \int_{\mathfrak{M}} \Phi(t) f(t)\, dt.$$

Beweis: Nach Satz 3 ist die Existenz von $\lim_{y \to \eta} \int_{\mathfrak{M}} \varphi(t, y) f(t)\, dt$, nach Hilfssatz 4 und Hilfssatz 1 die Existenz von $\int_{\mathfrak{M}} \Phi(t) f(t)\, dt$ gesichert.

Geht man jetzt den Beweis für den hinreichenden Charakter der Bedingungen 1 und 2 in Satz 3 durch, so erkennt man: Im Falle der R-Begriffe sind $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{L}_n$, $\mathfrak{M}_\nu$, n' und $\delta = \delta(\varepsilon)$ so wählbar, daß (20) und (21) für die Integranden $\varphi(t, y)$ und $\Phi(t)$ gelten und daß

$$\sum_{\nu=0}^{n'} \left| \int_{\mathfrak{M}_\nu} (\varphi(t, y) - \Phi(t))\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{4 M_1} \tag{22a}$$

für jedes y der δ-Umgebung von η ist. Im Falle der L-Begriffe sind $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{H}_{\nu\varkappa}$, $\mathfrak{G}_{\mu\varkappa}$, $\mathfrak{L}_\varkappa$, k und $\delta = \delta(\varepsilon)$ so wählbar, daß (20), (24) und (25) für die Integranden $\varphi(t, y)$ und $\Phi(t)$ gelten und daß

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} \left| \int_{\mathfrak{L}_\varkappa} (\varphi(t, y) - \Phi(t))\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{4 M_1} \tag{26a}$$

für jedes y der δ-Umgebung von η ist.

Wie beim Beweise von Satz 3 ergibt sich dann die Behauptung.

§ 6.

Konvergenzerzeugende, konvergenzerhaltende und reguläre Transformationen.

$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{Y}$, $\varphi(t, y)$, $f(t)$, $g(y)$ und η sollen die in § 1 nach Hilfssatz 2 genannte Bedeutung haben.

Nach dem Schurschen Vorgang für Matrizenverfahren[23]) heiße die Transformation (I) *konvergenzerzeugend*, wenn bei jedem $f(t)$ der Klasse B das zugehörige $g(y)$ in einer Umgebung von η existiert[24]) und $\lim_{y \to \eta} g(y)$ existiert; sie heiße *annullierend*, wenn sie konvergenzerzeugend und $\lim_{y \to \eta} g(y) = 0$ ist.

---

[23]) Schur, a. a. O. S. 80.

[24]) Fordert man in diesen und den folgenden Definitionen die Existenz und die Beschränktheit von $g(y)$ auf $\mathfrak{Y}$, so gelten nach Fußnote 19 und 20 die nachstehenden Sätze I bis VII wörtlich, wenn die Bedingung 1 ersetzt wird durch

Bedingung 1'. $\varphi(t, y)$ ist für jedes y von $\mathfrak{Y}$ absolut integrierbar, und es gibt ein $M > 0$ derart, daß $\int_{\mathfrak{M}} |\varphi(t, y)|\, dt \leqq M$ bleibt für jedes y von $\mathfrak{Y}$.

Wenn weiter τ einen beliebigen, aber festen endlichen oder unendlichen Häufungspunkt von $\mathfrak{M}$ bedeutet, heiße die Transformation (I) ebenfalls nach Schur *konvergenzerhaltend*, wenn bei jedem für $t \to \tau$ [25]) konvergentem $f(t)$ der Klasse B das zugehörige $g(y)$ in einer Umgebung von η existiert und $\lim_{y \to \eta} (g\,y)$ existiert; sie heiße *regulär*, wenn sie konvergenzerhaltend und $\lim_{y \to \eta} g(y) = \lim_{t \to \tau} f(t)$ ist.

In den nachstehenden Sätzen werden nun Bedingungen genannt, die zugleich notwendig und hinreichend dafür sind, daß die Transformation (I) konvergenzerzeugend, daß sie annullierend, ... ist. Damit die zum Teil gleichlautenden Bedingungen nicht wiederholt werden müssen und damit die Parallelität dieser Sätze schärfer hervortritt, werden die Bedingungen im Voraus zusammengestellt.

Bedingung 1. $\varphi(t, y)$ ist für jedes y einer Umgebung von η absolut integrierbar, und es gibt ein $M > 0$ derart, daß für jedes y einer Umgebung von η

$$\int_{\mathfrak{M}} |\varphi(t, y)|\, dt \leqq M$$

bleibt.

Bedingung 2. Für jedes i existiert $\lim_{y \to \eta} \int_{\mathfrak{i}\mathfrak{M}} \varphi(t, y)\, dt$.

Bedingung 2a. Für jedes i existiert $\lim_{y \to \eta} \int_{\mathfrak{i}\mathfrak{M}} \varphi(t, y)\, dt$ und hat den Wert 0.

Bedingung 2′. Für jedes i derart, daß τ positiven Abstand von i hat, existiert $\lim_{y \to \eta} \int_{\mathfrak{i}\mathfrak{M}} \varphi(t, y)\, dt$.

Bedingung 2a′. Für jedes i derart, daß τ positiven Abstand von i hat, existiert $\lim_{y \to \eta} \int_{\mathfrak{i}\mathfrak{M}} \varphi(t, y)\, dt$ und hat den Wert 0.

Bedingung 3. Für jede Folge von (meßbaren) Teilmengen $\mathfrak{N}_\varkappa$ von $\mathfrak{M}$ derart, daß $\mathfrak{N}_{\varkappa+1}$ Teilmenge von $\mathfrak{N}_\varkappa$ und $\lim_{\varkappa \to \infty} |\mathfrak{i}\,\mathfrak{N}_\varkappa| = 0$ für jedes i ist, gilt

$$\lim_{\substack{\varkappa \to \infty \\ y \to \eta}} \int_{\mathfrak{N}_\varkappa} |\varphi(t, y)|\, dt = 0.$$

Bedingung 3′. Für jede Folge von (meßbaren) Teilmengen $\mathfrak{N}_\varkappa$ von $\mathfrak{M}$ derart, daß τ positiven Abstand von einem bestimmten $\mathfrak{N}_\varkappa$ hat, daß $\mathfrak{N}_{\varkappa+1}$ Teilmenge von $\mathfrak{N}_\varkappa$ und $\lim_{\varkappa \to \infty} |\mathfrak{i}\,\mathfrak{N}_\varkappa| = 0$ für jedes i ist, gilt

$$\lim_{\substack{\varkappa \to \infty \\ y \to \eta}} \int_{\mathfrak{N}_\varkappa} |\varphi(t, y)|\, dt = 0$$

[25]) Die Annäherung von t an τ soll in jedem Fall auf $\mathfrak{M}$ erfolgen.

Bedingung 4. $l = \lim_{y \to \eta} \int_{\mathfrak{M}} \varphi(t, y)\, dt$ existiert.

Bedingung 4'. $\lim_{y \to \eta} \int_{\mathfrak{M}} \varphi(t, y)\, dt$ existiert und hat den Wert 0.

Bedingung 4''. $\lim_{y \to \eta} \int_{\mathfrak{M}} \varphi(t, y)\, dt$ existiert und hat den Wert 1.

Jetzt wird bewiesen

Satz I. *Die Bedingungen* 1, 2 *und* 3 *sind notwendig und hinreichend dafür, daß die Transformation* (I) *konvergenzerzeugend ist.*

Weiter folgt unter diesen Bedingungen aus der Existenz einer I-Grenzfunktion $\Phi(t)$ *von* $\varphi(t, y)$, *daß* $\int_{\mathfrak{M}} \Phi(t) f(t)\, dt$ *für jedes* $f(t)$ *der Klasse B existiert und daß*

$$\lim_{y \to \eta} \int_{\mathfrak{M}} \varphi(t, y) f(t)\, dt = \int_{\mathfrak{M}} \Phi(t) f(t)\, dt$$

ist.

Beweis: Daß die Bedingungen 1, 2 und 3 hinreichend sind, ist in Satz 3 bewiesen.

Da sich leicht Funktionen $\varphi(t, y)$ finden lassen, für die eine vorbestimmte der Bedingungen 1, 2 und 3 verletzt ist, die beiden andern aber erfüllt sind, so sind diese Bedingungen voneinander unabhängig. Ihre Notwendigkeit folgt aus den Sätzen 1 bis 3.

Satz 4 ergibt schließlich den $\Phi(t)$ betreffenden Teil der Behauptung.

Satz II. *Die Bedingungen* 1, 2a *und* 3 *sind notwendig und hinreichend dafür, daß die Transformation* (I) *annullierend ist.*

Beweis: Nach Satz I sind die Bedingungen 1, 2a und 3 hinreichend.

Wie beim Beweise von Satz I ergibt sich die Unabhängigkeit dieser Bedingungen. Nach Satz 1, 2 und 3 sind die Bedingungen 1 und 3 auch notwendig; die Notwendigkeit der Bedingung 2a, welche die Bedingung 2 enthält, folgt aber so: Wenn bei geeignet gewähltem i nicht $\lim_{y \to \eta} \int_{\mathfrak{i}\mathfrak{M}} \varphi(t, y)\, dt = 0$ ist, ist für

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{auf } \mathfrak{i}\mathfrak{M} \\ 0 & \text{auf } \mathfrak{M} - \mathfrak{i}\mathfrak{M} \end{cases}$$

$\lim_{y \to \eta} g(y) \neq 0$, d. h. die Transformation (I) nicht annullierend.

Satz III. *Die Bedingungen* 1, 2' *und* 3' *sind notwendig und hinreichend dafür, daß für jedes* $f(t)$ *der Klasse* C_τ *das zugehörige* $g(y)$ *in einer Umgebung von* η *existiert und daß* $g(y)$ *für* $y \to \eta$ *konvergiert.*

Wenn $\Phi(t)$ unter diesen Bedingungen I-Grenzfunktion von $\varphi(t, y)$ auf jedem $\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_\delta$ ist[26]*, so folgt für jedes $f(t)$ der Klasse C_τ die Existenz von $\int_{\mathfrak{M}} \Phi(t) f(t)\, dt$ und die Beziehung*

$$\lim_{y \to \eta} \int_{\mathfrak{M}} \varphi(t, y) f(t)\, dt = \int_{\mathfrak{M}} \Phi(t) f(t)\, dt.$$

Beweis: Bei festem $f(t)$ der Klasse C_τ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so daß für jedes y der δ-Umgebung von η

(38) $\varphi(t, y)$ über $\mathfrak{M}_\delta$ absolut integrierbar und $\int_{\mathfrak{M}_\delta} |\varphi(t, y) f(t)|\, dt < \varepsilon$

ist. Auf $\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_\delta$ genügt $\varphi(t, y)$ den Bedingungen von Satz I. Hiernach und nach (38) existiert also $\lim_{y \to \eta} g(y)$, d. h. die Bedingungen 1, 2′ und 3′ sind hinreichend.

Daß mindestens die *gewöhnliche Integrierbarkeit* von $\varphi(t, y)$ im behaupteten Umfang für die Existenz von $g(y)$ bei jedem $f(t)$ der Klasse C_τ *notwendig* ist, ergibt sich so: Wenn bei einem gewissen $\delta > 0$ die Funktion $\varphi(t, y)$ für die Glieder einer in η sich häufenden Punktfolge (y_μ) aus $\mathfrak{Y}$ über $\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_\delta$ nicht integrierbar ist, setzt man

$$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ für } t \text{ von } \mathfrak{M} - \mathfrak{M}_\delta \\ 0 \text{ für } t \text{ von } \mathfrak{M}_\delta. \end{cases} \tag{39}$$

Wenn es aber kein solches $\delta > 0$ gibt und $\varphi(t, y)$ nicht für jedes y einer Umgebung von η über $\mathfrak{M}$ integrierbar ist, so existiert eine in η sich häufende Punktfolge (y_μ) aus $\mathfrak{Y}$ und eine monoton fallende Nullfolge (δ_μ) derart, daß $\varphi(t, y_\mu)$ über $\mathfrak{M}_{\delta_\mu} - \mathfrak{M}_{\delta_{\mu+1}}$ nicht integrierbar ist. Dann setzt man

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu+1} \text{ für } t \text{ von } \mathfrak{M}_{\delta_\mu} - \mathfrak{M}_{\delta_{\mu+1}} \\ 0 \text{ für } t \text{ von } \mathfrak{M} - \mathfrak{M}_{\delta_0}. \end{cases} \tag{40}$$

In jedem dieser Fälle existiert $g(y)$ für die Glieder einer Punktfolge mit dem Häufungspunkt η nicht, wenn entsprechend das in (39) oder (40) definierte $f(t)$ transformiert wird.

Die Notwendigkeit der Bedingung 1 folgt nun vollends aus Behauptung A und B. Die Unabhängigkeit der Bedingungen 1, 2′ und 3′ und die Notwendigkeit von 2′ und 3′ ergibt sich wie beim Beweise von Satz I.

---

[26]) $\mathfrak{M}_\delta$ bedeute die in der δ-Umgebung von τ gelegene Teilmenge von $\mathfrak{M}$; vgl. Fußnote 16.

Wenn eine I-Grenzfunktion $\Phi(t)$ von $\varphi(t, y)$ existiert, so gibt es bei beliebigem, aber festem $f(t)$ der Klasse C_τ zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so daß (38) und

$$\int_{\mathfrak{M}_\vartheta} |\Phi(t) f(t)|\, dt < \varepsilon$$

gilt. Unter Anwendung von Satz I auf $\varphi(t, y)$, $\Phi(t)$ und $\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_\vartheta$ folgt hieraus der auf $\Phi(t)$ sich beziehende Teil der Behauptung.

Satz IV. *Die Bedingungen* 1, 2a′ *und* 3′ *sind notwendig und hinreichend dafür, daß für jedes $f(t)$ der Klasse C_τ das zugehörige $g(y)$ in einer Umgebung von η existiert und daß* $\lim_{y \to \eta} g(y) = 0$ *ist.*

Der Satz folgt aus Satz III entsprechend wie Satz II aus Satz I.

Satz V. *Die Bedingungen* 1, 2′, 3′ *und* 4 *sind notwendig und hinreichend dafür, daß die Transformation* (I) *konvergenzerhaltend ist.*

Wenn $\Phi(t)$ unter diesen Bedingungen I-Grenzfunktion von $\varphi(t, y)$ auf jedem $\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_\vartheta$ ist, so folgt für jedes für $t \to \tau$ konvergente $f(t)$ die Existenz von $\int_{\mathfrak{M}} \Phi(t) f(t)\, dt$ *und die Beziehung*

$$\lim_{y \to \eta} \int_{\mathfrak{M}} \varphi(t, y) f(t)\, dt = \int_{\mathfrak{M}} \Phi(t) f(t)\, dt + al - a \int_{\mathfrak{M}} \Phi(t)\, dt,$$

wo a den Grenzwert von $f(t)$ für $t \to \tau$ bedeutet.

Beweis: Nach Satz III existiert $\lim_{y \to \eta} \int_{\mathfrak{M}} \varphi(t, y)(f(t) - a)\, dt$, da nach den Voraussetzungen $f(t) - a$ zur Klasse C_τ gehört; also sind die obigen Bedingungen hinreichend.

Die Bedingungen 1, 2′ und 3′ sind nach Satz III auch notwendig, und daß Bedingung 4 notwendig ist, ergibt sich durch Transformation von

$$f(t) = 1 \quad \text{für} \quad t \text{ von } \mathfrak{M}. \tag{41}$$

Weiter ist nach Satz III, wenn eine I-Grenzfunktion $\Phi(t)$ existiert,

$$\lim_{y \to \eta} \int_{\mathfrak{M}} \varphi(t, y)(f(t) - a)\, dt = \int_{\mathfrak{M}} \Phi(t)(f(t) - a)\, dt,$$

woraus die $\Phi(t)$ betreffende Aussage unmittelbar folgt.

Satz VI. *Die Bedingungen* 1, 2a′, 3′ *und* 4′ *sind notwendig und hinreichend dafür, daß für jedes für $t \to \tau$ konvergente $f(t)$ das zugehörige $g(y)$ in einer Umgebung von η existiert und daß* $\lim_{y \to \eta} g(y) = 0$ *ist.*

Satz VII. *Die Bedingungen* 1, 2a′, 3′ *und* 4″ *sind notwendig und hinreichend dafür, daß die Transformation* (I) *regulär ist.*

Satz VI und VII folgen analog aus Satz V wie Satz II aus Satz I. Die Notwendigkeit von Bedingung 4′ bzw. 4″ ergibt sich mit Hilfe von (41).

(Eingegangen am 4. April 1936.)

Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft für das Jahr 1938.

Die auflösbaren abstrakten Gruppen sind bis zur Ordnung 96 bestimmt (vgl. Malmrot, „Studien über Gruppen, deren Ordnung ein Produkt von sechs Primzahlen ist", Diss. Uppsala 1925, und G. A. Miller, Quaterly Journ. of Math. **30** (1898), Amer. Journ. of Math. **52** (1930), Ann. of Math. (2) **31** (1931)), während die nichtauflösbaren bereits bis auf höhere Ordnungszahlen bekannt sind. Nachdem nunmehr P. Hall im Journ. of the London Math. Soc. **3** (1928), S. 98 neue Hilfsmittel geschaffen hat, sollen die sämtlichen abstrakten Gruppen bis zur Ordnungszahl 200 aufgezählt werden.

Einlieferung bis zum 31. 12. 1938. Preis 500 RM. oder die goldene Medaille des fürstlichen Stifters und 250 RM. in bar. Für die Drucklegung der ganzen Arbeit sorgt die Gesellschaft.

Die Bewerbungsschriften sind, in deutscher oder lateinischer Sprache geschrieben, mit einem Kennwort versehen und von der Angabe von Namen und Anschrift des Verfassers in versiegeltem Umschlag begleitet, an den Archivar der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft, Universitätsbibliothek, Leipzig C 1, Beethovenstraße 6 zu richten.

Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen.

Die Automorphismen der unbeschränkten eigentlichen Kreiskörper.

Von

Heinz Zumbusch in Münster i. Westf. *).

In der klassischen Funktionentheorie sind die unbeschränkten, einfach zusammenhängenden Bereiche der z-Ebene entweder auf beschränkte Bereiche abbildbar — also im Rahmen der Funktionentheorie von diesen nicht verschieden — oder jede in ihnen reguläre und beschränkte Funktion ist konstant, wobei die einzigen Bereiche der zweiten Art die volle und die punktierte Ebene sind. Im Raume R_4 der beiden komplexen Veränderlichen w und z sind die Verhältnisse wesentlich komplizierter. Neben diesen beiden Arten von Bereichen gibt es dort noch solche, die nicht auf beschränkte abbildbar sind, in denen jedoch nicht konstante, reguläre und beschränkte Funktionen existieren.

Will man nun die analytischen Abbildungen aller Bereiche des R_4 übersehen, so ergibt sich die Notwendigkeit, diese „wesentlich unbeschränkten" Bereiche auf ihre Automorphismen hin zu untersuchen. Man ist hierbei zur Verwendung neuer Untersuchungsprinzipien gezwungen, da der Cartansche Eindeutigkeitssatz, der einen wichtigen Ausgangspunkt bei der Untersuchung der Abbildungen beschränkter Bereiche bildet, in unbeschränkten Bereichen nicht mehr allgemein gilt.

H. Behnke und E. Peschl [1]) haben zum ersten Male systematisch die einfachste Klasse unbeschränkter Bereiche, die unbeschränkten Reinhardtschen Körper, in diesem Sinne behandelt. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Bestimmung der Automorphismen der unbeschränkten eigentlichen Kreiskörper, die von besonderer Wichtigkeit sind, da wir damit die Abbildungen aller unbeschränkten Bereiche übersehen, die als invariante Konvergenzkörper der Potenzreihen in w und z auftreten können. Es zeigt sich, daß sich die in der erwähnten Arbeit von Behnke-Peschl verwandten Methoden z. T. soweit verallgemeinern lassen, daß sie auch zur

*) Diese Arbeit hat der Philosophischen und Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Münster als Inauguraldissertation vorgelegen.

[1]) H. Behnke und E. Peschl, Die unbeschränkten Reinhardtschen Körper, Math. Annalen 112 (1935), S. 433.

Untersuchung der Kreiskörper benutzt werden können. Die Schwierigkeiten bestehen vor allem darin, daß an die Stelle der leicht übersehbaren Monome und der Ausdrücke $w^\alpha z^\beta$ mit irrationalem $\frac{\alpha}{\beta}$ in unserem Falle homogene Polynome bzw. Produkte der Form

$$(1) \qquad \prod_{i=1}^{n} (a_i w + b_i z)^{\alpha_i} \qquad \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_k} \text{ nicht alle rational}\right)$$

treten, und daß sich ferner die Regularitätsbereiche unter den Kreiskörpern nicht so einfach charakterisieren lassen, wie es dort für die Reinhardtschen Körper gelungen ist.

Wir teilen unsere Bereiche in drei Klassen ein, je nachdem ob es in ihnen keine, eine und (im wesentlichen) nur eine oder wenigstens zwei reguläre, beschränkte und nicht konstante Funktionen gibt. Es läßt sich dann beweisen, daß die Regularitätsbereiche der ersten und zweiten Klasse (allerdings unter gewissen Differentiierbarkeitsvoraussetzungen über den Rand) die Bereiche $|F(w,z)| < C$ sind, wo $F(w,z)$ einmal einen Ausdruck der Form (1), das andere Mal ein homogenes Polynom bedeutet (§ 1). Weiter zeigt sich, daß in allen Bereichen der dritten Klasse in bezug auf die Automorphismen eine Verallgemeinerung des Cartanschen Eindeutigkeitssatzes gilt (§ 4).

Die Regularitätsbereiche unter unseren Körpern — und nur diese brauchen wir ja bei der Bestimmung der Automorphismen zu betrachten — enthalten stets wenigstens eine „Achse", d. h. eine analytische Ebene durch den Mittelpunkt, die bis auf den unendlich fernen Punkt ganz im Bereich liegt. Die Bereiche der Klasse 1 und 2 mit weniger als drei Achsen sind bereits *äquivalent* einem Reinhardtschen Körper, d. h. sie lassen sich durch eine lineare Transformation mittelpunktstreu auf einen solchen abbilden. Für die übrigen Bereiche wird gezeigt, daß alle ihre Automorphismen achsentreu und damit insbesondere nullpunktstreu sind, und es gelingt weiter unter Heranziehung des klassischen Uniformisierungstheorems zu beweisen, daß sie stets linear sein müssen. Bei den Bereichen der dritten Klasse lassen sich wegen des Eindeutigkeitssatzes Methoden benutzen, die den bei beschränkten Bereichen verwandten analog sind. Es ergibt sich, daß alle Automorphismen mittelpunktstreu und linear sind.

Das Ergebnis der vorliegenden Untersuchung kann man kurz so zusammenfassen:

Ist ein unbeschränkter eigentlicher Kreiskörper nicht äquivalent einem Reinhardtschen Körper, so besteht seine Automorphismengruppe aus der Kreiskörpergruppe, kombiniert mit höchstens endlich vielen anderen linearen Transformationen. (Dabei ist allerdings bei den Bereichen der Klasse 1 und 2 die einschränkende Voraussetzung über den Rand gemacht.)

Dieses Ergebnis ist insofern verwunderlich, als Behnke und Peschl bei den unbeschränkten Reinhardtschen Körpern noch Ausnahmekörper erhalten haben, und man könnte vermuten, daß solche bei Körpern mit einer nur einparametrigen Drehungsgruppe erst recht auftreten würden. Das ist aber nicht der Fall.

Inhalt.

Seite

§ 1. Einteilung der Bereiche. Charakterisierung der Regularitätsbereiche 633

§ 2. Die Automorphismen der fast überall glatten Bereiche der Klasse K_1 639

§ 3. Die Automorphismen der fast überall glatten Bereiche der Klasse K_2 642

§ 4. Der Eindeutigkeitssatz in den Bereichen der Klasse K_3 und die Automorphismen dieser Bereiche 644

§ 1.

Einteilung der Bereiche. Charakterisierung der Regularitätsbereiche.

Im folgenden sollen die Automorphismen der unbeschränkten eigentlichen Kreiskörper betrachtet werden, d. h. solcher Körper, die durch die Transformationen der Drehungsgruppe

$$w' = w e^{i\vartheta}, \quad z' = z e^{i\vartheta} \quad (\vartheta \text{ beliebig reell})$$

auf sich abgebildet werden. Die Bereiche sollen eigentlich sein, d. h. (0, 0), der Fixpunkt der Gruppe, soll innerer Punkt sein. Ferner sollen sie auch wirklich unbeschränkt sein, d. h. wenigstens einen Punkt der unendlich fernen Ebene (des komplex-projektiv abgeschossenen R_4) im Innern oder auf dem Rande enthalten.

Da ein Automorphismus eines Bereiches auch stets ein Automorphismus seiner Regularitätshülle ist, können wir uns bei unseren Betrachtungen auf Regularitätsbereiche beschränken.

Nun hat H. Cartan[2]) bewiesen, daß jede in einem (beschränkten oder unbeschränkten) eigentlichen Kreiskörper $\mathfrak{K}$ reguläre Funktion $f(w, z)$ sich in eine in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $\mathfrak{K}$ gleichmäßig konvergente Reihe homogener Polynome entwickeln läßt. Ist

$$f(w, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(w, z)$$

[2]) Les fonctions de deux variables complexes etc., Journ. de Math. (IX), 10, S. 14.

diese Entwicklung, so gilt:

$$P_n(w, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\vartheta} f(w e^{i\vartheta}, z e^{i\vartheta})\, d\vartheta.$$

Diese Reihe konvergiert, wie man unmittelbar sieht, noch im kleinsten $\mathfrak{R}$ umfassenden vollkommenen Kreiskörper. Ein Kreiskörper heißt dabei vollkommen, wenn er mit einem Punkt (w_0, z_0) auch stets alle Punkte $(k w_0, k z_0)$ enthält, wo k eine beliebige komplexe Zahl mit $|k| < 1$ bedeutet. Ferner ergibt sich aus diesem Satze, daß ein eigentlicher Kreiskörper stets schlicht ist.

Ein Kreiskörper kann somit nur dann Regularitätsbereich sein, wenn er vollkommen ist. Daraus ergibt sich unmittelbar:

Satz 1. *In einem unbeschränkten eigentlichen Kreiskörper $\mathfrak{R}$, der Regularitätsbereich ist, gibt es wenigstens eine analytische Ebene durch den Nullpunkt, die ganz oder bis auf den unendlich fernen Punkt in $\mathfrak{R}$ liegt.*

Weiter sieht man sofort:

Satz 2. *Ein eigentlicher Kreiskörper $\mathfrak{R}$, der einen unendlich fernen Punkt im Innern enthält, hat den abgeschlossenen R_4 zur Regularitätshülle.*

In diesem Falle gibt es nämlich unendlich viele analytische Ebenen durch (0, 0), die ganz in $\mathfrak{R}$ liegen. Auf diesen ist jede in $\mathfrak{R}$ reguläre Funktion $f(w, z)$ als Funktion einer Variablen betrachtet, überall regulär, also konstant. $f(w, z)$ müßte somit auf unendlich vielen Ebenen durch (0, 0) denselben konstanten Wert annehmen, was nach dem Vorbereitungssatz nur möglich ist, wenn $f(w, z)$ selbst konstant ist.

Wir wollen im folgenden die analytischen Ebenen durch (0, 0), die bis auf den unendlich fernen Punkt in $\mathfrak{R}$ liegen, als die *Achsen* von $\mathfrak{R}$ bezeichnen.

Sodann teilen wir die zu behandelnden Bereiche in drei Klassen ein:

Klasse K_1: *Jede in $\mathfrak{R}$ reguläre und beschränkte Funktion ist konstant.*

Klasse K_2: *Es gibt in $\mathfrak{R}$ reguläre und beschränkte Funktionen, die nicht konstant sind, aber je zwei dieser Funktionen haben eine identisch verschwindende Funktionaldeterminante. Nach dem Entwicklungssatz gibt es dann auch ein in $\mathfrak{R}$ beschränktes homogenes Polynom.*

Klasse K_3: *Es gibt in $\mathfrak{R}$ wenigstens zwei beschränkte reguläre Funktionen — und damit auch zwei beschränkte Polynome — deren Funktionaldeterminante nicht identisch verschwindet.*

Aus Satz 1 folgt, daß kein unbeschränkter eigentlicher Kreiskörper sich eineindeutig auf einen beschränkten Bereich abbilden läßt. Wäre nämlich

$$w' = f(w, z); \quad z' = g(w, z)$$

eine Abbildung, die dieses leistete, so wären f und g auf den Achsen wenigstens in allen endlichen Punkten regulär und beschränkt, also konstant. Das würde aber bedeuten, daß alle Punkte der Achsen auf einen einzigen Punkt abgebildet würden.

Besitzt ein Bereich unendlich viele Achsen, so gehört er sicher zur Klasse K_1. Denn ist $P(w, z)$ ein beliebiges homogenes Polynom — etwa vom Grade n — so kann man bekanntlich $P(w, z)$ in der Form darstellen:

$$P(w, z) = \prod_{i=1}^{k} (a_i w + b_i z)^{n_i}, \quad n_i \text{ ganz}, \quad \geqq 0, \quad \sum_{i=1}^{k} n_i = n.$$

Man kann nun aber stets eine Achse

$$E: \; w + cz = 0$$

angeben, derart, daß $c \neq \frac{b_i}{a_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Dann wird aber $P(w, z)$ auf E von der Form const. z^n, also beliebig groß.

Wir wollen unsere Betrachtungen auf Bereiche mit endlich vielen Achsen beschränken. Ferner wollen wir in der Klasse K_1 und K_2 nur solche Körper betrachten, deren Rand *fast überall glatt* ist. Darunter ist folgendes zu verstehen.

Der Rand eines Kreiskörpers läßt sich stets darstellen in der Form:

$$|z| = R(s), \qquad s = \frac{w}{z}.$$

Dabei ist $R(s)$ aufzufassen als reelle Funktion von σ und τ, wenn $s = \sigma + i\tau$ gesetzt wird. Da der Körper eigentlich sein soll, gilt stets $R(s) > 0$. In der Umgebung der Ebene $z = 0$ versagt diese Darstellung. Dort kann man aber den Rand angeben durch

$$|w| = R^*(s'), \quad s' = \frac{z}{w}.$$

$R^*(s')$ verhält sich also in der Umgebung von $s' = 0$ wie $|s|\, R(s)$ in der Umgebung von $s = \infty$. Ist $z = 0$ nicht Achse des Körpers — was wir nötigenfalls durch eine homogene lineare Transformation stets erreichen können — so geht also $|s|\, R(s)$ für $s \to \infty$ gegen einen von Null verschiedenen endlichen Wert. Sind die Achsen des Körpers gegeben durch

$$s = s_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

so geht $R(s)$ für $s \to s_i$ gegen ∞.

Die Voraussetzung über den Rand soll nun darin bestehen, daß wir verlangen, daß $R(s)$ abgesehen von den Punkten s_i überall stetige zweite partielle Ableitungen besitzt. Da $\mathfrak{R}$ Regularitätsbereich sein soll, muß dann gelten [3]):

$$\Delta\, \varphi(s) \equiv \Delta \log R(s) \equiv \frac{\partial^2 \varphi(\sigma, \tau)}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 \varphi(\sigma, \tau)}{\partial \tau^2} \leqq 0.$$

[3]) Vgl. Behnke-Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Erg. Math. Grenzgeb. III, 3. (1934), S. 55.

Wir wollen noch verlangen, daß $\Delta\varphi(s)$ in der Umgebung der Punkte s_i beschränkt ist.

Dann gilt in der Umgebung eines solchen Punktes:

$$\varphi(s) = \varkappa_i \log|s - s_i| + \Phi_i(s),$$

wo $\varkappa_i$ eine reelle Konstante < 0 bedeutet, Φ_i eine in s_i noch stetige superharmonische Funktion von σ und τ[4]).

Wir können jetzt beweisen:

Satz 3. *$\mathfrak{R}$ sei ein unbeschränkter eigentlicher Kreiskörper mit fast überall glattem Rand. $\mathfrak{R}$ sei Regularitätsbereich. Dann gehört er entweder zu K_3, oder er ist von der Form:*

$$\left|\prod_{i=1}^{k}(a_i w + b_i z)^{\alpha_i}\right| < C,$$

wobei die α_i reell und > 0 sind. Sind alle Quotienten $\frac{\alpha_i}{\alpha_j}$ rational, so gehört $\mathfrak{R}$ zu K_2, andernfalls zu K_1.

Beweis. Sei $|z| = R(s)$ der Rand, $s = s_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ die Achsen von $\mathfrak{R}$. $z = 0$ sei nicht Achse. Nach den obigen Bemerkungen ist

$$\log R(s) = \sum_{i=1}^{k} - \varkappa_i \log|s - s_i| + \Phi(s) \quad (\varkappa_i > 0),$$

wo Φ eine in der endlichen s-Ebene überall stetige superharmonische Funktion bedeutet.

1. Fall: Es sei $\sum_{i=1}^{k} \varkappa_i < 1$.

Ich wähle k positive rationale Zahlen r_i, die den Bedingungen $r_i \geqq \varkappa_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ und $\sum_{1}^{k} r_i = 1$ genügen. Das ist offenbar noch auf beliebig viele Arten möglich. Ich bilde jetzt den Ausdruck:

$$F(s) = \left|\prod_{i=1}^{k}(s - s_i)^{-r_i}\right|.$$

Dann geht

$$\frac{R(s)}{F(s)} = e^{\Phi(s)} \prod_{i=1}^{k} |s - s_i|^{r_i - \varkappa_i}$$

---

[4]) Vgl. M. Bôcher, Bull. Americ. Math. Soc. IX (1903), S. 455. Der Beweis läßt sich nach den dort gemachten Angaben leicht durchführen. — Auf Grund dieser Tatsache erweist sich die von H. Behnke [Über analytische Funktionen mehrerer Veränderlicher II., Abh. Math. Sem. Hamburg 5 (1927), S. 302 ff.] bei analogen Überlegungen gemachte Voraussetzung, daß in der Umgebung der s_i gelten soll

$$\varkappa \log|s - s_i| + L_1 < \varphi(s) < \varkappa \log|s - s_i| + L_2$$

($\varkappa \leqq 0$, L_1, L_2 reelle Konstanten) als überflüssig.

ei Annäherung an die s_i gegen einen endlichen Wert. Für $s \to \infty$ geht ber sowohl $R(s)$ wie $F(s)$ linear gegen Null. Es gibt also eine Konstante C, so daß

$$\frac{R(s)}{F(s)} < C$$

n der abgeschlossenen s-Ebene. Das heißt aber, daß die Hyperfläche

$$|z| = C \prod_{i=1}^{k} |s - s_i|^{-r_i}$$

ur die unendlich fernen Randpunkte mit $\mathfrak{R}$ gemeinsam hat und sonst anz außerhalb $\mathfrak{R}$ verläuft, oder mit anderen Worten: in $\mathfrak{R}$ gilt

$$|z| \prod_{i=1}^{k} |s - s_i|^{r_i} = \prod_{i=1}^{k} |w - s_i z|^{r_i} < C.$$

Durch Potenzieren mit dem Hauptnenner der r_i erhalten wir also ein n $\mathfrak{R}$ beschränktes homogenes Polynom. Offenbar kann man auf dieselbe Weise beliebig viele solcher Polynome konstruieren, die nicht alle voneinander abhängig sind. Also gehört $\mathfrak{R}$ zu K_3.

2. Fall: Es sei $\sum_{i=1}^{k} \varkappa_i > 1$.

In

$$R(s) = e^{\Phi(s)} \prod_{i=1}^{k} |s - s_i|^{-\varkappa_i}$$

muß jetzt wegen des endlichen Limes von $|s|\,R(s)$ für $s \to \infty$ $\Phi(s)$ gegen ∞ gehen. Dann wäre $\Phi(s)$ eine im Endlichen überall beschränkte superharmonische Funktion, die für $s \to \infty$ über alle Grenzen wächst. Eine solche Funktion kann es aber nicht geben. Denn ist s_0 irgendein endlicher Punkt, und lege ich um s_0 einen genügend großen Kreis, so wird der Mittelwert Φ^* von $\Phi(s)$ auf diesem Kreis beliebig groß, während nach einem allgemeinen Satz über superharmonische Funktionen $\Phi(s_0) \geqq \Phi^*$ sein muß.

Ein Körper dieser Art ist also nie eigentlich.

3. Fall: $\sum_{i=1}^{k} \varkappa_i = 1$.

In

$$R(s) = e^{\Phi(s)} \prod_{i=1}^{k} |s - s_i|^{-\varkappa_i}$$

ist jetzt $\Phi(s)$ eine in der abgeschlossenen s-Ebene beschränkte, stetige, superharmonische Funktion. Wäre sie nicht konstant, so hätte sie irgendwo ein Minimum. Das widerspricht aber dem oben erwähnten Satz über den Mittelwert der superharmonischen Funktionen. $\Phi(s)$ ist also eine Konstante. Sei $e^{\Phi(s)} = C$, so ist somit $\mathfrak{R}$ gegeben durch

$$|z| < \left|C \prod_{i=1}^{k} (s - s_i)^{-\varkappa_i}\right|, \quad \sum_{i=1}^{k} \varkappa_i = 1. \tag{1}$$

$P(w, z)$ sei nun ein in (1) beschränktes homogenes Polynom. Es sei dort etwa $|P(w, z)| < K$, d. h., die Hyperfläche $|P(w, z)| = K$ muß bis auf die unendlich fernen Punkte ganz außerhalb $\mathfrak{R}$ liegen. Wir können diese wieder in der Form darstellen

$$|z| = K' \prod_{i=1}^{l} |s - s_i'|^{-r_i}, \quad r_i \text{ rational}, \quad \sum_{i=1}^{l} r_i \leqq 1.$$

Es muß also sein:

$$\frac{C \prod_{i=1}^{k} |s - s_i|^{-\varkappa_i}}{K' \prod_{i=1}^{l} |s - s_i'|^{-r_i}} < 1,$$

und das geht, wie man leicht sieht, nur wenn $\sum_{i=1}^{l} r_i = 1$, $s_i' = s_i$ und $r_i = \varkappa_i$ ist. Ist nur ein $\varkappa_i$ irrational, so gibt es also kein beschränktes Polynom im Bereich, d. h. der Bereich gehört zu K_1.

Sind andererseits alle $\varkappa_i$ rational, so erhält man aus (1) durch Potenzieren mit dem Hauptnenner der $\varkappa_i$ für $\mathfrak{R}$ die Form:

$$|\prod_{i=1}^{k} (w - s_i z)^{n_i}| < C', \quad n_i \text{ ganz}, > 0.$$

Wie man leicht sieht, kann man auch eine solche Darstellung des Bereiches finden, in der die Exponenten n_i keinen gemeinsamen Teiler haben. Aus den obigen Überlegungen folgt dann unmittelbar, daß — wenn man dieses Polynom mit $P(w, z)$ bezeichnet — jedes weitere in $\mathfrak{R}$ beschränkte homogene Polynom die Form hat:

$$Q(w, z) = \text{const.} \, (P(w, z))^m,$$

wo m ganz und $\geqq 0$ ist. Also gehört der Bereich dann zu K_2.

Lassen wir jetzt auch wieder $z = 0$ als Achse des Körpers zu, so sieht man, daß jeder fast überall glatte Bereich der Klasse K_1 die Form hat:

$$|\prod_{i=1}^{k} (a_i w + b_i z)^{\alpha_i}| < C,$$

wenigstens ein Quotient $\frac{\alpha_i}{\alpha_j}$ irrational und daß die entsprechenden Bereiche aus K_2 gegeben sind durch:

$$|P(w, z)| = |\prod_{i=1}^{k} (a_i w + b_i z)^{n_i}| < C,$$

wobei wir noch $(n_1, n_2, \ldots, n_k) = 1$ voraussetzen können.

In den nächsten beiden Paragraphen sollen die Automorphismen dieser Bereiche bestimmt werden. Dabei können wir noch durch eine Ähnlichkeitstransformation erreichen, daß die Konstante $C = 1$ wird.

§ 2.

Die Automorphismen der fast überall glatten Bereiche der Klasse K_1.

Es handelt sich hier also um die Bereiche:

$$|\prod_{i=1}^{n} (a_i w + b_i z)^{\alpha_i}| < 1,$$

wobei wenigstens ein Quotient $\frac{\alpha_i}{\alpha_k}$ als irrational vorausgesetzt wird. Wir dürfen annehmen, daß der Körper wenigstens drei Achsen besitzt, da er sich andernfalls durch eine homogene lineare Transformation auf einen Reinhardtschen Körper der Form $|w| < 1$ bzw. $|w^\alpha z^\beta| < 1$ $\left(\frac{\alpha}{\beta} \text{ irrational}\right)$ abbilden läßt, deren Automorphismen bereits in der oben zitierten Arbeit von H. Behnke und E. Peschl angegeben sind.

Wir beweisen zunächst:

Satz 4. *Bei allen Automorphismen der Bereiche K_1 mit mehr als einer Achse werden die Achsen wieder auf Achsen abgebildet. Die Automorphismen sind also stets nullpunktstreu.*

Beweis[5]). Es ist leicht einzusehen, daß es bei jedem Automorphismus

$$w' = f(w, z); \qquad z' = g(w, z)$$

auf jeder Achse wenigstens einen Punkt gibt, der wieder in einen Achsenpunkt übergeht. Denn nehmen wir an, das sei auf der Achse $a_r w + b_r z = 0$ nicht der Fall, so wäre die Funktion

$$F(z) = \prod_{i=1}^{n} \left(a_i f\left(-\frac{b_r}{a_r} z, z\right) + b_i g\left(-\frac{b_r}{a_r} z, z\right)\right)^{\alpha_i}$$

in der ganzen endlichen z-Ebene regulär und beschränkt, also konstant. Das würde aber bedeuten, daß die Ebene $a_r w + b_r z = 0$ abgebildet wird auf eine Fläche

$$\prod_{i=1}^{n} (a_i w + b_i z)^{\alpha_i} = \text{const.},$$

und das ist nicht möglich, da eine solche Fläche stets jeden Punkt der Hyperfläche

$$|\prod_{i=1}^{n} (a_i w + b_i z)^{\alpha_i}| = |\text{const.}|$$

zum Häufungspunkt hat, unsere Ebene also auf diese dreidimensionale Hyperfläche abgebildet würde, was dem topologischen Charakter des Automorphismus widerspricht.

Es gibt somit auf der betrachteten Ebene einen Punkt z_0, in dem die oben angeschriebene Funktion $F(z)$ verschwindet und daher eine positive

---

[5]) Vgl. Behnke-Peschl, l. c. [1]).

Zahl ε, derart daß

$$\frac{F(z)}{(z-z_0)^\varepsilon}$$

in der Umgebung von z_0 beschränkt bleibt. Die Funktion

$$\psi(x, y) = \log\left|\frac{F(z)}{(z-z_0)^\varepsilon}\right| \qquad (z = x + iy)$$

ist überall da, wo der Zähler nicht verschwindet, harmonisch regulär. Bei Annäherung an die Punkte, in denen $F(z)$ verschwindet, geht sie gegen $-\infty$, in z_0 selbst ist sie entweder noch regulär, oder geht dort auch gegen $-\infty$. $\psi(x, y)$ ist ferner eindeutig. Also nimmt $\psi(x, y)$ in einem Kreis um z_0 das Maximum auf dem Rande an. Nun ist aber auf $|z - z_0| = R$:

$$\text{Max } \psi(x, y) = \text{Max } \log|F(z)| - \varepsilon \log R.$$

Der erste Ausdruck rechts ist wegen $|F(z)| < 1$ negativ, d. h. $\psi(x, y)$ ist für alle (x, y) kleiner als jede negative Zahl mit noch so großem Absolutbetrag, was nur möglich ist, wenn $F(z) \equiv 0$.

Das bedeutet aber, daß die Bildpunkte aller Achsenpunkte wieder Achsenpunkte sind. Wie dann die Betrachtung des zum gegebenen inversen Automorphismus zeigt, können andererseits auf den Achsen nur Bildpunkte von Achsenpunkten liegen. Also werden die Achsen untereinander abgebildet. Insbesondere bleibt der Nullpunkt als einziger auf allen Achsen gelegener Punkt stets fest.

Satz 5. *Die Automorphismen der fast überall glatten Bereiche aus K_1 sind ganz linear.*

Beweis[6]). Unbeschadet der Allgemeinheit können wir voraussetzen, daß $z = 0$ Achse von $\mathfrak{R}$ ist. $\mathfrak{R}$ sei gegeben durch

$$(1) \qquad |z^\alpha \prod_{i=1}^{n} (a_i w + b_i z)^{\alpha_i}| < 1,$$

und dabei können wir es noch so einrichten, daß

$$\alpha + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$$

ist. Ferner läßt sich durch eine lineare Transformation noch stets erreichen, daß (1) die Form annimmt:

$$(2) \qquad |z^\alpha \prod_{i=1}^{n} (w - s_i z)^{\alpha_i}| < 1.$$

Mit $s = \frac{w}{z}$ ergibt sich dann aus (2):

$$|z \prod_{i=1}^{n} (s - s_i)^{\alpha_i}| < 1.$$

[6]) Die Anregung zu diesem einfachen Beweis verdanke ich Herrn E. Peschl.

Unter $\mathfrak{R}'$ wollen wir den Bereich verstehen, der aus $\mathfrak{R}$ durch Herausnahme der Achsen entsteht. Sei E' die in $s_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ und ∞ punktierte s-Ebene, E^* die universelle Überlagerungsfläche von E'. Da $n \geqq 2$, gibt es eine Funktion

$$\sigma = g(s),$$

die E^* eineindeutig und analytisch auf $|\sigma| < 1$ abbildet. Setzen wir

$$u = z \prod_{i=1}^{n} (s - s_i)^{\alpha_i} = z f(s),$$

so gibt es einen Überlagerungsbereich $\mathfrak{R}^*$ von $\mathfrak{R}'$, in dem

(3) $$u = z f(s) \quad \text{und} \quad \sigma = g(s)$$

eindeutig und regulär sind, und der überdies durch die beiden Funktionen (3) eineindeutig abgebildet wird auf den *schlichten* Bereich $\mathfrak{B}$:

$$0 < |u| < 1, \quad |\sigma| < 1.$$

Denn $s = g^{-1}(\sigma)$ ist in $|\sigma| < 1$, also auch in $\mathfrak{B}$, eindeutig und regulär, und das gleiche gilt für

$$z = u \frac{1}{f(s)} = u \frac{1}{f(g^{-1}(\sigma))},$$

da $g^{-1}(\sigma)$ in $|\sigma| < 1$ die Werte s_i ausläßt, also $f(s)$ dort überall regulär ist.

Wegen Satz 4 hat nun aber jeder Automorphismus von $\mathfrak{R}$ auch einen solchen von $\mathfrak{R}'$ und damit von $\mathfrak{R}^*$ und so schließlich auch von $\mathfrak{B}$ zur Folge. Die einzigen Automorphismen von $\mathfrak{B}$ sind aber [7]):

$$u' = u e^{i\vartheta}; \quad \sigma' = \frac{\sigma + \sigma_0}{1 + \bar{\sigma}_0 \sigma} e^{i\varphi}.$$

Durch eine Kreiskörperdrehung können wir noch erreichen, daß $u' = u$ wird. Für den Automorphismus von $\mathfrak{R}$ ergibt sich daraus:

$$\frac{w'}{z'} = s' = g^{-1}(\sigma') = g^{-1}\left(\frac{g(s) + \sigma_0}{1 + \bar{\sigma}_0 g(s)} e^{i\varphi}\right) = F(s).$$

Da $F(s)$ E' eineindeutig auf sich abbilden muß, ist notwendig:

$$F(s) = \frac{\alpha s + \beta}{\gamma s + \delta}.$$

Aus $u' = u$ folgt weiter:

$$z' f(s') = z f(s)$$

also

$$z' = z \frac{f(s)}{f(F(s))} = z \psi_1(s)$$

und

$$w' = z' s' = z \frac{f(s)}{f(F(s))} F(s) = z \psi_2(s).$$

---

[7]) Die Gesamtheit der Automorphismen von $\mathfrak{B}$ wird nämlich gebildet von den Automorphismen des Dizylinders $|u| < 1$, $|\sigma| < 1$, die $u = 0$ auf sich abbilden.

Da aber w' und z' in der Umgebung von $(0, 0)$ als Funktionen von w und z regulär sind, können $\psi_1(s)$ und $\psi_2(s)$ höchstens auf der Achse $z = 0$, d. h. für $s = \infty$, einen Pol erster Ordnung haben und müssen für alle anderen s regulär sein. Also haben wir:

$$w' = z(a\,s + b) = a\,w + b\,z,$$
$$z' = z(c\,s + d) = c\,w + d\,z,$$

w. z. b. w.

Ist jetzt

$$T_1\colon \quad w' = a_1 w + b_1 z; \quad z' = c_1 w + d_1 z$$

ein Automorphismus von $\mathfrak{R}$, der die Achsen in einer bestimmten Weise untereinander vertauscht und

$$T_2\colon \quad w' = a_2 w + b_2 z; \quad z' = c_2 w + d_2 z$$

ein weiterer Automorphismus, der dieselbe Achsenpermutation vornimmt, so sind

$$s' = \frac{a_1 s + b_1}{c_1 s + d_1} \quad \text{und} \quad s' = \frac{a_2 s + b_2}{c_2 s + d_2} \quad \left(s = \frac{w}{z}, \quad s' = \frac{w'}{z'}\right)$$

zwei Möbiustransformationen, die n ($\geqq 3$) Punkte in ein und derselben Weise untereinander vertauschen. Sie sind also identisch. Daraus folgt:

$$a_2 w + b_2 z = C(a_1 w + b_1 z),$$
$$c_2 w + d_2 z = C(c_1 w + d_1 z)$$

und es muß $|C| = 1$ sein, da sonst T_2 den Rand von $\mathfrak{R}$ nicht auf sich abbildet. Damit haben wir bewiesen:

Satz 6. *Die Automorphismengruppe der fast überall glatten Bereiche aus K_1 besteht aus der Kreiskörpergruppe, kombiniert mit höchstens endlich vielen homogenen linearen Transformationen anderer Art, falls die Bereiche wenigstens drei Achsen besitzen. Haben sie weniger als drei Achsen, so sind sie äquivalent zu Reinhardtschen Körpern.*

§ 3.

Die Automorphismen der fast überall glatten Bereiche der Klasse K_2.

Nach den Überlegungen von § 1 haben wir hier nur noch die Bereiche

$$|P(w, z)| < 1$$

zu betrachten, wo

$$P(w, z) = \prod_{i=1}^{k} (a_i w + b_i z)^{n_i}$$

ein homogenes Polynom ist und $(n_1, n_2, \ldots, n_k) = 1$ angenommen werden kann. Ferner dürfen wir ebenso wie in § 2 voraussetzen, daß der Bereich wenigstens drei Achsen besitzt, da er andernfalls äquivalent einem Reinhardtschen Körper ist.

Wir beweisen auch hier zunächst wieder:

Satz 7. *Ist $\mathfrak{R}$ ein fast überall glatter Bereich der Klasse K_2 mit wenigstens zwei Achsen, so führen alle Automorphismen Achsen wieder in Achsen über. Alle Automorphismen sind also nullpunktstreu.*

Beweis. Jede in $\mathfrak{R}$ reguläre und beschränkte Funktion $f(w, z)$ ist eine in $|u| < 1$ reguläre Funktion von $u = P(w, z)$. Denn $f(w, z)$ läßt sich in eine in $\mathfrak{R}$ gleichmäßig konvergente Reihe homogener Polynome entwickeln. Ist

$$f(w, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu(w, z)$$

diese Entwicklung, so sind die Q_ν in $\mathfrak{R}$ beschränkte homogene Polynome. Also gilt nach § 1:

$$Q_\nu(w, z) = c_\nu (P(w, z))^{m_\nu},$$

und die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu u^{m_\nu}$$

konvergiert in $|u| < 1$, stellt dort also eine analytische Funktion $F(u)$ dar.

Ist nun

$$w' = f(w, z); \quad z' = g(w, z)$$

ein Automorphismus von $\mathfrak{R}$, so ist nach der obigen Überlegung

$$P(w', z') = P(f(w, z),\ g(w, z))$$

identisch mit einer Funktion von u allein, also auf den Flächen $P(w, z) = \text{const.}$ konstant. Jede dieser Flächen wird also wieder auf eine solche Fläche abgebildet.

Ich behaupte weiter, daß unter der oben gemachten Voraussetzung $(n_1, n_2, \ldots, n_k) = 1$ durch

$$P(w, z) = c \tag{1}$$

für jedes $c \neq 0$ eine einzige irreduzible Fläche dargestellt wird. Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß $z = 0$ nicht Achse sei. Dann folgt aus (1):

$$z^n = c \prod_{i=1}^{k} (a_i s + b_i)^{-n_i}$$

mit $s = \frac{w}{z}$, $n = \Sigma n_i$. Löst man in der Umgebung eines Punktes s_i, der von den Punkten $-\frac{b_i}{a_i}$ verschieden ist, nach z hin auf, so erhält man n verschiedene Funktionselemente, und man sieht leicht ein, daß man von einem von diesen ausgehend wegen der Teilerfremdheit der n_i durch geeignete Umlaufung der Verzweigungspunkte zu allen $(n - 1)$ übrigen gelangen kann. Damit ist aber die Irreduzibilität bewiesen.

$P(w, z) = 0$ muß somit als einziges zerfallendes Gebilde unter den Flächen $P(w, z) = \text{const.}$ notwendig bei einem Automorphismus von $\mathfrak{R}$ auf sich abgebildet werden, was bewiesen werden sollte.

Mit diesem Satz ist aber bereits alles bewiesen; denn die Beweise von Satz 5 und Satz 6 aus § 2 gelten wörtlich auch für unsere Bereiche K_2. Damit haben wir:

Satz 8. *Hat ein fast überall glatter Bereich der Klasse K_2 wenigstens drei Achsen, so besteht seine Automorphismengruppe aus der Kreiskörpergruppe, kombiniert mit höchstens endlich vielen anderen homogenen linearen Transformationen. Hat der Bereich weniger als drei Achsen, so ist er bereits einem Reinhardtschen Körper äquivalent.*

§ 4.

Der Eindeutigkeitssatz in den Bereichen der Klasse K_3 und die Automorphismen dieser Bereiche.

Wir beweisen zunächst eine Verallgemeinerung des Cartanschen Eindeutigkeitssatzes:

Satz 9. *$\mathfrak{B}$ sei ein beliebiger unbeschränkter Bereich, der $(0, 0)$ als inneren Punkt enthält und in dem es zwei beschränkte homogene Polynome mit nicht identisch verschwindender Funktionaldeterminante gibt. T sei eine Transformation, die $\mathfrak{B}$ nullpunktstreu auf einen inneren Bereich abbildet. In $(0, 0)$ habe die Funktionalmatrix von T die Gestalt*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist T die Identität.

Beweis. Die beiden Funktionen von T lassen sich in dem größten Kreiskörper $\mathfrak{R}$ um $(0, 0)$, der noch in $\mathfrak{B}$ Platz hat, in eine Reihe homogener Polynome entwickeln. Es sei

$$w' = w + R(w, z) + \ldots; \quad z' = z + S(w, z) + \ldots.$$

Dabei sollen R und S nächst w und z die Polynome niedrigsten Grades in diesen Entwicklungen sein, die nicht identisch verschwinden. Die Transformation, die durch k-fache Iteration aus T hervorgeht, hat dann in $\mathfrak{R}$ die Entwicklung:

$$(1) \qquad w^{(k)} = w + k\,R(w, z) + \ldots; \quad z^{(k)} = z + k\,S(w, z) + \ldots.$$

Ferner seien

$$P(w, z) = \prod_{i=1}^{n} (a_i w + b_i z) \quad \text{und} \quad Q(w, z) = \prod_{i=1}^{m} (c_i w + d_i z)$$

zwei in $\mathfrak{B}$ beschränkte homogene Polynome mit nicht identisch verschwindender Funktionaldeterminante. (Der besseren Übersicht halber

seien die Produktzerlegungen so geschrieben, daß eventuell vorkommende gleiche Linearfaktoren entsprechend oft gezählt werden.) Die Funktionen

$$F_k(w, z) = P(w^{(k)}, z^{(k)}), \quad G_k(w, z) = Q(w^{(k)}, z^{(k)}) \tag{2}$$

sind in $\mathfrak{B}$ und damit auch in $\mathfrak{R}$ gleichmäßig beschränkt. Dasselbe gilt dann auch, wie aus der Integraldarstellung unmittelbar hervorgeht, in $\mathfrak{R}$ für die homogenen Polynome ihrer Diagonalentwicklung. Diese beginne etwa:

$$F_k(w, z) = A_1^{(k)}(w, z) + A_2^{(k)}(w, z) + \ldots,$$
$$G_k(w, z) = B_1^{(k)}(w, z) + B_2^{(k)}(w, z) + \ldots.$$

Setzt man (1) in (2) ein, so sieht man, daß bei der Ausmultiplikation sicher folgende Glieder auftreten:

$$F_k(w, z) = \prod_{i=1}^{n}(a_i w + b_i z) + \sum_{r=1}^{n} a_r k R(w, z) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{n}(a_i w + b_i z)$$
$$+ \sum_{r=1}^{n} b_r k S(w, z) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{n}(a_i w + b_i z) + \ldots$$
$$= P(w, z) + k \frac{\partial P}{\partial w} R(w, z) + k \frac{\partial P}{\partial z} S(w, z) + \ldots$$

und entsprechend:

$$G_k(w, z) = Q(w, z) + k \frac{\partial Q}{\partial w} R(w, z) + k \frac{\partial Q}{\partial z} S(w, z) + \ldots.$$

Nun sieht man: Ist der Grad von R kleiner als der von S, so ist

$$A_2^{(k)} = k R \frac{\partial P}{\partial w} \quad \text{und} \quad B_2^{(k)} = k R \frac{\partial Q}{\partial w},$$

und da $\frac{\partial P}{\partial w}$ und $\frac{\partial Q}{\partial w}$ nach Voraussetzung nicht beide identisch verschwinden, können $A_2^{(k)}$ und $B_2^{(k)}$ also nur dann für alle k gleichmäßig beschränkt sein, wenn R identisch verschwindet, im Widerspruch zur Annahme. — Der Fall, daß der Grad von R größer ist als der von S, erledigt sich genau entsprechend. — Haben aber R und S den gleichen Grad, so ist

$$A_2^{(k)} = k\left(R \frac{\partial P}{\partial w} + S \frac{\partial P}{\partial z}\right) \quad \text{und} \quad B_2^{(k)} = k\left(R \frac{\partial Q}{\partial w} + S \frac{\partial Q}{\partial z}\right).$$

Jetzt muß also sein:

$$R \frac{\partial P}{\partial w} + S \frac{\partial P}{\partial z} \equiv 0 \quad \text{und} \quad R \frac{\partial Q}{\partial w} + S \frac{\partial Q}{\partial z} \equiv 0,$$

was wegen

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial w} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial w} & \frac{\partial Q}{\partial z} \end{vmatrix} \not\equiv 0$$

nur für $R \equiv S \equiv 0$ erfüllbar ist.

In der Diagonalentwicklung von w' und z' kann es also kein von w bzw. z verschiedenes homogenes Polynom geben, das nicht identisch Null wäre. Damit ist unser Satz bewiesen.

Aus der Gültigkeit des Eindeutigkeitssatzes in unseren Bereichen K_3 können wir jetzt in derselben Weise wie bei den beschränkten Kreiskörpern[8]) folgern:

Satz 10. *Alle nullpunktstreuen Automorphismen der Bereiche K_3 sind linear.*

Ist nämlich A ein solcher Automorphismus, $T(\vartheta)$ eine beliebige Kreiskörperdrehung, so hat für alle ϑ die Transformation

$$S = A\,T(\vartheta)\,A^{-1}\,T(-\vartheta)$$

die Entwicklung

$$w' = w + \ldots; \quad z' = z + \ldots,$$

ist also die Identität. Somit gilt:

$$A\,T(\vartheta) = T(\vartheta)\,A,$$

d. h. wenn A gegeben ist durch $w' = f(w, z)$; $z' = g(w, z)$, so ist für alle ϑ:

$$f(we^{i\vartheta}, ze^{i\vartheta}) = e^{i\vartheta} f(w, z); \quad g(we^{i\vartheta}, ze^{i\vartheta}) = e^{i\vartheta} g(w, z),$$

woraus die Linearität von $f(w, z)$ und $g(w, z)$ durch Differentiation folgt.

Weiter gilt bei den Bereichen der Klasse K_3, wie es auch bei den Bereichen aus K_1 und K_2 der Fall war:

Satz 11. *Bei den Automorphismen der Bereiche K_3 gehen Achsen wieder in Achsen über.*

Beweis. Seien

$$P(w, z) = \prod_{i=1}^{k} (a_i w + b_i z)^{n_i}, \quad Q(w, z) = \prod_{i=1}^{l} (c_i w + d_i z)^{m_i}$$

zwei in $\mathfrak{K}$ beschränkte homogene Polynome mit nicht identisch verschwindender Funktionaldeterminante,

$$w' = f(w, z), \quad z' = g(w, z)$$

ein Automorphismus. Auf der Achse E: $Aw + Bz = 0$ stellen sich dann $f(w, z)$ und $g(w, z)$ als zwei Funktionen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ dar, die für alle endlichen z regulär sind. (Ist E die Ebene $z = 0$, so gelten die gleichen Überlegungen mit w als Veränderlicher.) Die Funktionen

$$F(z) = P(\varphi(z), \psi(z)) \quad \text{und} \quad G(z) = Q(\varphi(z), \psi(z))$$

sind dann für alle endlichen z regulär und beschränkt, also konstant. Es sei

$$F(z) \equiv C_1, \quad G(z) \equiv C_2.$$

---

[8]) Vgl. Behnke-Thullen, l. c. [3]), S. 94.

Wegen der Eineindeutigkeit können $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ nicht beide identisch verschwinden. Es sei $\varphi(z_0) \neq 0$. Dann kann man in der Umgebung von z_0 schreiben:

$$F(z) = \varphi^n \prod_{i=1}^{k} (a_i + b_i \chi(z))^{n_i}; \quad G(z) = \varphi^m \prod_{i=1}^{l} (c_i + d_i \chi(z))^{m_i}$$

mit

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i, \qquad m = \sum_{i=1}^{l} m_i, \qquad \chi(z) = \frac{\psi(z)}{\varphi(z)},$$

und daraus folgt

$$C_2^n \Big(\prod_{i=1}^{k} (a_i + b_i \chi(z))^{n_i} \Big)^m = C_1^m \Big(\prod_{i=1}^{l} (c_i + d_i \chi(z))^{m_i} \Big) . \tag{3}$$

Wir dürfen annehmen, daß $\chi(z)$ nicht konstant ist; denn das würde bedeuten, daß alle Bildpunkte von E auf einer analytischen Ebene durch den Nullpunkt lägen. Diese müßte dann notwendig eine Achse sein, so daß alles bewiesen wäre. Ist aber $\chi(z)$ nicht konstant, so bedeutet Gleichung (3), daß zwei Polynome in $s = \chi(z)$ in einer vollen Umgebung von $s_0 = \chi(z_0)$ übereinstimmen. Das geht aber nur, wenn sie identisch sind, d. h. wenn links und rechts bis auf einen Proportionalitätsfaktor jeweils dieselben Linearfaktoren stehen. Dann würde aber für alle w und z gelten:

$$(P(w, z))^m = \text{const.} \, (Q(w, z))^n$$

und P und Q wären voneinander abhängig, was nach Voraussetzung nicht der Fall sein sollte. Also müssen C_1 und C_2 verschwinden, d. h. das Bild von E ist wieder eine Achse.

In Satz 10 war gezeigt worden, daß die mittelpunktstreuen Automorphismen unserer Bereiche ganz linear sind. Jetzt können wir weiter beweisen:

Satz 12. *Die Gruppe der nullpunktstreuen Automorphismen eines Bereiches K_3 mit mindestens drei Achsen besteht aus den Kreiskörperdrehungen, kombiniert mit höchstens endlich vielen anderen homogenen linearen Transformationen.*

Beweis. In der gleichen Weise wie auf S. 642 ergibt sich, daß zwei Transformationen T_1 und T_2, die dieselbe Achsenpermutation vornehmen, sich nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden. Dann ist aber $S = T_2 T_1^{-1}$ ein Automorphismus der Gestalt:

$$w' = c\,w; \qquad z' = c\,z.$$

Da mit S auch S^k: $w' = c^k w$; $z' = c^k z$ für alle k ein Automorphismus ist, kann nicht $|c| > 1$ sein. Ebenso ist $(S^{-1})^k$: $w' = \frac{1}{c^k} w$; $z' = \frac{1}{c^k} z$ stets ein Automorphismus. Also ist auch $|c| < 1$ unmöglich. Somit ist $|c| = 1$ und damit alles bewiesen.

Für die übrigen Bereiche der Klasse K_3 zeigen wir:

Satz 13. *Die Gruppe der mittelpunktstreuen Automorphismen eines Bereiches K_3, der weniger als drei Achsen besitzt, ist entweder ebenfalls von der im vorigen Satz beschriebenen Struktur, oder der Bereich ist äquivalent einem Reinhardtschen Körper.*

Beweis. a) Der Bereich hat zwei Achsen.

Wir dürfen annehmen, daß das die Ebenen $w = 0$ und $z = 0$ sind, da sich das gegebenenfalls durch eine homogene lineare Transformation stets erreichen läßt. Die nullpunktstreuen Automorphismen unseres Bereiches $\mathfrak{R}$ haben dann notwendig die Form:

(4a) $$w' = \alpha w; \quad z' = \beta z$$

oder

(4b) $$w' = \alpha z; \quad z' = \beta w.$$

Alle in $\mathfrak{R}$ beschränkten homogenen Polynome enthalten sicher w und z als Linearfaktoren in der Produktzerlegung.

$$P(w, z) = w^{n_1} z^{n_2} \prod_{i=3}^{k} (a_i w + b_i z)^{n_i}$$

und

$$Q(w, z) = w^{m_1} z^{m_2} \prod_{i=3}^{l} (c_i w + d_i z)^{m_i}$$

seien zwei solche Polynome. Dann sind aber sicher auch die beiden Monome

$$w^{n_1} z^{n_2} \quad \text{und} \quad w^{m_1} z^{m_2}$$

in $\mathfrak{R}$ beschränkt. Nehmen wir zunächst an, daß P und Q so gefunden werden können, daß

$$n_1 m_2 - n_2 m_1 \neq 0.$$

Dann gibt es aber schon zwei in $\mathfrak{R}$ beschränkte Monome

$$w^{n_1'} z^{n_2'}, \quad w^{m_1'} z^{m_2'}$$

mit $|n_1' m_2' - n_2' m_1'| = 1$ [9]). Die Iteration der Transformationen (4a) und ihrer Inversen zeigt dann sofort, daß $|\alpha| = |\beta| = 1$ sein muß.

Gilt andererseits für zwei beschränkte Polynome P und Q stets

$$n_1 m_2 - n_2 m_1 = 0,$$

so können wir zwei beschränkte Polynome in der Form angeben:

$$w^{n_1'} z^{n_2'}; \quad w^{n_1'} z^{n_2'} (a_3 w + b_3 z).$$

Die Iteration der Automorphismen liefert jetzt im Falle (4a) die Bedingungen:

$$|\alpha^{n_1'} \beta^{n_2'}| = 1, \quad |\alpha^{n_1'+1} \beta^{n_2'}| = 1, \quad |\alpha^{n_1'} \beta^{n_2'+1}| = 1,$$

woraus $|\alpha| = |\beta| = 1$ folgt.

---

[9]) Vgl. Behnke-Peschl, l. c. [1]), S. 443.

Die mittelpunktstreuen Transformationen von $\mathfrak{R}$ haben also im Falle (4a) stets die Form:

$$w' = e^{i\vartheta} w; \quad z' = e^{i\varphi} z. \tag{5a}$$

Läßt $\mathfrak{R}$ auch Transformationen (4b) zu, so sieht man, daß das Produkt zweier solcher einen Automorphismus der Form (4a) liefert und daraus ergibt sich sogleich, daß alle eventuellen Automorphismen (4b) die Gestalt haben:

$$w' = R e^{i\vartheta} z; \quad z' = \frac{1}{R} e^{i\varphi} w \tag{5b}$$

(R eine feste Konstante).

Die spezielle Gestalt unserer Automorphismen läßt nun aber leicht erkennen, daß jede unendliche Menge von mittelpunktstreuen Automorphismen von $\mathfrak{R}$ konvergente Teilfolgen enthält, wobei die Grenztransformationen wieder von der Form (5a) oder (5b) und somit selbst Automorphismen sind. Mit anderen Worten: Die nullpunktstreuen Automorphismen von $\mathfrak{R}$ bilden eine *geschlossene* Gruppe homogener linearer Transformationen. Diese enthält die Untergruppe $w' = e^{i\vartheta} w$, $z' = e^{i\vartheta} z$. Nun hat H. Cartan[10]) bewiesen, daß eine solche Gruppe entweder außer den Kreiskörperdrehungen höchstens noch endlich viele andere Transformationen enthält, oder von mindestens zwei Parametern abhängt und sich durch Anwendung einer homogenen linearen Transformation auf eine Form bringen läßt, in der sie die Gruppe der Reinhardtschen Drehungen als Untergruppe enthält. Damit ist unser Satz für die zweiachsigen Bereiche bewiesen.

b) Der Bereich hat nur eine Achse.

Nehmen wir an, daß $w = 0$ die Achse sei, so geht also $w = 0$ bei allen nullpunktstreuen Automorphismen in sich über. Diese haben also alle die Form:

$$w' = \alpha w; \quad z' = \beta w + \gamma z.$$

Wir sind fertig, wenn wir bewiesen haben, daß die Gruppe geschlossen ist. Im Bereich ist w beschränkt und außerdem sicher noch ein Polynom der Art

$$w^n (a w + b z).$$

Nach Anwendung der Transformation $w' = w$; $z' = a w + b z$ können wir also annehmen, daß in $\mathfrak{R}$ außer w noch ein Monom

$$w^n z \tag{6}$$

beschränkt ist. Man sieht durch Iteration der Automorphismen sofort, daß $|\alpha| = 1$ sein muß. Durch eine Kreiskörperdrehung können wir $\alpha = 1$

[10]) H. Cartan, l. c. [2]), Théor. XXVI.

erreichen. k-fache Iteration liefert dann:

$$w^{(k)} = w; \quad z^{(k)} = w\beta \sum_{i=0}^{k-1} \gamma^i + \gamma^k z,$$

und die Einsetzung in (6) zeigt, daß $|\gamma| = 1$ sein muß. Die nullpunktstreuen Automorphismen unseres Bereiches haben also die Form:

$$w' = e^{i\vartheta} w; \quad z' = \beta w + e^{i\varphi} z.$$

Es kann nun aber sicher keine Folge solcher Automorphismen

$$w'_k = e^{i\vartheta_k} w; \quad z'_k = \beta_k w + e^{i\varphi_k} z$$

geben, für die $|\beta_k|$ über alle Grenzen wächst, da dann $(w'_k)^n z'_k$ nicht beschränkt bleibt. Also liegt $|\beta|$ in allen in Frage kommenden Transformationen unterhalb einer festen Grenze. Dann ist die Gruppe aber sicher geschlossen, womit Satz 13 völlig bewiesen ist.

Nachdem so alle mittelpunktstreuen Automorphismen der Bereiche K_3 erledigt sind, fragt es sich, ob es nicht auch Bereiche dieser Klasse gibt, die nichtmittelpunktstreue Automorphismen zulassen. Wegen Satz 11 kann das für keinen Bereich zutreffen, der mehr als eine Achse besitzt. Wir werden aber nun zeigen, daß es auch keinen einachsigen Bereich gibt, der nicht äquivalent einem Reinhardtschen Körper ist und nichtmittelpunktstreue Automorphismen gestattet. Wir werden dazu eine Methode verwenden, die zuerst von H. Cartan[11]) zur Bestimmung der nichtmittelpunktstreuen Automorphismen der beschränkten Kreiskörper angewandt wurde. Wir können dabei den betreffenden Teil des Cartanschen Beweisganges fast wörtlich übernehmen.

Setzen wir wieder voraus, daß $w = 0$ die Achse unseres Bereiches $\mathfrak{R}$ sei und daß ferner ein Monom $w^n z$ in $\mathfrak{R}$ beschränkt ist. Es möge einen Automorphismus S_0 geben, der $(0, 0)$ in einen von $(0, 0)$ verschiedenen Punkt (w_0, z_0) wirft. Wegen Satz 11 ist dann notwendig $w_0 = 0$.

$T(\vartheta)$ sei die Kreiskörpergruppe. Sie wird erzeugt durch die infinitesimale Transformation

$$A = iw \frac{\partial f}{\partial w} + iz \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Ferner ist $S_0 T(\vartheta) S_0^{-1}$ eine einparametrige Gruppe mit dem Fixpunkt $(0, z_0)$. Die erzeugende infinitesimale Transformation sei

$$B = \xi(w, z) \frac{\partial f}{\partial w} + \eta(w, z) \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Es folgt dann genau wie bei Cartan, daß $\xi(w, z)$ und $\eta(w, z)$ Polynome zweiten Grades sind. Bezeichnen wir ihre konstanten Glieder mit ξ_0

---

[11]) H. Cartan, Sur les transformations analytiques des domaines cerclés et semi-cerclés bornés. Math. Annalen 106 (1932), S. 540, insbesondere S. 552 ff.

bzw. η_0, ihre quadratischen Teile mit ξ_2 bzw. η_2, so folgt ebenso, daß die durch

$$C = (\xi_0 + \xi_2)\frac{\partial f}{\partial w} + (\eta_0 + \eta_2)\frac{\partial f}{\partial z}$$

erzeugten Transformationen Automorphismen sind. Das gleiche gilt dann auch für die infinitesimalen Transformationen

$$C_1 = [A, C]$$

und

$$D = \frac{1}{2}[C, C_1] = i\left(\xi_0\frac{\partial \xi_2}{\partial w} + \eta_0\frac{\partial \xi_2}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial w} + i\left(\xi_0\frac{\partial \eta_2}{\partial w} + \eta_0\frac{\partial \eta_2}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Die durch D erzeugte einparametrige Gruppe hat $(0, 0)$ zum Fixpunkt. Die einzige Automorphismengruppe dieser Art ist aber die Kreiskörpergruppe. Also muß sein:

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} \xi_0\dfrac{\partial \xi_2}{\partial w} + \eta_0\dfrac{\partial \xi_2}{\partial z} = 2\mu w, \\ \xi_0\dfrac{\partial \eta_2}{\partial w} + \eta_0\dfrac{\partial \eta_2}{\partial z} = 2\mu z, \end{cases}$$

μ eine reelle Konstante. Da die durch B erzeugte Gruppe $(0, z_0)$ und nur diesen Punkt zum Fixpunkt hat, ist notwendig $\xi_0 = 0$ und $\eta_0 \neq 0$. Wendet man auf den gegebenen Bereich die Transformation

$$w' = w; \quad z' = \frac{1}{\eta_0}z$$

an, so geht er wieder in einen Kreiskörper mit der Achse $w = 0$ über in dem auch w und $w^n z$ beschränkt sind. In C wird dabei $\eta_0 = 1$. Setzen wir nun an:

$$\xi_2 = a_1 w^2 + 2a_2 w z + a_3 z^2,$$

so folgt aus (7):

$$a_2 = \mu; \qquad a_3 = 0.$$

In

$$\eta_2 = b_1 w^2 + 2b_2 w z + b_3 z^2$$

muß wegen (7)

$$b_2 = 0; \qquad b_3 = \mu$$

sein. C nimmt also die Form an:

$$C = (a w^2 + 2\mu w z)\frac{\partial f}{\partial w} + (1 + b w^2 + \mu z^2)\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Wäre jetzt $a = \mu = 0$, so hätte C die Gestalt:

$$(1 + b w^2)\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Dadurch würde die Gruppe erzeugt:

$$w' = w; \qquad z' = z + (1 + b w^2)t.$$

Diese Transformationen müßten also für alle reellen t Automorphismen des Bereiches sein. Ist (w^*, z^*) ein Punkt aus dem Bereich mit $w^* \neq 0$

und $1 + b\,w^{*2} \neq 0$, so kann dort unmöglich

$$w^{*'n} z^{*'} = w^{*n} (z^* + (1 + b\,w^{*2})\,t)$$

beschränkt bleiben für alle t. Also ist entweder μ oder a von Null verschieden. Dann kann man aber unseren Bereich durch eine geeignete Transformation

$$w' = w; \qquad z' = \beta\,w + z$$

auf einen neuen Bereich so abbilden, daß dort C die Form bekommt:

$$C = (a'\,w^2 + 2\,\mu\,w\,z)\,\frac{\partial f}{\partial w} + (1 + \mu\,z^2)\,\frac{\partial f}{\partial z};$$

$a' = a - 2\,\mu\,\beta$. Wäre nun $\mu = 0$, so erhielte man als Automorphismen:

$$w' = \frac{w}{1 - a'\,w\,t}; \qquad z' = z + t. \tag{8}$$

Ist t genügend groß, so gibt es sicher Punkte (w^*, z^*) im Bereich mit $1 - a'\,w^*\,t = 0$. Die Transformationen (8) können also auch keine Automorphismen sein. Ist aber $\mu \neq 0$, so liefert die Integration von $\frac{dz'}{dt} = 1 + \mu\,z'^2$:

$$z' = c\,\frac{z\,(1 + e^{i\vartheta}) + c\,(1 - e^{i\vartheta})}{z\,(1 - e^{i\vartheta}) + c\,(1 + e^{i\vartheta})}$$

mit $\vartheta = 2\sqrt{\mu}\,t$, $c = i\,\mu^{-\frac{1}{2}}$. Es kann aber keine Automorphismengruppe geben, in der z' diese Transformationen durchläuft, da ja die Achse $w = 0$ bis auf den unendlich fernen Punkt im Bereich liegt.

Die durch C erzeugte Gruppe ist also keinesfalls Automorphismengruppe. Unsere Annahme, daß es einen nichtmittelpunktstreuen Automorphismus gibt, ist daher falsch.

Zusammenfassend können wir also sagen:

Satz 14. *Die Bereiche K_3 lassen nur mittelpunktstreue Automorphismen zu, es sei denn, daß sie äquivalent sind zu einer bestimmten Klasse Reinhardtscher Körper*[12]).

[12]) Vgl. Behnke-Peschl, l. c. [1]), S. 461.

(Eingegangen am 25. Februar 1936.)

Über die Integration der Mathieuschen Differentialgleichung durch Laplacesche Integrale.

Von

Artur Erdélyi.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 653

§ 1. Integration der Differentialgleichung durch Laplacesche Integrale. Lösungen dritter Art 655

§ 2. Reihenentwicklung der Belegungsfunktion 656

§ 3. Umlaufssubstitutionen. Lösungen erster Art 658

§ 4. Asymptotische Darstellungen für große Werte von $|x|$ 661

Literaturverzeichnis 663

Einleitung.

Die Lösungen der bei der Behandlung vieler Aufgaben der Astronomie, der mathematischen Physik und der Technik auftretenden Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{d\varphi^2} + (\lambda - 2h^2 \cos 2\varphi)\, y = 0 \quad [1] \tag{1}$$

sind hinsichtlich ihres allgemeinen funktionentheoretischen Verhaltens erstmalig durch Lindemann [10] eingehend untersucht worden. Die allgemeinen von Lindemann erzielten Ergebnisse sind indessen in keiner Weise geeignet, alle Bedürfnisse, insbesondere die der Praxis, zu befriedigen, da die Behandlung von Einzelfragen eine wesentlich genauere Kenntnis der Struktur dieser Funktionen erfordert. Obwohl in dieser Richtung vor allem in den letzten Jahren beachtenswerte Fortschritte erzielt wurden[1]), ist das Verhalten dieser Funktionen immer noch nicht so weitgehend aufgeklärt wie etwa das der ihnen verwandten Besselschen Funktionen. Der Grund hierfür ist vor allem darin zu suchen, daß es bisher nicht gelungen ist, für die Lösungen von (1) ähnlich einfache Integraldarstellungen zu gewinnen, wie sie für die Besselschen Funktionen bekannt sind. Um die in dieser Beziehung vorliegenden Schwierigkeiten

[1]) Vgl. [17], [8], [12] und die an diesen Stellen angeführte Literatur. Die in eckige Klammern gesetzten Zahlen verweisen auf das Literaturverzeichnis.

zu kennzeichnen, möge vor allem bemerkt werden, daß der naheliegende Ansatz der Lösungen der etwa durch die Transformation $z = \cos\varphi$ „rationalisierten" Differentialgleichung (1) in Form von Laplaceschen Integralen keine *Integraldarstellung* ergibt, sondern zu der zuerst von Whittaker [15] angegebenen *Integralgleichung* für die Mathieuschen Funktionen, d. h. für die *periodischen* Lösungen der Differentialgleichung (1) führt. Bei der Suche nach anderen Darstellungen gelang es Dougall [1], ausgehend von den bekannten Reihenentwicklungen der Lösungen von (1) nach Potenzen von $e^{i\varphi}$ eine Integraldarstellung dieser Lösungen herzuleiten, deren „Belegungsfunktion" in Form einer Potenzreihe erscheint mit Koeffizienten, die im wesentlichen aus Koeffizienten der Reihenentwicklungen der Lösungen von (1) aufgebaut sind, also ebenso gut bzw. ebenso wenig bekannt sind, wie diese Reihenentwicklungen selbst. Namentlich enthält der Integrand auch den „charakteristischen Exponenten" der Mathieuschen Differentialgleichung [11], der erst in einer ziemlich verwickelten Weise aus den vorgegebenen Parametern λ und h^2 berechnet werden muß.

Im folgenden werden im Vergleich mit den bisher angegebenen wesentlich einfachere Integraldarstellungen mitgeteilt, die obendrein überblickbare asymptotische Darstellungen der entsprechenden Funktionen gestatten. Diese Darstellungen sind Verallgemeinerungen der klassischen Hankelschen asymptotischen Entwicklungen der Zylinderfunktionen. Um die erwähnten Integraldarstellungen zu gewinnen, führen wir ähnlich wie Dougall[2]) die Differentialgleichung (1) durch die Substitution

$$x = i h e^{i\varphi}$$

in die Form

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{1}{x}\frac{d y}{d x} - \left(1 + \frac{\lambda}{x^2} + \frac{h^4}{x^4}\right) y = 0 \tag{2}$$

über, um aber dann, abweichend von Dougall, ein Fundamentalsystem von Lösungen dieser Differentialgleichung in Anschluß an Arbeiten von Horn über die Integration linearer Differentialgleichungen mittels Laplacescher Integrale[3]) in Form von bestimmten Integralen der Gestalt $\int e^{xz} v(z)\, dz$ aufzustellen. Die „Belegungsfunktion" $v(z)$ genügt einer Volterraschen Integralgleichung, die nach Horn als die Laplacesche Transformierte der ursprünglichen Differentialgleichung, in unserem Falle also der Differentialgleichung (2) bezeichnet wird. Aus der Laplaceschen Transformierten können wir übrigens auch die Potenzreihenentwicklung von $v(z)$ gewinnen. Zum Unterschied von der Belegungsfunktion der

[2]) [1], Vergleiche auch [3].

[3]) [4], [5], [6], [7] u. a. Vergleiche auch das Literaturverzeichnis in [7].

von Dougall angegebenen Integraldarstellungen *enthält die Funktion $v(z)$ den charakteristischen Exponenten der Mathieuschen Differentialgleichung nicht, und das allgemeine Bildungsgesetz der Koeffizienten ihrer Potenzreihenentwicklung kann in allen Einzelheiten angegeben werden.*

Um die Bedeutung der hier auftretenden Lösungen und Integraldarstellungen klarzustellen, vergleichen wir Gleichung (2) mit ihrem einfachsten Sonderfall, der wohlbekannten Besselschen Differentialgleichung ($h = 0$). Dougall stellt die Lösungen erster Art (die also den Besselschen Zylinderfunktionen entsprechen) in den Vordergrund der Betrachtung und gibt für sie Integraldarstellungen an, die den Poissonschen Integraldarstellungen der Besselschen Funktionen entsprechen. Aus den Lösungen erster Art werden dann die Lösungen dritter Art linear zusammengesetzt. Wir wollen hier umgekehrt von den den Hankelschen Zylinderfunktionen entsprechenden Lösungen dritter Art ausgehen, um für sie Integraldarstellungen aufzustellen, die den Sommerfeldschen Integraldarstellungen der Zylinderfunktionen entsprechen. Die Lösungen erster Art erscheinen dann als Linearkombinationen dieser Lösungen dritter Art. Die *Koeffizienten* dieser linearen Zusammensetzungen enthalten allerdings den charakteristischen Exponenten.

Herrn Professor Dr. Rudolf Weyrich danke ich für manche Ratschläge bei der Abfassung dieser Arbeit.

§ 1.

Integration der Differentialgleichung (2) durch Laplacesche Integrale. Lösungen dritter Art.

Für die Differentialgleichung (2) sind die Stellen $x = 0$ und $x = \infty$ Stellen der Unbestimmtheit vom Range 1. Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\alpha^2 - 1 = 0$$

sind

$$\alpha = \pm 1.$$

Ein Integral dieser Differentialgleichung können wir daher nach Horn[4]) in der Form

$$(3) \qquad y_1(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_1^{\infty \cdot \exp i\omega_1} v(z)\, e^{-xz}\, dz \quad [5])$$

[4]) [6] Seite 107. Die Bezeichnungen in diesem Paragraphen wurden in Übereinstimmung mit denen von Horn gewählt.

[5]) Die willkürliche multiplikative Konstante haben wir gleich so angesetzt, daß $y_1(x)$ für $h \to 0$ in eine bekannte Lösung der Besselschen Differentialgleichung mit rein imaginärem Argument, nämlich in $K_{\sqrt{\lambda}}(x)$ übergehe.

ansetzen. Die Belegungsfunktion $v(z)$ muß dann folgender Volterraschen Integralgleichung genügen

$$(z^2-1)\,v(z) = \int_1^z G(z,\zeta)\,v(\zeta)\,d\zeta, \tag{4}$$

deren Kern in der Form erscheint:

$$G(z,\zeta) = \zeta + \lambda(z-\zeta) + \frac{k^4}{6}(z-\zeta)^3.$$

Nach Horn[6]) ist für alle Integrationswege, welche die singulären Punkte von $v(z)$, d. h. die Punkte $z = \pm 1$ nicht enthalten

$$|v(z)| < C\,e^{k|z|} \tag{5}$$

mit einer beliebig kleinen positiven Konstanten k und einer passend gewählten positiven Konstanten C. Infolgedessen definiert das Integral (3) $y_1(x)$ bei einem fest gewählten ω_1 für

$$-\frac{\pi}{2} - \omega_1 < \arg x < \frac{\pi}{2} - \omega_1, \qquad |x| \neq 0.$$

ω_1 kann alle Werte zwischen $-\pi$ und $+\pi$ (die Grenzen ausgeschlossen) annehmen, ohne daß der (etwa als geradlinig gedachte) Integrationsweg durch den singulären Punkt $z = -1$ hindurchgeht. Die Konvergenzhalbebenen der entstehenden Integrale überdecken also den ganzen durch die Ungleichung

$$-\frac{3\pi}{2} < \arg x < \frac{3\pi}{2}$$

erklärten Sektor vom Öffnungswinkel 3π der x-Ebene, so daß $y_1(x)$ durch das Integral (3) für dieses Gebiet definiert erscheint.

$$y_2(x) = y_1(x\cdot e^{-i\pi}) \tag{6}$$

ist eine zweite Lösung der Mathieuschen Differentialgleichung, die durch das entsprechende Laplacesche Integral im Sektor

$$-\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{5\pi}{2}$$

erklärt ist. $y_1(x)$ und $y_2(x)$ sind, wie ihr Verhalten für große Werte von $|x|$ zeigt, linear unabhängig und bilden daher ein Fundamentalsystem von Lösungen. $y_1(x)$ wollen wir als die Lösung dritter Art der Mathieuschen Differentialgleichung bezeichnen[7]).

§ 2.

Reihenentwicklung von $v(z)$.

$v(z)$ wird im Punkte $z = 1$ — einem der beiden im Endlichen gelegenen singulären Stellen der Integralgleichung (4) — unendlich wie

[6]) [6] Seite 106, [4] Seite 321 f., [5] Seite 276.

[7]) Vgl. [12] Seite 44 und [1], wo sie mit $G(\mu, i\sigma)$ bezeichnet wird.

$(z-1)^{-\frac{1}{2}}$. Die Funktion $v(z)\sqrt{z-1}$ bleibt also für $z \to 1$ endlich und gestattet überdies eine Potenzreihenentwicklung in der Umgebung dieser Stelle, deren Konvergenzkreis bis zum nächsten singulären Punkt $z = -1$ reicht und also den Halbmesser 2 besitzt. Insbesondere ergibt sich für den Sonderfall $h = 0$ unter Weglassung einer unwesentlichen multiplikativen Konstanten

$$v(z) = \sqrt{\frac{2}{z-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{\lambda}, n)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} \left(\frac{z-1}{2}\right)^n,$$

wobei in der üblichen Weise das von Hankel eingeführte Symbol

$$(\sqrt{\lambda}, n) = \frac{1}{n!}\left[\lambda - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2\right]\left[\lambda - \left(\tfrac{3}{2}\right)^2\right] \ldots \left[\lambda - \left(n - \tfrac{1}{2}\right)^2\right], \quad (\sqrt{\lambda}, 0) = 1$$

benutzt ist. In dem allgemeinen Falle $h \neq 0$ setzen wir an

$$v(z) = \sqrt{\frac{2}{z-1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(\sqrt{\lambda}, n)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} \left(\frac{z-1}{2}\right)^n, \qquad a_0 = 1. \tag{7}$$

Diese Reihe konvergiert ebenso wie die vorangehende für $|z-1| < 2$. Setzen wir sie in die Integralgleichung (4) ein, so erhalten wir durch Vergleichen der Koeffizienten gleich hoher Potenzen auf beiden Seiten dieser Gleichung

$$a_0 = a_1 = a_2 = 1$$

und für die übrigen Koeffizienten die Rekursionsformel

$$a_n - a_{n-1} - h^4 \gamma(n)\, a_{n-3} = 0,$$

wobei zur Abkürzung

$$\gamma(n) = \frac{4(n-1)(n-2)}{[\lambda - (n-\frac{5}{2})^2][\lambda - (n-\frac{3}{2})^2][\lambda - (n-\frac{1}{2})^2]}$$

gesetzt wurde. Offenbar sind die a_n Polynome vom Grade $\left[\frac{n}{3}\right]$ in h^4 und nehmen für $h = 0$ den Wert 1 an. Aus diesem Grunde können wir setzen

$$a_n = \sum_{k=0}^{[n/3]} a_n^{(k)} h^{4k}, \qquad a_n^{(0)} = 1 \tag{8}$$

und finden durch Eintragen in die Rekursionsformel

$$a_n^{(k)} - a_{n-1}^{(k)} = \gamma(n)\, a_{n-3}^{(k-1)} \qquad (n = 3, 4, 5, \ldots;\ k = 1, 2, 3, \ldots)$$

und hieraus wegen

$$a_0^{(k)} = a_1^{(k)} = a_2^{(k)} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

die neue Beziehung

$$a_n^{(k)} = \sum_{\nu=3}^{n} \gamma(\nu)\, a_{\nu-3}^{(k-1)}$$

aus der sich die Koeffizienten $a_n^{(k)}$ nacheinander in folgender Gestalt ergeben:

$$
\begin{aligned}
a_n^{(1)} &= \sum_{\nu=3}^{n} \gamma(\nu)\, a_{\nu-3}^{(0)} = \sum_{\nu_1=3}^{n} \gamma(\nu_1) \\
a_n^{(2)} &= \sum_{\nu=3}^{n} \gamma(\nu)\, a_{\nu-3}^{(1)} = \sum_{\nu_2=6}^{n} \gamma(\nu_2) \sum_{\nu_1=3}^{\nu_2-3} \gamma(\nu_1) \qquad \text{(8a)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_n^{(k)} &= \sum_{\nu_k=3k}^{n} \gamma(\nu_k) \sum_{\nu_{k-1}=3(k-1)}^{\nu_k-3} \gamma(\nu_{k-1}) \cdots \quad \cdots \sum_{\nu_1=3}^{\nu_2-3} \gamma(\nu_1).
\end{aligned}
$$

Damit haben wir die in der Potenzreihenentwicklung von $v(z)$ auftretenden Koeffizienten $a_n^{(k)}$ in geschlossener Form — allerdings in Form einer k-fachen Summe — dargestellt. Wir erhalten für die ersten Koeffizienten

$$
\begin{aligned}
&a_0 = a_1 = a_2 = 1, \\
&a_3 = 1 + h^4\gamma(3), \quad a_4 = 1 + h^4 \sum_{\nu=3}^{4} \gamma(\nu), \quad a_5 = 1 + h^4 \sum_{\nu=3}^{5} \gamma(\nu), \\
&a_6 = 1 + h^4 \sum_{\nu=3}^{6} \gamma(\nu) + h^8\gamma(6)\gamma(3), \\
&a_7 = 1 + h^4 \sum_{\nu=3}^{7} \gamma(\nu) + h^8 \sum_{\nu_2=6}^{7} \gamma(\nu_2) \sum_{\nu_1=3}^{\nu_2-3} \gamma(\nu_1), \\
&a_8 = 1 + h^4 \sum_{\nu=3}^{8} \gamma(\nu) + h^8 \sum_{\nu_2=6}^{8} \gamma(\nu_2) \sum_{\nu_1=3}^{\nu_2-3} \gamma(\nu_1), \\
&a_9 = 1 + h^4 \sum_{\nu=3}^{9} \gamma(\nu) + h^8 \sum_{\nu_2=6}^{9} \gamma(\nu_2) \sum_{\nu_1=3}^{\nu_2-3} \gamma(\nu_1) + h^{12}\gamma(9)\gamma(6)\gamma(3).
\end{aligned}
$$

§ 3.

Umlaufssubstitutionen. Lösungen erster Art.

Zwischen den drei Lösungen der Differentialgleichung (2)

$$y_1(x), \quad y_2(x) = y_1(x \cdot e^{-i\pi}) \quad \text{und} \quad y_1(x \cdot e^{-2i\pi})$$

muß, da sie sicher nicht linear unabhängig sein können, eine Beziehung von der Form bestehen

$$b_1 y_1(x) + b_2 y_1(x e^{-i\pi}) + b_3 y_1(x e^{-2i\pi}) = 0. \qquad (9)$$

Setzen wir etwa $x = e^{i\pi}\xi$, ξ positiv reell, so konvergiert das Integral (3) für alle drei in (9) auftretenden Funktionen. Aus (9) ersehen wir durch den Grenzübergang $\xi \to \infty$, da in diesem Falle, wie aus den im nächsten § abzuleitenden asymptotischen Entwicklungen klar hervorgeht, $y_1(\xi e^{i\pi}) \backsim -y_1(\xi e^{-i\pi})$ exponentiell anwächst, während $y_1(\xi)$ exponentiell ver-

schwindet, daß $b_1 = b_3$ sein muß. Setzen wir noch $-\frac{b_2}{b_1 b_3} = c$, so nimmt (9) die Form an:

$$y_1(x) - c\,y_1(x e^{-i\pi}) + y_1(x e^{-2i\pi}) = 0. \tag{10}$$

Aus dieser für alle Werte von $\arg x$ geltenden Beziehung gewinnen wir die Umlaufssubstitutionen für $y_1(x)$ und $y_2(x)$ in der Gestalt

$$\begin{aligned} y_1(x \cdot e^{-2i\pi}) &= -\,y_1(x) + c\,y_2(x), \\ y_2(x \cdot e^{2i\pi}) &= \;\;c\,y_1(x) - \;\;y_2(x). \end{aligned} \tag{11}$$

Den Wert der Konstanten c können wir etwa dadurch bestimmen, daß wir mit $x = e^{i\pi}\xi$ (ξ positiv reell) die entsprechenden Laplaceschen Integrale in (10) einführen. Auf diese Weise erhalten wir

$$c = \frac{y_1(\xi e^{-i\pi}) + y_1(\xi e^{i\pi})}{y_1(\xi)}$$

$$= \frac{\int_1^{\infty \exp i(\pi-\delta_1)} v(z) e^{\xi z} dz + \int_1^{\infty \cdot \exp -i(\pi-\delta_2)} v(z) e^{\xi z} dz}{\int_1^{\infty \exp i\delta_3} v(z) e^{-\xi z} dz}, \qquad \begin{aligned} 0 < \delta_1 < \tfrac{\pi}{2}, \\ 0 < \delta_2 < \tfrac{\pi}{2}, \\ -\tfrac{\pi}{2} < \delta_3 < \tfrac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ein anderer Weg zur Berechnung dieser Konstanten wird durch die sogleich abzuleitende Gleichung (13) gewonnen.

Aus dem Floquetschen Theorem [2] wissen wir, daß die Differentialgleichung (2) zwei partikuläre Lösungen besitzt — wir wollen sie mit $Y_1(x)$ und $Y_2(x)$ bezeichnen —, die sich bei einem halben Umlauf um den Punkt $x = 0$, d. h. bei der Vermehrung bzw. Verminderung von φ um π, lediglich mit einem Faktor $e^{\pm\pi\mu}$ multiplizieren. Die hiermit definierte Größe μ heißt der charakteristische Exponent der Mathieuschen Differentialgleichung. Es ist also

$$Y_1(x \cdot e^{\pm i\pi}) = e^{\pm\pi\mu} Y_1(x), \quad Y_2(x \cdot e^{\pm i\pi}) = e^{\mp\pi\mu} Y_2(x). \tag{11a}$$

Da diese Funktionen ein ähnliches Verhalten zeigen, wie die Besselschen Zylinderfunktionen — offenbar müssen sie für $h = 0$ in solche mit rein imaginärem Argument übergehen — nennt man sie Lösungen erster Art[8]). Da sie ferner im allgemeinen (d. h. für $\mu \neq ni$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) voneinander linear unabhängig sind, so muß die Lösung dritter Art $y_1(x)$ im allgemeinen als eine Linearkombination von der Form

$$y_1(x) = \alpha\, Y_1(x) + \beta\, Y_2(x) \tag{12}$$

[8]) Vgl. auch [12] S. 44 und [1], wo sie wegen der Ähnlichkeit ihres Verhaltens mit den Besselschen Funktionen von rein imaginärem Argument mit $J(\mu, i\sigma)$ bezeichnet werden.

darstellbar sein. Durch Eintragung dieses Ausdruckes in (10) erhalten wir unter Verwendung von (11a)

$$\alpha(1 - ce^{-\pi\mu} + e^{-2\pi\mu}) = \beta(1 - ce^{\pi\mu} + e^{2\pi\mu}) = 0,$$

woraus, da α und β nicht zugleich verschwinden dürfen,

$$c = 2\operatorname{Cof}\pi\mu \tag{13}$$

folgt. Damit erscheint die in den Umlaufsrelationen (10) und (11) auftretende Konstante c durch den charakteristischen Exponenten der Mathieuschen Differentialgleichung ausgedrückt, dessen Berechnung nach einer der beiden von Whittaker [16] oder Ince [9] angegebenen Methoden durchgeführt werden kann.

Aus (12) erhalten wir unter Anwendung von (11a)

$$y_2(x) = y_1(x \cdot e^{-i\pi}) = \alpha e^{-\pi\mu} Y_1(x) + \beta e^{\pi\mu} Y_2(x)$$

und durch die Auflösung dieser Gleichung und Gleichung (12) nach $Y_1(x)$ und $Y_2(x)$

$$Y_1(x) = \frac{1}{2\alpha \operatorname{Sin}\pi\mu}[\quad e^{\pi\mu} y_1(x) - y_2(x)],$$

$$Y_2(x) = \frac{1}{2\beta \operatorname{Sin}\pi\mu}[-e^{-\pi\mu} y_1(x) + y_2(x)].$$

Wir normieren jetzt die Lösungen erster Art in der Weise, daß wir

$$\alpha = -\beta = \frac{\pi}{2i \operatorname{Sin}\pi\mu}$$

setzen und erhalten folgendes Formelsystem, welches die Lösungen erster Art durch jene dritter Art und umgekehrt auszudrücken gestattet:

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= \frac{\pi}{2i \operatorname{Sin}\pi\mu}[Y_1(x) - Y_2(x)],\\
y_2(x) &= \frac{\pi}{2i \operatorname{Sin}\pi\mu}[e^{-\pi\mu} Y_1(x) - e^{\pi\mu} Y_2(x)];\\
Y_1(x) &= \frac{i}{\pi}[e^{\pi\mu} y_1(x) - y_2(x)],\\
Y_2(x) &= \frac{i}{\pi}[e^{-\pi\mu} y_1(x) - y_2(x)].
\end{aligned} \tag{14}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ersehen wir übrigens, daß tatsächlich für $\mu = ni$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ und *nur* für diese Werte $Y_1(x)$ und $Y_2(x)$ linear abhängig (sogar identisch) sind. Aus Gleichungen (11a

und (14) gewinnen wir sehr leicht die Umlaufsrelationen für m halbe Umläufe für alle hier betrachteten Lösungen von (2)

$$
\begin{aligned}
Y_1(xe^{mi\pi}) &= e^{m\pi\mu}\, Y_1(x),\\
Y_2(xe^{mi\pi}) &= e^{-m\pi\mu}\, Y_2(x),\\
y_1(xe^{mi\pi}) &= \frac{\operatorname{Sin}(m+1)\pi\mu}{\operatorname{Sin}\pi\mu}\, y_1(x) - \frac{\operatorname{Sin} m\pi\mu}{\operatorname{Sin}\pi\mu}\, y_2(x),\\
y_2(xe^{mi\pi}) &= \frac{\operatorname{Sin} m\pi\mu}{\operatorname{Sin}\pi\mu}\, y_1(x) - \frac{\operatorname{Sin}(m-1)\pi\mu}{\operatorname{Sin}\pi\mu}\, y_2(x).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Wir ersehen aus den beiden ersten Gleichungen (15), daß für $\mu = ni$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ $Y_1 = Y_2$ eine *eindeutige* Funktion von x, also in φ *periodisch* ist, und zwar mod 2π, wenn n ungerade und mod π, wenn n gerade ist. Die Lösungen dritter Art sind in diesem Falle wie auch im allgemeinen unendlichvieldeutig[9]) und es ist für sie, wie man durch einen einfachen Grenzübergang aus den beiden letzten Gleichungen (15) für $\mu \to ni$ schließt,

$$
\begin{aligned}
y_1(xe^{mi\pi}) &= (m+1)\, y_1(x) - m\, y_2(x)\\
y_2(xe^{mi\pi}) &= m\, y_1(x) - (m-1)\, y_2(x)
\end{aligned}
\qquad
\begin{pmatrix}\mu = ni,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\end{pmatrix}
$$

und insbesondere für *gerade* n

$$
\begin{aligned}
y_1(xe^{mi\pi}) &= y_1(x) - mi\pi\, Y_1(x)\\
y_2(xe^{mi\pi}) &= y_2(x) - mi\pi\, Y_1(x)
\end{aligned}
\qquad (\mu = 2ni).
$$

Aus diesen letzten Formeln geht hervor, daß in diesem Falle $y_{1,2}(x) = Y_1(x)\log x +$ eine eindeutige Funktion von x ist. Alle diese Verhältnisse bilden das genaue Analogon der bei den Zylinderfunktionen wohlbekannten Eigenschaften.

§ 4.

Asymptotische Darstellungen für große Werte von $|x|$.

Da die Potenzreihenentwicklung von $v(z)$ einen endlichen von 0 verschiedenen Konvergenzradius besitzt und diese Funktion der Wachstumsbeschränkung (5) mit einer beliebig kleinen positiven Konstanten k unterliegt, so erhalten wir nach einem bekannten Lemma von Watson[10]) eine semikonvergente Entwicklung, wenn wir (7) in (3) eintragen und gliedweise integrieren. So ergibt sich nach der Substitution $z = 1 + t$

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{\infty \cdot \exp i\omega_1} v(1+t)\, e^{-x(1+t)}\, dt\\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-x}\left[\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(\sqrt{\lambda}, n)\, a_n}{2^{n-\frac{1}{2}}\, \Gamma(n+\frac{1}{2})} \int_0^{\infty} t^{n-\frac{1}{2}}\, e^{-xt}\, dt + O\left(|x|^{-N-\frac{1}{2}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

[9]) $y_1(x)$ wird nur dann *endlichvieldeutig*, wenn $\mu = \pm\frac{p}{q}\, i$, worin p und q zwei positive ganze Zahlen $(q \neq 1)$ bedeuten.

[10]) [13]. Vgl. auch [14] § 8, 31.

oder, da

$$\int_0^\infty t^{n-\frac{1}{2}} e^{-xt} dt = x^{-n-\frac{1}{2}} \Gamma(n+\tfrac{1}{2})$$

ist,

$$y_1(x) = e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left[\sum_{n=0}^{N-1} a_n \frac{(\sqrt{\lambda}, n)}{(2x)^n} + O(|x|^{-N}) \right] \tag{16a}$$

für

$$-\frac{3\pi}{2} < \arg x < \frac{3\pi}{2}.$$

Ganz entsprechend ist für

$$-\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{5\pi}{2}$$

$$y_2(x) = ie^{x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left[\sum_{n}^{N-1}{}_0 a_n \frac{(\sqrt{\lambda}, n)}{(-2x)^n} + O(|x|^{-N}) \right]. \tag{16b}$$

Schließlich ergibt sich aus den beiden letzten Gleichungen (14) und den soeben abgeleiteten asymptotischen Entwicklungen der Lösungen dritter Art für den gemeinsamen Geltungsbereich von (16a) und (16b), also für

$$-\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{3\pi}{2}$$

$$Y_{1,2}(x) = \frac{i}{\sqrt{2\pi x}} \left\{ e^{-x \pm \pi\mu} \left[\sum_{n=0}^{N-1} a_n \frac{(\sqrt{\lambda}, n)}{(2x)^n} + O(|x|^{-N}) \right] \right.$$

$$\left. - e^{x + \frac{\pi}{2} i} \left[\sum_{n=0}^{N-1} a_n \frac{(\sqrt{\lambda}, n)}{(-2x)^n} + O(|x|^{-N}) \right] \right\}$$

oder

$$Y_{1,2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot e^{\left(\pm\mu + \frac{3i}{2}\right)\frac{\pi}{2}}$$

$$\left\{ \mathfrak{Cof}\left(x \mp \frac{\pi\mu}{2} + \frac{i\pi}{4}\right) \left[\sum_{n=0}^{N-1} a_{2n} \frac{(\sqrt{\lambda}, n)}{(2x)^{2n}} + O(|x|^{-2N}) \right] \right. \tag{16c}$$

$$\left. - \mathfrak{Sin}\left(x \mp \frac{\pi\mu}{2} + \frac{i\pi}{4}\right) \left[\sum_{n=0}^{N-1} a_{2n+1} \frac{(\sqrt{\lambda}, 2n+1)}{(2x)^{2n+1}} + O(|x|^{-2N-1}) \right] \right\}.$$

Dabei gilt überall das obere Vorzeichen für $Y_1(x)$ und das untere für $Y_2(x)$.

Auch die Ähnlichkeit dieser asymptotischen Entwicklungen mit denen der Zylinderfunktionen ist in die Augen springend. Für $h \to 0$ geht μ

gegen $i\sqrt{\lambda}$, und es folgt aus den asymptotischen Entwicklungen (16a) und (16c), daß

$$\lim_{h \to 0} y_1(x) = K_{\sqrt{\lambda}}(x) = \frac{\pi}{2} e^{i(\sqrt{\lambda}+1)\frac{\pi}{2}} H^{(1)}_{\sqrt{\lambda}}(x e^{\frac{i\pi}{2}}),$$

$$\lim_{h \to 0} Y_{1,2}(x) = I_{\pm\sqrt{\lambda}}(x) = e^{\mp i\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2}} J_{\pm\sqrt{\lambda}}(x e^{\frac{i\pi}{2}})$$

ist.

Auf die asymptotische Entwicklung des Integrals (3) mittels der Sattelpunktmethode hoffe ich ein anderes Mal zurückkommen zu können.

Brünn, Mathematisches Seminar der Deutschen Technischen Hochschule.

Literaturverzeichnis.

J. Dougall.
[1] The Solutions of Mathieu's Differential Equation. Representation by contour Integrals and asymptotic Expansions, Proc. Ed. Math. Soc. 44 (1925/26), S. 57.

G. Floquet.
[2] Sur les équations différentielles linéaires a coefficients périodiques. Ann. Éc. norm. 12 (1883), S. 47.

E. Haentzschel.
[3] Studien über die Reduktion der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Berlin, G. Reimer 1893.

J. Horn.
[4] Integration linearer Differentialgleichungen durch Laplacesche Integrale und Fakultätenreihen. Jahresber. d. deutschen Math. Ver. 24 (1915), S. 309.

J. Horn.
[5] Singuläre Systeme linearer Volterrascher Integralgleichungen. Math. Zeitschr. 3 (1919), S. 265.

J. Horn.
[6] Laplacesche Integrale und Gammaquotientenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen und Volterrascher Integralgleichungen. Math. Zeitschr. 8 (1920), S. 110.

J. Horn.
[7] Laplacesche Integrale, Binomialkoeffizientenreihen und Gammaquotientenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Math. Zeitschr. 21 (1924), S. 85.

P. Humbert.
[8] Fonctions de Lamé et fonctions de Mathieu. Fascicule X du Mémorial des sciences mathématiques. Paris Gauthier-Villars 1926.

E. L. Ince.
[9] Mathieu Functions of Stable Type. Phil. Mag. (7) 6 (1928), S. 547.

F. Lindemann.
[10] Über die Differentialgleichung der Funktionen des elliptischen Zylinders. Math. Annalen 22 (1883), S. 117.

M. J. O. Strutt.
[11] Der charakteristische Exponent der Hillschen Differentialgleichung. Math. Annalen **101** (1929), S. 559.
M. J. O. Strutt.
[12] Lamésche-Mathieusche und verwandte Funktionen in Physik und Technik. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Band I, Heft 3. Berlin, Springer, 1932.
G. N. Watson.
[13] The harmonic functions associated with the parabolic cylinder II. Proc. Math. Soc. London (2) **17** (1918), S. 116.
G. N. Watson.
[14] A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge 1922.
E. T. Whittaker.
[15] On the functions associated with the elliptic cylinder in harmonic analysis. Proc. of the 5. Intern. Math. Congress **1** (1913), S. 366.
E. T. Whittaker.
[16] On the general solution of Mathieus equation. Proc. Ed. Math. Soc. **32** (1913/14), S. 75.
E. T. Whittaker and G. N. Watson.
[17] A course of modern Analysis. 4th Ed. Cambridge University Press 1927.

(Eingegangen am 25. März 1936.)

Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche.

II. v-Ideale und vollständig ganz abgeschlossene Integritätsbereiche.

Von

Wolfgang Krull in Erlangen.

1. Grundlagen und Aufgabenstellung.

Für die bereits in Beitrag I kurz behandelten, durch die Gleichung $\mathfrak{a}_v = (\mathfrak{a}^{-1})^{-1}$ gekennzeichneten „v-Ideale" hat Artin den grundlegenden Satz bewiesen:

Gruppensatz der v-Ideale: *Ist der Integritätsbereich* $\mathfrak{J}$ *ganz abgeschlossen, so ist jedes* $\mathfrak{J}$*-Ideal* $\mathfrak{a}$ *„v-umkehrbar", d. h. es wird stets* $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1})_v = \mathfrak{J}$. *Die Menge aller v-Ideale bildet also hinsichtlich der „v-Multiplikation" eine Gruppe*[1]).

Eine genauere Untersuchung zeigt indessen, daß in Wirklichkeit von $\mathfrak{J}$ etwas mehr verlangt werden muß als die gewöhnliche „Ganz-Abgeschlossenheit". Artin setzt voraus, daß $\mathfrak{J}$ *„vollständig ganz abgeschlossen"* ist, d. h. daß $\mathfrak{J}$ jedes Element α aus dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$ enthält, das von $\mathfrak{J}$ „fast ganz" abhängt, d. h. zu dem ein $a \neq 0$ existiert, für das alle Produkte $a \cdot \alpha^i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ in $\mathfrak{J}$ liegen.

Diese Bedingung ist tatsächlich für die Gültigkeit des Gruppensatzes nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig. Denn ist α von $\mathfrak{J}$ fast ganz abhängig, so ist $(1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots) = \mathfrak{x}$ ein $\mathfrak{J}$-Ideal[2]), das der Gleichung $\mathfrak{x}^2 = \mathfrak{x}$ und damit erst recht der Gleichung $\mathfrak{x}_v^2 = \mathfrak{x}_v$ genügt. Soll also die Menge der v-Ideale eine multiplikative Gruppe bilden, so muß $\mathfrak{x}_v$ gleich dem Einheitsideal $\mathfrak{J}$ sein, d. h. es muß α in $\mathfrak{J}$ liegen.

---

[1]) Wie in Beitrag I [Math. Zeitschr. 41 (1936), S. 545—577] gebrauchen wir die Abkürzungen„ Bericht", „Teilbarkeitsverhältnisse", „Moderne Algebra" für die folgenden drei Arbeiten: W. Krull, Idealtheorie, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 4 (1935), Heft 3. — H. Prüfer, Untersuchungen über die Teilbarkeitsverhältnisse in Körpern, Journ. f. Math. 168 (1932), S. 1—36. — B. L. van der Waerden, Moderne Algebra II, Grundl. d. Math. Wiss. in Einzeldarst. 34 (1931).

Zum Gruppensatz der v-Ideale vgl. Moderne Algebra, § 103; Prüfer, § 8; Bericht 44.

[2]) Man beachte, daß ein $\mathfrak{J}$-Modul aus $\mathfrak{K}$ nur dann als Ideal angesehen wird, wenn er durch Multiplikation mit einem von 0 verschiedenen Element in ein ganzes Ideal verwandelt werden kann!

Die Tatsache, daß der Gruppensatz der v-Ideale ausschließlich au die vollständig ganz abgeschlossenen Integritätsbereiche beschränkt ist legt eine genauere Untersuchung dieser Ringklasse nahe. *Daß die Begriffe „ganz" und „vollständig ganz" abgeschlossen nicht identisch sind, zeigt das Beispiel der Bewertungsringe.* Ein Bewertungsring $\mathfrak{B}$ ist dann und nur dann vollständig ganz abgeschlossen, wenn seine Wertgruppe archimedisch geordnet, d. h. zu einer Additionsgruppe aus reellen Zahlen isomorph ist, oder, was auf dasselbe herauskommt, wenn $\mathfrak{B}$ im Quotientenkörper $\mathfrak{K}$ einen *„Maximalring"* darstellt, d. h. wenn zwischen $\mathfrak{B} = \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{K}$ kein echter Zwischenring eingeschoben werden kann[3]). Da jeder ganz abgeschlossene und damit erst recht jeder vollständig ganz abgeschlossene Integritätsbereich Durchschnitt von Bewertungsringen ist, liegt es nun nahe, zu vermuten:

Ein Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ ist dann und nur dann Durchschnitt von Maximalringen, wenn er vollständig ganz abgeschlossen ist. Das „nur dann" ist selbstverständlich. Mit dem Beweis des „dann" für Spezialfälle beschäftigt sich 2. Es gelingt z. B. zu zeigen, daß ein vollständig ganz abgeschlossener Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ sicher Durchschnitt von Maximalringen ist, wenn in $\mathfrak{J}$ zwei verschiedene Primideale stets teilerfremd sind und wenn außerdem kein ganzes Ideal unendlich viele Primoberideale besitzt. Im übrigen stößt man auf unerwartet große Schwierigkeiten. —

Bei einem „O-Ring", der dem Noetherschen Teilerkettensatz genügt, fallen die Begriffe „ganz" und „vollständig ganz" abgeschlossen zusammen, für einen ganz abgeschlossenen O-Ring $\mathfrak{J}$ gilt also stets der Gruppensatz der v-Ideale. Aus dem Teilerkettensatz folgt darüber hinaus, daß $\mathfrak{J}$ sogar *„v-Z. P. J-Ring"* ist, d. h., daß in $\mathfrak{J}$ jedes v-Ideal eindeutig als v-Produkt von endlich vielen v-Primidealen dargestellt werden kann[4]). Bleibt dieser Satz richtig, wenn $\mathfrak{J}$ nicht selbst O-Ring ist, aber aus einem nicht ganz abgeschlossenen O-Ring $\mathfrak{J}_0$ durch den Prozeß des Ganz-Abschließens entsteht? Das Ergebnis von 3. lautet:

Ist $\mathfrak{J}_0$ einartig, d. h. sind in $\mathfrak{J}_0$ zwei verschiedene Primideale stets teilerfremd, so ist $\mathfrak{J}$ ein Z. P. J.-Ring nicht nur für v-, sondern sogar für gewöhnliche Ideale. Ist $\mathfrak{J}_0$ ein beliebiger O-Ring, so ist $\mathfrak{J}$ jedenfalls Durchschnitt von Maximalringen, und zwar insbesondere von „diskreten Bewertungsringen". Wie man sieht, bleiben auch hier noch Fragen offen.

---

[3]) Vgl. etwa W. Krull, Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern II, Math. Zeitschr. 31 (1930), S. 527—557, § 1 und 2, sowie Bericht 36. — Die Maximalringe sind diejenigen Bewertungsringe, die auch in der Kürschák-Ostrowskischen Bewertungstheorie auftreten, in der sie zu den im Ostrowskischen Sinne „nichtarchimedischen" Bewertungen gehören.

[4]) Moderne Idealtheorie, § 103; Bericht 37 u. 44.

Ein Integritätsbereich, bei dem die Menge *aller* v-Ideale hinsichtlich der v-Multiplikation eine Gruppe bildet, wurde von mir in einer früheren Note als „*Artinscher v-Multiplikationsring*" bezeichnet[5]). Besaß die Menge *aller endlichen* v-Ideale Gruppeneigenschaft, so sprach ich von einem „*Prüferschen v-Multiplikationsring*". Neben den bereits besprochenen „Gruppensatz" tritt nun als zweites Fundamentaltheorem der

Permanenzsatz der v-Ideale. *Ist* $\mathfrak{J}$ *ein Artinscher oder Prüferscher v-Multiplikationsring, so ist es auch jeder ganz abgeschlossene Integritätsbereich aus ganzen algebraischen Funktionen beliebig vieler Variabler über dem Grundbereich* $\mathfrak{J}$.

Der Fall eines Prüferschen v-Multiplikationsringes wurde bereits von Prüfer selbst erledigt[6]). Bei den Artinschen Multiplikationsringen braucht man nach den Ergebnissen meiner früheren Note nur noch rein algebraische Erweiterungen zu behandeln, d. h. man hat zu zeigen:

Ist $\overline{\mathfrak{K}}$ *algebraischer Oberkörper des Quotientenkörpers* $\mathfrak{K}$ *von* $\mathfrak{J}$ *und bedeutet* $\overline{\mathfrak{J}}$ *den Ring aller von* $\mathfrak{J}$ *ganz abhängigen Elemente aus* $\overline{\mathfrak{K}}$, *so ist* $\overline{\mathfrak{J}}$ *stets gleichzeitig mit* $\mathfrak{J}$ *Artinscher v-Multiplikationsring bzw.*, was nach dem Gruppensatz auf dasselbe herauskommt, *gleichzeitig mit* $\mathfrak{J}$ *vollständig ganz abgeschlossen.*

Der Beweis dieser Tatsache wird in 5. erbracht. Auch 4. enthält einen allerdings nicht so weittragenden Satz über den Zusammenhang zwischen den v-Idealen von $\mathfrak{J}$ und $\overline{\mathfrak{J}}$; es wird nämlich gezeigt, daß bei beliebigem ganz abgeschlossenen $\mathfrak{J}$ für jedes $\mathfrak{J}$-Ideal $\mathfrak{a}$ die (keineswegs selbstverständliche) Gleichung $(\mathfrak{a} \cdot \overline{\mathfrak{J}})_v \cap \mathfrak{J} = \mathfrak{a}_v$ gilt.

Die Haupthilfsmittel für unsere Beweise liefert die Bewertungstheorie nicht nur in 2. und 3., sondern auch bei den ihrer Form nach rein algebraischen Sätzen von 4. und 5. Man beachte z. B., wie in 5. mit Hilfe geeigneter Bewertungen die Betrachtung der Elemente aus $\overline{\mathfrak{K}}$ auf die Betrachtung ihrer Normen in $\mathfrak{K}$ zurückgeführt wird! — Eine genauere Kenntnis von Beitrag I wird nicht vorausgesetzt. In der Bezeichnung halten wir uns aber an die in I eingeführte Schreibweise, auch werden die Grundlagen der Bewertungstheorie nicht mehr neu entwickelt.

2. Vollständig ganz abgeschlossene Integritätsbereiche und Maximalringe.

Ein Integritätsbereich $\mathfrak{J}$, der nur ein einziges Primideal $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{J}$ enthält, möge „primär" heißen.

Satz 1. *Jeder vollständig ganz abgeschlossene primäre Integritätsbereich ist Durchschnitt von Maximalringen.*

[5]) Hauptidealzerlegung in Polynomringen, Math. Zeitschr. 41 (1936), S. 213—217.

[6]) Teilbarkeitsverhältnisse, § 10 und 11.

Beweis: a) Es sei a eine Nichteinheit, b ein beliebiges Element aus $\mathfrak{J}$. Dann ist (a) ein zum einzigen Primideal $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal, (b) ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal oder $\mathfrak{J}$, für großes r wird also sicher a^r durch b teilbar, $a^r = b \cdot c$, $c \subset \mathfrak{J}$. Das heißt aber: Enthält ein Zwischenring $\mathfrak{R}$ zwischen $\mathfrak{J}$ und dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$ das Reziproke a^{-1} einer Nichteinheit a aus $\mathfrak{J}$, so enthält $\mathfrak{R}$ für jedes beliebige b aus $\mathfrak{J}$ auch $b^{-1} = c \cdot a^{-r}$, es ist also $\mathfrak{R} = \mathfrak{K}$.

b) Ist $\mathfrak{K} \supset \mathfrak{R} \supseteq \mathfrak{J}$, so tritt in $\mathfrak{R}$ nach a) kein Reziprokes einer Nichteinheit von $\mathfrak{J}$ auf, und leichte Wohlordnungsschlüsse zeigen, daß es in $\mathfrak{K}$ mindestens einen Ring $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{R}$ gibt derart, daß $\mathfrak{M}$ kein, jeder echte Oberring von $\mathfrak{M}$ dagegen mindestens ein Reziprokes einer Nichteinheit aus $\mathfrak{J}$ enthält; nach a) muß dann $\mathfrak{M}$ Maximalring sein. Oder anders ausgedrückt: Zu jedem von $\mathfrak{K}$ selbst verschiedenen Oberring $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{J}$ gibt es in $\mathfrak{K}$ einen $\mathfrak{R}$ umfassenden Maximalring $\mathfrak{M}$.

c) Es sei η ein nicht zu $\mathfrak{J}$ gehöriges Element von $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{J}[\eta^{-1}]$ bedeute den Ring aller Polynome in η^{-1} mit Koeffizienten aus $\mathfrak{J}$; dann ist η^{-1} in $\mathfrak{J}[\eta^{-1}]$ Nichteinheit. Wäre nämlich $\eta = a_0 \eta^{-r} + a_1 \eta^{-r+1} + \ldots + a_r$ $(a_0, a_1, \ldots, a_r \subset \mathfrak{J})$, so wäre η von $\mathfrak{J}$ ganz abhängig und somit Element von $\mathfrak{J}$.

d) Satz 1 ist bewiesen, sobald gezeigt ist: Zu jedem nicht zu $\mathfrak{J}$ gehörigen ξ aus $\mathfrak{K}$ gibt es einen $\mathfrak{J}$ umfassenden Maximalring, der ξ nicht enthält. — Wir bilden das Ideal $(\xi) \cdot \mathfrak{p}$. Ist $(\xi) \cdot \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}$, so ist $(\xi^r) \cdot \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p} \subset \mathfrak{J}$ für jedes r, d. h. ξ hängt von $\mathfrak{J}$ fast ganz ab; da $\mathfrak{J}$ vollständig ganz abgeschlossen angenommen wurde, ist diese Möglichkeit ausgeschlossen. — Ist $(\xi) \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{J}$, so ist ξ Reziprokes einer Nichteinheit aus $\mathfrak{J}$, und nach a) enthält kein einziger $\mathfrak{J}$ umfassender Maximalring das Element ξ. — Es bleibt noch die Möglichkeit, daß $(\xi) \cdot \mathfrak{p}$ nicht ganz ist, daß also ein $p \subset \mathfrak{p}$ existiert, für das $p \cdot \xi = \eta$ nicht zu $\mathfrak{J}$ gehört. In diesem Falle tritt in $\mathfrak{R} = \mathfrak{J}[\eta^{-1}]$ nach c) das Element η nicht auf, es ist also sicher $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{K}$, und nach b) gibt es einen $\mathfrak{R}$ umfassenden Maximalring $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$ enthält ξ nicht, denn sonst wäre $p^{-1} = \xi \cdot \eta^{-1} \subset \mathfrak{M}$, was wegen $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{K}$ nach a) nicht sein kann. — Damit sind alle Fälle erledigt und Satz 1 ist bewiesen.

Um Satz 1 bequem verallgemeinern zu können, definieren wir: Ein Primärideal $\mathfrak{q}$ aus dem beliebigen Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ soll (in Erinnerung an die bei den Polynomringen herrschenden Verhältnisse) *„höchstdimensional"* genannt werden, wenn sein zugehöriges Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{J}$ minimal ist, also in $\mathfrak{J}$ kein echtes Primunterideal besitzt. Dann ergibt sich:

Satz 2. *Ein vollständig ganz abgeschlossener Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ ist Durchschnitt von Maximalringen, wenn* 1. *in $\mathfrak{J}$ jedes ganze Hauptideal (a)*

Durchschnitt von höchstdimensionalen Primäridealen ist, und wenn außerdem 2. *zu jeder höchstdimensionalen isolierten Primärkomponente* $\mathfrak{q}$ *von* (a) *ein Ideal* $\mathfrak{r}$ *existiert, das in dem zu* $\mathfrak{q}$ *gehörigen Primideal* $\mathfrak{p}$ *nicht enthalten ist, und für das* $\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{a}$ *wird.*

Beweis: a) Für jedes in $\mathfrak{J}$ minimale Primideal $\mathfrak{p}$ ist der Primidealquotientenring $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ primär[7]).

b) Läßt man $\mathfrak{p}_\tau$ alle minimalen Primideale von $\mathfrak{J}$ durchlaufen, so wird $\mathfrak{J} = \bigcap_\tau \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\tau}$. — Liegt nämlich $\alpha = \frac{z}{n}$ $(z, n \subset \mathfrak{J})$ in allen $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\tau}$, und bedeutet $\mathfrak{q}_\tau$ jeweils die zu $\mathfrak{p}_\tau$ gehörige isolierte Primärkomponente von (n) bzw., falls n nicht in $\mathfrak{p}$, den Gesamtring $\mathfrak{J}$, so muß z für jedes τ zu $\mathfrak{q}_\tau$ gehören[8]). Wegen $(n) = \bigcap_\tau \mathfrak{q}_\tau$ ist daher $(z) \subseteq (n)$; $\alpha = \frac{z}{n} \subset \mathfrak{J}$.

c) Ist $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{J}$ minimal, so ist $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ vollständig ganz abgeschlossen. — Es sei $\alpha = \frac{z}{n}$ $(z, n \subset \mathfrak{J})$ ein von $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ fast ganz abhängiges Element, $\mathfrak{q}$ sei gleich der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen isolierten Primärkomponente von (n) bzw. gleich $\mathfrak{J}$, falls n nicht in $\mathfrak{p}$; r sei ein nicht in $\mathfrak{p}$ liegendes Element aus $\mathfrak{J}$, für das $\mathfrak{q} \cdot (r) \subseteq (n)$ wird (Bedingung 2!). Ist dann $a \neq 0$ in $\mathfrak{J}$ so gewählt, daß alle Produkte $a \cdot \alpha^i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ in $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ enthalten sind, so gehören, wie mühelos einzusehen, die sämtlichen Produkte $a \cdot (r \cdot \alpha)^i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ zu $\bigcap_\tau \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\tau} = \mathfrak{J}$, es hängt also $r \cdot \alpha$ von $\mathfrak{J}$ fast ganz ab, und es ist dementsprechend: $r \cdot \alpha \subset \mathfrak{J}$; $\alpha = \frac{r \cdot \alpha}{r} \subset \mathfrak{J}_\mathfrak{p}$, weil r nicht in $\mathfrak{p}$.

d) Da alle $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\tau}$ nach Satz 1 Durchschnitte von Maximalringen sind, gilt das gleiche für $\bigcap_\tau \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\tau} = \mathfrak{J}$.

Wie man sieht, hat die erste Voraussetzung von Satz 2 den Zweck, die Durchschnittsdarstellung $\mathfrak{J} = \bigcap_\tau \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\tau}$ von $\mathfrak{J}$ durch die primären Primidealquotientenringe $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\tau}$ zu sichern, während die zweite Voraussetzung es möglich macht, aus der Tatsache, daß $\mathfrak{J}$ vollständig ganz abgeschlossen ist, zu schließen, daß auch die $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\tau}$ es sein müssen. Hier zeigt es sich deutlich, daß der Begriff „vollständig ganz abgeschlossen" viel weniger handlich ist als der klassische Begriff „ganz abgeschlossen". Denn es ist unmittelbar klar, daß die sämtlichen Primidealquotientenringe eines beliebigen ganz abgeschlossenen Integritätsbereichs stets selbst ganz abgeschlossen sind[9]).

---

[7]) $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ besteht aus der Menge aller Quotienten $\frac{a}{b}$ $(a, b$ in $\mathfrak{J}$, b nicht in $\mathfrak{p})$; vgl. Beitrag I, 1.

[8]) Denn es ist ja $\mathfrak{q}_\tau = ((n) \cdot \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\tau}) \cap \mathfrak{J}$.

[9]) Daß die zweite Voraussetzung von Satz 2 eine wirkliche Einschränkung bedeutet, folgt aus der Tatsache, daß diese Voraussetzung keineswegs bei allen be-

Wendet man Satz 2 insbesondere auf die einartigen Integritätsbereiche an, bei denen zwei verschiedene Primideale stets teilerfremd sind, so erhält man z. B.:

Satz 3. *Ein vollständig ganz abgeschlossener einartiger Integritätsbereich ist sicher Durchschnitt von Maximalringen, wenn in ihm kein ganzes Ideal unendlich viele Primoberideale besitzt.*

Denn die erste Voraussetzung von Satz 2 ist bei einem einartigen Integritätsbereich von selbst erfüllt, und aus der Voraussetzung von Satz 3 ergibt sich, daß jedes ganze Ideal als Produkt von endlich vielen, paarweise teilerfremden Primäridealen dargestellt werden kann, womit auch die Gültigkeit der zweiten Voraussetzung von Satz 2 gesichert ist.

Aus bekannten Sätzen über den Durchschnitt endlich vieler Bewertungsringe[10]) folgt leicht, daß ein primärer Integritätsbereich, der nicht selbst Maximalring ist, jedenfalls nicht als Durchschnitt von *endlich vielen* Bewertungsringen dargestellt werden kann. Diese Bemerkung führt auf die Vermutung, daß jeder vollständig ganz abgeschlossene oder vielleicht sogar jeder ganz abgeschlossene primäre Integritätsbereich Maximalring ist. Im vollständig ganz abgeschlossenen Fall kann ich diese Vermutung weder beweisen noch widerlegen. Dagegen zeigt man leicht:

Es sei — über einem algebraisch abgeschlossenen Koeffizientenkörper K — $\mathfrak{J}$ *der Integritätsbereich aller der rationalen Funktionen* $r(x, y)$ *in zwei Unbestimmten* x *und* y, *bei denen das Nennerpolynom durch* x *unteilbar*[11]) *und* $r(0, y)$ *gleich einem Element* c *aus* K *ist. Dann ist* $\mathfrak{J}$ *ein primärer ganz abgeschlossener Integritätsbereich, aber kein Bewertungsring.*

Zum Beweis bedenke man: Die Menge aller der rationalen Funktionen, für die $r(0, y) = 0$ ist, bildet in $\mathfrak{J}$ ein Primideal y. Ist $r(0, y) = c \neq 0$, so ist wegen $r(0, y)^{-1} = c^{-1}$ gleichzeitig mit $r(x, y)$ auch $r(x, y)^{-1}$ in $\mathfrak{J}$ enthalten. $\mathfrak{p}$ umfaßt also alle Nichteinheiten von $\mathfrak{J}$. — $\mathfrak{p}$ besteht offenbar aus allen und nur den rationalen Funktionen, bei denen das Zählerpolynom den Faktor x enthält. Daraus folgt sofort: Es sei $s(x, y)$ irgendein Element aus $\mathfrak{p}$, x^r sei die im Zählerpolynom von

---

kannten vollständig ganz abgeschlossenen Integritätsbereichen erfüllt ist; z. B. gilt sie nicht für den Ring aller ganzen algebraischen Zahlen. Dagegen halte ich es für möglich, daß in jedem vollständig ganz abgeschlossenen Integritätsbereich jedes Hauptideal Durchschnitt von höchstdimensionalen Primäridealen ist.

[10]) Vgl. Bericht 41 sowie § 10 der (im folgenden kurz mit „Bewertungstheorie" zitierten) Arbeit: W. Krull, Allgemeine Bewertungstheorie, Journ. f. Math. 167 (1931), S. 160—196.

[11]) Wenn vom „Nenner-" oder „Zählerpolynom" einer rationalen Funktion die Rede ist, so ist immer die „gekürzte" Quotientendarstellung gemeint, bei der Zähler und Nenner keinen Polynomfaktor gemeinsam haben.

$s(x, y)$ aufgehende x-Potenz. Dann ist in $\mathfrak{J}$ die $(r+1)$-te Potenz jedes Elements von $\mathfrak{p}$ durch $s(x, y)$ teilbar. Es ist also in $\mathfrak{J}$ jedes von $\mathfrak{J}$ selbst verschiedene Hauptideal ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal, und das besagt nichts anderes als daß $\mathfrak{p}$ das einzige Primideal von $\mathfrak{J}$ darstellt. — Es sei ferner $a(x, y)$ eine rationale Funktion, die einer Gleichung $a(x, y)^\varrho + r_1(x, y) \cdot a(x, y)^{\varrho-1} + \ldots + r_\varrho(x, y) = 0$ $(r_i(0, y) = c_i \ (i = 1, \ldots, \varrho))$ mit Koeffizienten $r_i(x, y)$ aus $\mathfrak{J}$ genügt. Dann kann zunächst das Nennerpolynom von $a(x, y)$ nicht durch x teilbar sein, und aus $a(0, y_\varrho) + r_1(0, y) \cdot a(0, y)^{\varrho-1} + \ldots + r_\varrho(0, y) = 0$ folgt weiter, daß $a(0, y)$ zu K und damit $a(x, y)$ zu $\mathfrak{J}$ gehören muß. $\mathfrak{J}$ ist also ganz abgeschlossen. — Dagegen ist $\mathfrak{J}$ nicht vollständig ganz abgeschlossen, weil z. B. zwar $x \cdot y^\varrho$ für jedes ϱ, aber nicht y zu $\mathfrak{J}$ gehört, und es kann $\mathfrak{J}$ kein Bewertungsring sein, weil z. B. von den beiden Elementen x und xy keines hinsichtlich $\mathfrak{J}$ durch das andere teilbar ist.

Es dürfte von Interesse sein, $\mathfrak{J}$ als Durchschnitt von Bewertungsringen darzustellen: Die Menge *aller* der rationalen Funktionen, bei der das Nennerpolynom durch x unteilbar ist, bildet im Körper $\mathsf{K}(x, y)$ einen Maximalring $\mathfrak{M}$. Das Primideal von $\mathfrak{M}$ ist identisch mit dem Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{J}$, und es gelten die direkten Summenzerlegungen $\mathfrak{M} = \mathfrak{p} + \mathsf{K}(y)$, $\mathfrak{J} = \mathfrak{p} + \mathsf{K}$. Ist ferner $\mathfrak{M}_y^{(\tau)}$ irgendein den Körper K umfassender Maximalring aus $\mathsf{K}(y)$, so stellt $\mathfrak{B}_\tau = \mathfrak{p} + \mathfrak{M}_y^{(\tau)}$ einen zwischen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{M}$ liegenden Bewertungsring aus $\mathsf{K}(x, y)$ dar, und es wird, falls man die Durchschnittsbildung über alle K umfassenden Maximalringe aus $\mathsf{K}(y)$ erstreckt, $\mathsf{K} = \underset{\tau}{\Delta}\, \mathfrak{M}_y^{(\tau)}$, $\mathfrak{J} = \underset{\tau}{\Delta}\, (\mathfrak{p} + \mathfrak{M}_y^{(\tau)}) = \underset{\tau}{\Delta}\, \mathfrak{B}_\tau$. — Damit ist bereits die gewünschte Zerlegung des Ringes $\mathfrak{J}$ durchgeführt. Natürlich sind die Komponenten $\mathfrak{B}_\tau$ keine Maximalringe, es enthält vielmehr jeder $\mathfrak{B}_\tau$ genau zwei Primideale, nämlich $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_\tau = \mathfrak{p} + \mathfrak{p}_y^{(\tau)}$, wobei unter $\mathfrak{p}_y^{(\tau)}$ das Primideal von $\mathfrak{M}_y^{(\tau)}$ zu verstehen ist[12]).

3. *O*-Ringe.

Es sei $\mathfrak{R}$ ein O-Ring, d.h. ein Integritätsbereich, für dessen ganze Ideale der Noethersche Teilerkettensatz gilt, $\mathfrak{J}$ sei der Ring aller von $\mathfrak{R}$ ganz abhängigen Elemente aus dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$. Hat $\mathfrak{J}$ über $\mathfrak{R}$ eine endliche Modulbasis, besteht also $\mathfrak{J}$ aus der Menge aller Linearformen in endlich vielen festen Elementen mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$, so ist auch $\mathfrak{J}$ ein O-Ring und somit wegen der Ganz-Abgeschlossenheit nach 1. ein v-Z.P.J.-Ring. Aber die Existenz einer endlichen Modulbasis ist bis

[12]) Zur Art der Konstruktion der Ringe $\mathfrak{B}_\tau$ vgl. Bericht 42, Bewertungstheorie, § 5 und 6.

jetzt noch nicht einmal für den Fall eines primären Ausgangsringes $\mathfrak{R}$ allgemein bewiesen[13]).

Man muß also zu anderen Hilfsmitteln greifen. Ein Maximalring $\mathfrak{M} = \mathfrak{D}$ soll wie üblich „diskreter Bewertungsring" heißen, wenn seine zugehörige Bewertung „ganzzahlig" oder „diskret" ist, d. h. wenn in ihm alle Elemente bis auf Einheitsfaktoren Potenzen eines festen Primelements p sind[14]). Dann gilt, wie ich schon früher bewiesen habe:

Satz 4: *Ist $\mathfrak{R}$ primär, so ist $\mathfrak{J}$ Durchschnitt von endlich vielen diskreten Bewertungsringen*[13]).

Auf die Einzelheiten des Beweises, der ziemlich verwickelt ist und eine Reihe von neuen Hilfsbegriffen erfordert, kann nicht näher eingegangen werden. Aus Satz 4 folgt verhältnismäßig leicht[15]):

Satz 5: *Ist $\mathfrak{R}$ einartig, so ist $\mathfrak{J}$ Z.P.J.-Ring, es ist also in $\mathfrak{J}$ jedes Ideal Produkt von endlich vielen, paarweise teilerfremden Primidealpotenzen.*

Beweis: a) Durchläuft $\mathfrak{p}_\tau$ alle Primideale aus $\mathfrak{R}$ und bedeutet $\mathfrak{J}_\tau$ jeweils den Ring aller der Elemente aus $\mathfrak{R}$, die vom Primidealquotientenring $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}_\tau}$ ganz abhängen, so wird $\mathfrak{J}' = \bigcap_\tau \mathfrak{J}_\tau = \mathfrak{J}$. — In der Tat, als ganz abgeschlossener Oberring von $\mathfrak{R}$ ist $\mathfrak{J}'$ sicher Oberring von $\mathfrak{J}$. Es sei ferner $\alpha = \frac{z}{n}$ $(z, n \subset \mathfrak{R})$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{J}'$; $\mathfrak{p}_{\tau_1}, \ldots, \mathfrak{p}_{\tau_m}$ seien die (sicher nur in endlicher Anzahl vorhandenen) Primideale aus $\mathfrak{R}$, die den Nenner n enthalten. Dann muß wegen $\alpha \subset \mathfrak{J}_{\tau_k}$ $(k = 1, \ldots, m)$ für hinreichend großes M und $k = 1, \ldots, m$ jeweils eine Gleichung $r_{k0} a^M + r_{k1} a^{M-1} + \ldots + r_{kM} = 0$ gelten, bei der die r_{ki} in $\mathfrak{R}$ liegen und insbesondere r_{k0} nicht zu $\mathfrak{p}_{\tau_k}$ gehört. Da außerdem $n \cdot a^M - z \cdot a^{M-1} = 0$ und $(r_{10}, \ldots, r_{m0}, n) = \mathfrak{R}$ ist, hängt ersichtlich α von $\mathfrak{R}$ ganz ab, d. h. wir haben nicht nur $\mathfrak{J}' \supseteq \mathfrak{J}$, sondern auch $\mathfrak{J}' \subseteq \mathfrak{J}$.

b) Da die $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}_\tau}$ primär sind, besitzt nach Satz 4 jeder $\mathfrak{J}_\tau$ eine Durchschnittsdarstellung $\mathfrak{J}_\tau = \mathfrak{D}_{\tau 1} \cap \mathfrak{D}_{\tau 2} \cap \ldots \cap \mathfrak{D}_{\tau m_\tau}$ und es wird somit auch $\mathfrak{J} = \bigcap_\tau (\mathfrak{D}_{\tau 1} \cap \mathfrak{D}_{\tau 2} \cap \ldots \cap \mathfrak{D}_{\tau m_\tau})$ Durchschnitt von diskreten Bewertungsringen. Ist ferner $\alpha = \frac{z}{n}$ $(z, n \subset \mathfrak{R})$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{J}$, und bedeuten $\mathfrak{p}_{\tau_1}, \ldots, \mathfrak{p}_{\tau_n}$ die endlich vielen Primideale aus $\mathfrak{R}$, die den Zähler z enthalten, so ist α höchstens in den endlich vielen Bewertungsringen $\mathfrak{D}_{\tau_k i}$ Nichteinheit $(k = 1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, m_{\tau_k})$, in allen andern $\mathfrak{D}_{\tau i}$ dagegen Einheit. Das heißt aber, $\mathfrak{J}$ stellt eine „endliche diskrete Hauptordnung" in dem von mir an anderer Stelle eingeführten Sinne dar, und es gilt der Satz,

---

[13]) Vgl. W. Krull, Ein Satz über primäre Integritätsbereiche, Math. Annalen **103** (1930), S. 540—565, sowie den Zusatz am Schluß der Note.

[14]) Zum Begriff des „diskreten" Bewertungsringes vgl. z. B. Bericht 36.

[15]) Satz 5, 6, 7 habe ich bereits im Bericht angegeben (39., S. 109).

daß in $\mathfrak{J}$ jedes Hauptideal Durchschnitt von symbolischen Potenzen endlich vieler, in $\mathfrak{J}$ minimaler Primideale ist[16]). Da ferner $\mathfrak{J}$ gleichzeitig mit $\mathfrak{R}$ einartig sein muß, sind alle überhaupt vorhandenen Primideale minimal, die symbolischen Potenzen sind gleichzeitig gewöhnliche Potenzen, und es kann die Durchschnitts- durch die Produktbildung ersetzt werden. Damit ist alles bewiesen. — Satz 5 läßt sich ergänzen durch

Satz 6: *Ist* $\mathfrak{q}$ *irgendein Primideal aus* $\mathfrak{J}$, *und bedeutet* $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap \mathfrak{R}$ *das Durchschnittsprimideal von* $\mathfrak{q}$ *mit* $\mathfrak{R}$, *so ist der Restklassenkörper* $\mathfrak{J}/\mathfrak{q}$ *stets eine endliche algebraische Erweiterung des Restklassenkörpers* $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$.

Beim Beweis darf man offenbar $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ setzen, d. h. man darf ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\mathfrak{R}$ primär annehmen. In diesem Fall aber führen die Methoden meiner früheren Arbeit über primäre Integritätsbereiche zum Ziel, ohne daß irgendwo ein wesentlich neuer Gedanke benötigt würde[17]).

Es sei nun $\mathfrak{R}$ ein beliebiger O-Ring, α sei ein von $\mathfrak{R}$ nicht ganz abhängiges Element aus $\mathfrak{K}$. Dann kann α^{-1} in $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}[\alpha^{-1}]$ nach einer bereits in 2. benutzten Schlußweise keine Einheit sein; da ferner $\mathfrak{S}$ gleichzeitig mit $\mathfrak{R}$ ein O-Ring ist, besitzt nach einem bekannten Satz[18]) kein minimales Primoberideal des Hauptideals (α^{-1}) in $\mathfrak{S}$ ein echtes Primunterideal, d. h. es wird $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$ primär für jedes minimale Primoberideal von (α^{-1}). Die Anwendung von Satz 4 auf den O-Ring $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$ zeigt, daß zwischen $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{K}$ mindestens ein diskreter Bewertungsring $\mathfrak{D}$ liegt, $\mathfrak{S}_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{D} \subset \mathfrak{K}$; da α^{-1} im primären Ring $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$ Nichteinheit ist, muß α^{-1} auch in $\mathfrak{D}$ Nichteinheit sein (vgl. Absatz a) des Beweises von Satz 1). Wir sehen somit: Zu jedem nicht zu $\mathfrak{J}$ gehörigen Elemente α aus $\mathfrak{K}$ gibt es in $\mathfrak{K}$ einen diskreten Bewertungsring $\mathfrak{D}$, der zwar $\mathfrak{R}$ und damit auch $\mathfrak{J}$, aber nicht α enthält. Oder anders ausgedrückt:

Satz 7: *Der zu einem O-Ring* $\mathfrak{R}$ *gehörige ganz abgeschlossene Ring* $\mathfrak{J}$ *ist stets Durchschnitt von diskreten Bewertungsringen.*

Aus Satz 7 folgt insbesondere, *daß* $\mathfrak{J}$ *stets vollständig ganz abgeschlossen und somit v-Multiplikationsring ist.* Diese Tatsache war nicht ohne

---

[16]) Vgl. W. Krull, Über die Zerlegung der Hauptideale in allgemeinen Ringen, Math. Annalen 105 (1931), S. 1—14, sowie Bericht 36.

[17]) Haben nämlich $\mathfrak{J}, \mathfrak{p}$; $\mathfrak{J}^*, \mathfrak{p}^*$; $\mathfrak{O}, \mathfrak{O}^*$ dieselbe Bedeutung wie in § 3 der in Anm.[13]) zitierten Note, so kann man zunächst $\mathfrak{J}/\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{J}^*/\mathfrak{p}^*$ in Anbetracht der Konstruktion von $\mathfrak{J}^*$ völlig identifizieren. Bedeutet ferner $\mathfrak{p}_1^*$ ein Primoberideal von $\mathfrak{p}^* \cdot \mathfrak{O}^*$ in $\mathfrak{O}^*$, $\mathfrak{p}_1$ das Durchschnittsprimideal von $\mathfrak{p}_1^*$ mit $\mathfrak{O}$, so läßt sich $\mathfrak{O}/\mathfrak{p}_1$ als Oberkörper von $\mathfrak{J}/\mathfrak{p} = \mathfrak{J}^*/\mathfrak{p}^*$ und $\mathfrak{O}^*/\mathfrak{p}_1^*$ als Oberkörper von $\mathfrak{O}/\mathfrak{p}_1$ auffassen. Aus den Überlegungen von § 2 der Note ergibt sich aber schließlich ohne weiteres, daß $\mathfrak{O}^*/\mathfrak{p}_1^*$ über $\mathfrak{J}^*/\mathfrak{p}^* = \mathfrak{J}/\mathfrak{p}$ endlich algebraisch sein muß.

[18]) W. Krull, Primidealketten in allgemeinen Ringbereichen, Sitz.-Ber. Heidelberger Akad. Wiss. 1928, 7. Abhandlung.

weiteres selbstverständlich, obwohl bei $\mathfrak{R}$ die Begriffe „ganz" und „fast ganz" abhängig zusammenfallen. Denn allein aus der Definition des Fast-Ganz-Abhängens geht nicht hervor, daß jedes von $\mathfrak{J}$ fast ganz abhängige Element auch von $\mathfrak{R}$ fast ganz abhängen muß.

Satz 7 kann noch nicht als voll befriedigend angesehen werden. Läßt man $\mathfrak{p}_\tau$ die sämtlichen in $\mathfrak{R}$ minimalen Primideale durchlaufen, und bildet man (wie beim Beweise von Satz 5) die zu den Quotientenringen $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}_\tau}$ gehörigen ganz abschlossenen Ringe $\mathfrak{J}_\tau$, so erweist sich wiederum $\mathfrak{J}' = \bigcap_\tau \mathfrak{J}_\tau$ als Oberring von $\mathfrak{J}$ und als endliche diskrete Hauptordnung. Es ist aber diesmal nicht unmittelbar zu sehen, daß jedes Element von $\mathfrak{J}'$ von $\mathfrak{R}$ ganz abhängen muß, d. h. man muß mit der Möglichkeit rechnen, daß $\mathfrak{J}'$ echter Oberring von $\mathfrak{J}$ wird. Erst die Entscheidung, ob nicht etwa doch in jedem Fall $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}'$ und somit $\mathfrak{J}$ endliche diskrete Hauptordnung ist, würde nach meiner Ansicht einen wirklichen Abschluß der in dieser Nummer dargestellten Untersuchungen bedeuten.

4. v-Ideale und algebraische Erweiterung.

Es sei wie bisher $\mathfrak{J}$ ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$, $\overline{\mathfrak{K}}$ sei ein algebraischer Oberkörper von $\mathfrak{K}$, $\overline{\mathfrak{J}}$ bedeute den Ring aller von $\mathfrak{J}$ ganz abhängigen Elemente aus $\mathfrak{K}$. Gilt dann für jedes $\mathfrak{J}$-Ideal $\mathfrak{a}$ die Gleichung $\mathfrak{a} \cdot \overline{\mathfrak{J}} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{a}$, entsprechen also die $\mathfrak{J}$-Ideale in $\mathfrak{K}$ eindeutig umkehrbar ihren Erweiterungsidealen hinsichtlich $\overline{\mathfrak{J}}$, so kann man unbedenklich beim Übergang von $\mathfrak{K}$ zu $\overline{\mathfrak{K}}$ jedes $\mathfrak{J}$-Ideal mit seinem $\overline{\mathfrak{J}}$-Erweiterungsideal identifizieren. Es soll nun gezeigt werden, daß die Verhältnisse stets derart einfach liegen, wenn man statt gewöhnlicher Ideale v-Ideale betrachtet.

Satz 8: *Für jedes* $\mathfrak{J}$*-Ideal* $\mathfrak{a}$ *ist* $(\mathfrak{a} \cdot \overline{\mathfrak{J}})_v \cap \mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{a}_v$; *insbesondere wird also stets* $(\mathfrak{a}_v \cdot \overline{\mathfrak{J}})_v \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{a}_v$.

Zum Beweis hat man nur zu bedenken, daß offenbar $\mathfrak{a}^{-1} \subset (\mathfrak{a} \cdot \overline{\mathfrak{J}})^{-1}$ ist, und daß dementsprechend $(\mathfrak{a}^{-1})^{-1} \supseteq ((\mathfrak{a} \cdot \overline{\mathfrak{J}})^{-1})^{-1} \cap \mathfrak{K}$ sein muß. — Es verdient besonders hervorgehoben zu werden, daß Satz 8, wie aus der Art seines Beweises zu ersehen, auch dann noch gilt, wenn unter $\overline{\mathfrak{J}}$ ein ganz beliebiger Integritätsbereich verstanden wird, der nur der einen Gleichung $\overline{\mathfrak{J}} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{J}$ genügt. – Satz 8 zeigt, daß die v-Ideale $\mathfrak{a}_v$ in $\mathfrak{K}$ eindeutig umkehrbar den aus ihren Erweiterungsidealen $\mathfrak{a}_v \cdot \overline{\mathfrak{J}}$ abgeleiteten v-Idealen $(\mathfrak{a}_v\ \overline{\mathfrak{J}})_v$ in $\overline{\mathfrak{K}}$ entsprechen. Dieses Ergebnis kann aber noch nicht voll befriedigen. Es muß mehr bewiesen werden, nämlich: Die v-Ideale, die man in $\overline{\mathfrak{K}}$ aus den Erweiterungsidealen *beliebiger* $\mathfrak{J}$-Ideale ableiten kann, entsprechen eindeutig umkehrbar den v-Idealen in $\mathfrak{K}$. Oder formelmäßig ausgedrückt:

Satz 9: *Für jedes beliebige* $\mathfrak{I}$*-Ideal* $\mathfrak{a}$ *gilt stets die Gleichung* $(\mathfrak{a}\cdot\widetilde{\mathfrak{I}})_v \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{a}_v$[19]).

Ehe wir an den Beweis von Satz 9 selbst herangehen, müssen wir einen an und für sich bemerkenswerten Hilfssatz ableiten:

Hilfssatz 1: *Es sei* $\mathfrak{I}$ *irgendein ganz abgeschlossener Integritätsbereich,* $\mathfrak{a}$ *ein beliebiges* $\mathfrak{I}$*-Ideal,* $\mathfrak{a}^k$ *sei wie üblich die k-te Potenz von* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_k$ *dagegen bedeute das kleinste Ideal, das die Menge der k-ten Potenzen aller Elemente von* $\mathfrak{a}$ *umfaßt. Dann ist immer* $(\mathfrak{a}^k)_b = (\mathfrak{a}_k)_b$ *und damit auch* $(\mathfrak{a}^k)_v = (\mathfrak{a}_k)_v$[20]).

Da jedenfalls $\mathfrak{a}^k \supseteq \mathfrak{a}_k$, hat man zum Beweis der Gleichung $(\mathfrak{a}^k)_b = (\mathfrak{a}_k)_b$ nur zu zeigen: Für jeden $\mathfrak{I}$ umfassenden Bewertungsring $\mathfrak{B}_\tau$ aus $\mathfrak{R}$ sind alle Produkte $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$ von k beliebigen Elementen $a_1, \ldots, a_k$ aus $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{a}_k \cdot \mathfrak{B}_\tau$ enthalten. Denn dann wird stets $\mathfrak{a}^k \cdot \mathfrak{B}_\tau = \mathfrak{a}_k \cdot \mathfrak{B}_\tau$ und mithin auch $(\mathfrak{a}^k)_b = \underset{\tau}{\Delta}(\mathfrak{a}^k \cdot \mathfrak{B}_\tau) = \underset{\tau}{\Delta}(\mathfrak{a}_k \cdot \mathfrak{B}_\tau) = (\mathfrak{a}_k)_b$. — Es ist nun $(a_1, \ldots, a_k)\cdot\mathfrak{B}_\tau$ stets Hauptideal, und zwar wird bei geeigneter Numerierung $(a_1, \ldots, a_k)\cdot\mathfrak{B}_\tau = (a_1)\cdot\mathfrak{B}_\tau$; daraus folgt wegen $a_1^k \subset \mathfrak{a}_k$ sofort $a_1 \cdot \ldots \cdot a_k \subset ((a_1, \ldots, a_k)\cdot\mathfrak{B}_\tau)^k = (a_1^k)\cdot\mathfrak{B}_\tau \subseteq \mathfrak{a}_k \cdot \mathfrak{B}_\tau$. — Aus $(\mathfrak{a}^k)_b = (\mathfrak{a}_k)_b$ ergibt sich weiter: $(\mathfrak{a}_k)^{-1} = ((\mathfrak{a}_k)_b)^{-1} = ((\mathfrak{a}^k)_b)^{-1} = (\mathfrak{a}^k)^{-1}$ [20]) und damit auch $(\mathfrak{a}_k)_v = ((\mathfrak{a}_k)^{-1})^{-1} = ((\mathfrak{a}^k)^{-1})^{-1} = (\mathfrak{a}^k)_v$.

Wir wenden uns nun zum Beweise von Satz 9.

a) Ist $\mathfrak{a}^{-1} \subseteq \mathfrak{I}$, also $\mathfrak{a}_v \supseteq \mathfrak{I}$, so ist auch $(\mathfrak{a}\cdot\widetilde{\mathfrak{I}})^{-1} \subseteq \widetilde{\mathfrak{I}}$, also $(\mathfrak{a}\cdot\widetilde{\mathfrak{I}})_v \supseteq \widetilde{\mathfrak{I}}$. — In der Tat, aus $\mathfrak{a}^{-1} \subseteq \mathfrak{I}$ folgt $(\mathfrak{a}^k)^{-1} = (\mathfrak{a}_k)^{-1} \subseteq \mathfrak{I}$ für jedes k. Es sei jetzt $\omega \subset (\mathfrak{a}\cdot\widetilde{\mathfrak{I}})^{-1}$, $\omega^n + c_1\omega^{n-1} + \ldots + c_n = 0$ sei die Gleichung niedrigsten Grades, der ω über $\mathfrak{R}$ genügt. Dann hängt $a\cdot\omega$ für beliebiges $a \subset \mathfrak{a}$ von $\mathfrak{I}$ ganz ab, und daraus folgt, daß auch in der Gleichung niedrigsten Grades für $a\cdot\omega$, also in der Gleichung $(a\cdot\omega)^n + a\cdot c_1\cdot(a\cdot\omega)^{n-1} + \ldots + a^n\cdot c_n = 0$ die Koeffizienten $a^k\cdot c_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ alle in $\mathfrak{I}$ liegen müssen. (Man beachte den „Kroneckerschen Satz" 4 von Beitrag I, oder man überlege sich direkt, daß die Behauptung für $\mathfrak{I} = \underset{\tau}{\Delta}\mathfrak{B}_\tau$ richtig sein muß, weil sie für jeden $\mathfrak{I}$ umfassenden Bewertungsring $\mathfrak{B}_\tau$ mühelos nachgerechnet werden kann). — Da a beliebig in $\mathfrak{a}$ gewählt war, haben wir somit: $\mathfrak{a}_k\cdot(c_k) \subseteq \mathfrak{I}$ $(k = 1, \ldots, n)$, und wegen $\mathfrak{a}_k^{-1} \subseteq \mathfrak{I}$ folgt daraus $c_k \subset \mathfrak{I}$ $(k = 1, \ldots, n)$, d. h. jedes ω aus $(\mathfrak{a}\cdot\widetilde{\mathfrak{I}})^{-1}$ hängt von $\mathfrak{I}$ ganz ab, $(\mathfrak{a}\cdot\widetilde{\mathfrak{I}})^{-1} \subseteq \widetilde{\mathfrak{I}}$.

---

[19]) Für endliche Ideale wurde Satz 9 bereits von Prüfer bewiesen. (Teilbarkeitseigenschaften, § 11, S. 31f.). Auch der Beweis des Textes stammt im wesentlichen von Prüfer. Nur der für die Behandlung der nichtendlichen Ideale wesentliche Hilfssatz 1 ist neu.

[20]) Zum b-Idealbegriff vgl. Beitrag I. $(\mathfrak{a}_b)^{-1} = \mathfrak{a}^{-1}$ folgt sofort aus $\mathfrak{a}_b \subseteq \mathfrak{a}_v$ und $(\mathfrak{a}_v)^{-1} = \mathfrak{a}^{-1}$.

b) Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges $\mathfrak{J}$-Ideal, so hat man von $a \subset \mathfrak{a}_v$ auf $a \subset (\mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{J}})_v$, d. h. auf $a \cdot \omega \subset \widetilde{\mathfrak{J}}$ für jedes $\omega \subset (\mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{J}})^{-1}$ zu schließen. Es ist aber für $\mathfrak{b} = (a^{-1}) \cdot \mathfrak{a}$ offenbar $(a^{-1}) \cdot \mathfrak{a}_v = \mathfrak{b}_v \supseteq \mathfrak{J}$, $a \cdot \omega \subset (\mathfrak{b} \cdot \widetilde{\mathfrak{J}})^{-1}$, $a \cdot \omega \subset \widetilde{\mathfrak{J}}$ nach a). Fertig!

Ist $\mathfrak{J}_x$ ein vorgegebener Polynomring in einer Variabelnmenge $x_1, x_2, \ldots, x_\tau, \ldots$ von beliebiger Mächtigkeit mit Koeffizienten aus dem ganz abgeschlossenen Integritätsbereich $\mathfrak{J}$, und bedeutet $\mathfrak{K}_x$ den Quotientenkörper von $\mathfrak{J}_x$, so soll jedes Element α eines algebraischen Oberkörpers $\widetilde{\mathfrak{K}}$ von $\mathfrak{K}_x$, das von $\mathfrak{J}_x$ ganz abhängt, als eine „ganze algebraische Funktion über dem Grundbereich $\mathfrak{J}$" bezeichnet werden[21]).

Satz 10: *Ist $\widetilde{\mathfrak{J}}$ ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich aus ganzen algebraischen Funktionen über dem Grundbereich $\mathfrak{J}$, so gelten für jedes $\mathfrak{J}$-Ideal $\mathfrak{a}$ die Gleichungen* $(\mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{J}})_v \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{a}_v$, $(\mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{J}})_b \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{a}_b$.

In der Tat, nach der in Anm. [5]) zitierten Note ist $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{J}_x)_v \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{a}_v$ für jedes $\mathfrak{a}$. Andererseits ist nach Satz 9 für jedes $\mathfrak{J}_x$-Ideal $\mathfrak{a}_x$ sicher $(\mathfrak{a}_x \cdot \widetilde{\mathfrak{J}})_v \cap \mathfrak{K}_x = (\mathfrak{a}_x)_v$. Man erhält somit: $(\mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{J}})_v \cap \mathfrak{K} = \big(((\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{J}_x) \cdot \widetilde{\mathfrak{J}})_v \cap \mathfrak{K}_x\big) \cap \mathfrak{K} = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{J}_x)_v \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{a}_v$. — Die auf die b-Ideale bezügliche Behauptung ergibt sich aus der Bemerkung, daß jeder Bewertungsring $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{K}$, der den Grundbereich $\mathfrak{J}$ umfaßt, eine $\widetilde{\mathfrak{J}}$ umfassende Fortsetzung $\widetilde{\mathfrak{B}}$ auf den Quotientenkörper $\widetilde{\mathfrak{K}}$ von $\widetilde{\mathfrak{J}}$ besitzt. Denn es wird ja $(\mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{J}})_b = \underset{\tau}{\Delta} (\mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{J}}) \cdot \widetilde{\mathfrak{B}}_\tau = \underset{\tau}{\Delta} \mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{B}}_\tau$, wobei $\widetilde{\mathfrak{B}}_\tau$ alle $\widetilde{\mathfrak{J}}$ umfassenden Bewertungsringe aus $\widetilde{\mathfrak{K}}$ durchläuft, und daraus folgt $(\mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{J}})_b \cap \mathfrak{K} = \underset{\tau}{\Delta} ((\mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{B}}_\tau) \cap \mathfrak{K}) = \underset{\tau}{\Delta} \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}_\tau$, wobei der letzte Durchschnitt in Anbetracht unsrer Bemerkung über *alle* $\mathfrak{J}$ umfassenden Bewertungsringe aus $\mathfrak{K}$ zu erstrecken ist. — Was die benutzte „Bemerkung" angeht, so kann man zunächst zu jedem $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{J}$ aus $\mathfrak{K}$ eine „triviale", $\mathfrak{J}_x$ umfassende Fortsetzung $\widetilde{\mathfrak{B}}_x^*$ auf $\mathfrak{K}_x$ nach genau demselben Schema konstruieren, wie wir es in Beitrag I im Falle einer Variabeln x haben kennen lernen; andererseits zeigt die Theorie der algebraischen Erweiterung bewerteter Körper, daß zu jedem $\mathfrak{B}_x \supseteq \mathfrak{J}_x$ aus $\mathfrak{K}_x$ mindestens eine Fortsetzung $\widetilde{\mathfrak{B}}$ auf $\widetilde{\mathfrak{K}}$ existiert, die dann selbstverständlich den Ring $\widetilde{\mathfrak{J}}$ enthält[22]). — Wie man sieht, erfordert die Behandlung der rein bewertungstheoretisch definierten b-Ideale keine solchen rechnerischen Kunstgriffe, wie sie bei den v-Idealen nötig waren[23]).

---

[21]) Der Begriff der ganzen algebraischen Funktion, so wie wir ihn hier benutzen, hängt nicht allein von $\mathfrak{J}$ und dem Körper $\mathfrak{K}_x$, sodern außerdem wesentlich vom Integritätsbereich $\mathfrak{J}_x$, also von der in $\mathfrak{K}_x$ ausgezeichneten Variabelnmenge $x_1, x_2, \ldots, x_\tau, \ldots$ ab!

[22]) Vgl. Beitrag I, Anm. [16]) bzw. Bewertungstheorie, § 11, Satz 13.

[23]) Die Schlüsse, die bei der b-Operation zum Ziele führten, lassen sich auf beliebige Wertidealoperationen (im Sinne von Beitrag I) anwenden. Es sei in $\widetilde{\mathfrak{K}}$

5. Der Permanenzsatz für Artinsche v-Multiplikationsringe.

Es sei jetzt wieder $\widetilde{\mathfrak{J}}$ der Ring aller von $\mathfrak{J}$ ganz abhängigen Elemente aus einem *algebraischen* Oberkörper $\widetilde{\mathfrak{K}}$ von $\mathfrak{K}$. Ist α ein Element aus $\widetilde{\mathfrak{K}}$, so soll unter $N(\alpha)$ die Norm von α über $\mathfrak{K}$ verstanden werden, also das Element $(-1)^n a_n$, falls $\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ die Gleichung niedrigsten Grades darstellt, der α über $\mathfrak{K}$ genügt. Unser Ziel ist der Beweis von:

Satz 11: *Ist $\mathfrak{J}$ vollständig ganz abgeschlossen, so ist es auch $\widetilde{\mathfrak{J}}$.*

Die Richtigkeit von Satz 11 ergibt sich sofort durch indirekten Schluß aus den folgenden beiden Hilfssätzen:

Hilfssatz 1: *Hängt α von $\widetilde{\mathfrak{J}}$ fast ganz ab, so liegt $N(\alpha)$ in $\mathfrak{J}$.*

Hilfssatz 2: *Angenommen, es gibt ein von $\widetilde{\mathfrak{J}}$ fast ganz abhängiges, aber nicht zu $\widetilde{\mathfrak{J}}$ gehöriges Element α. Dann gibt es auch ein von $\widetilde{\mathfrak{J}}$ fast ganz abhängiges Element β, bei dem $N(\beta)$ nicht in $\mathfrak{J}$ liegt.*

Beim Beweis der Hilfssätze darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß $\widetilde{\mathfrak{K}}$ einen Normalkörper von endlichem Grade m über $\mathfrak{K}$ darstellt. Wäre nämlich diese Bedingung nicht von vornherein erfüllt, so könnte man die Untersuchung ohne Änderung der wesentlichen Voraussetzungen in einen derartigen Körper verlegen.

Es sei γ ein Element aus $\widetilde{\mathfrak{J}}$, für das alle Produkte $\gamma \cdot \alpha^i (i = 1, 2, \ldots)$ zu $\widetilde{\mathfrak{J}}$ gehören, $\gamma_1, \ldots, \gamma_{m-1}$ seien in $\widetilde{\mathfrak{K}}$ die sämtlichen (nicht notwendig alle verschiedenen) Konjugierten von $\gamma = \gamma_0$ über $\mathfrak{K}$; die entsprechenden Konjugierten von $\alpha = \alpha_0$ seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$. Dann ergibt sich aus Isomorphiegründen sofort, daß alle Produkte $\gamma_k \cdot \alpha_k^i$ $(k = 1, \ldots, m-1;$ $i = 1, 2, \ldots)$ in $\widetilde{\mathfrak{J}}$ liegen, und daraus folgt weiter $(\gamma_0 \cdot \gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_{m-1}) \cdot (\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_{m-1})^k \subset \widetilde{\mathfrak{J}} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{J}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Da $\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_{m-1}$ eine Potenz von $N(\alpha)$ darstellt und da $\mathfrak{J}$ vollständig ganz abgeschlossen ist, muß somit $N(\alpha) \subset \mathfrak{J}$ sein. (Hilfssatz 1).

Gehört α nicht zu $\widetilde{\mathfrak{J}}$, so muß es mindestens einen $\widetilde{\mathfrak{J}}$ umfassenden Bewertungsring $\widetilde{\mathfrak{B}} = \widetilde{\mathfrak{B}}_0$ geben, der α nicht enthält und in dessen zugehöriger Bewertung $\widetilde{B} = \widetilde{B}_0$ dementsprechend α einen negativen Wert besitzt. Den Automorphismen von $\widetilde{\mathfrak{K}}$ über $\mathfrak{K}$ entspricht eine Serie von zu $\widetilde{\mathfrak{B}}$ konjugierten Bewertungsringen, die alle mit $\mathfrak{K}$ denselben Durch-

---

für die $\widetilde{\mathfrak{J}}$-Ideale mit Hilfe einer bestimmten Bewertungsringmenge $\widetilde{\mathbf{M}}$ eine „$\widetilde{w}$-Operation" definiert; es bezeichne ferner $\mathbf{M}$ die Menge derjenigen Bewertungsringe, die entstehen, wenn man die Ringe aus $\widetilde{\mathbf{M}}$ mit $\mathfrak{K}$ zum Durchschnitt bringt. Gründet man dann auf $\mathbf{M}$ in $\mathfrak{K}$ eine „w-Operation" für die $\mathfrak{J}$-Ideale, so gilt für jedes $\mathfrak{J}$-Ideal $\mathfrak{a}$ die Gleichung $(\mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{J}})_{\widetilde{w}} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{a}_w$. (Man wird in diesem Falle zweckmäßig die w-Operation in $\mathfrak{J}$ und die $\widetilde{w}$-Operation in $\widetilde{\mathfrak{J}}$ „zusammengehörige "Wertidealoperationen nennen).

schnitt $\mathfrak{\widetilde{B}} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{B}$ haben. Es seien $\mathfrak{\widetilde{B}}_0, \mathfrak{\widetilde{B}}_1, \ldots, \mathfrak{\widetilde{B}}_{r-1}$ die sämtlichen verschiedenen Ringe dieser Konjugiertenserie, $\widetilde{B}_i$ $(i = 0, \ldots, r-1)$ seien die zugehörigen Bewertungen. Wir behaupten nun:

Es gibt ein Element β, das ein Polynom in α mit Koeffizienten aus $\mathfrak{J}$ darstellt und das in $\widetilde{B}_0$ einen negativen Wert, in $\widetilde{B}_1, \ldots, \widetilde{B}_{r-1}$ jedenfalls nichtpositive Werte hat.

Es seien $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1, \ldots, \widetilde{B}_{\sigma-1}$ diejenigen $\widetilde{B}_i$, in denen der Wert von α negativ ist, $\widetilde{B}_\varrho, \widetilde{B}_{\varrho+1}, \ldots, \widetilde{B}_{\sigma-1}$ bzw. $\widetilde{B}_\sigma, \widetilde{B}_{\sigma+1}, \ldots, \widetilde{B}_{r-1}$ seien diejenigen, in denen α einen positiven bzw. den Wert 0 hat. Wird $\varrho = \sigma$, treten also keine Bewertungen der zweiten Art auf, so kann man $\alpha = \beta$ setzen. Im anderen Fall hat jedenfalls $\alpha + 1$ in $\widetilde{B}_0, \ldots, \widetilde{B}_{\varrho-1}$ negative Werte, in $\widetilde{B}_\varrho, \ldots, \widetilde{B}_{\sigma-1}$ den Wert 0. Sollte der Wert von $\alpha + 1$ auch in $\widetilde{B}_\sigma, \ldots, \widetilde{B}_{r-1}$ gleich 0 sein, so darf $\alpha + 1 = \beta$ gesetzt werden. Tritt diese Möglichkeit nicht ein, so genügt das Element $\alpha' = \alpha(\alpha + 1)$ den folgenden beiden Bedingungen: 1. In $\widetilde{B}_0, \widetilde{B}_1, \ldots, \widetilde{B}_{\varrho-1}$ hat α' negative Werte. 2. In $\widetilde{B}_\varrho, \ldots, \widetilde{B}_{\sigma-1}$ und außerdem noch in mindestens einer der Bewertungen $\widetilde{B}_\sigma, \ldots, \widetilde{B}_{r-1}$ ist der Wert von α' positiv. Auf α' wenden wir nun genau dieselben Schlüsse an wie vorher auf α usw. Man kommt so entweder schon früher zu einem Element β der gesuchten Art, oder man gewinnt schließlich ein Element $\alpha^{(\omega)}$ $(\omega \leqq r - \sigma)$, das in $\widetilde{B}_0, \ldots, \widetilde{B}_{\varrho-1}$ negative, in $\widetilde{B}_\varrho, \ldots, \widetilde{B}_{r-1}$ dagegen überall positive Werte hat. Dann aber darf $\beta = \alpha^{(\omega)} + 1$ gesetzt werden.

Nachdem die Existenz von β gesichert ist, ergibt sich weiter: β hängt stets gleichzeitig mit α von $\mathfrak{\widetilde{J}}$ fast ganz ab, da ja die Menge aller von $\mathfrak{\widetilde{J}}$ fast ganz abhängigen Elemente einen Ring bildet. Sind $\beta_1, \ldots, \beta_{m-1}$ die sämtlichen (gleichen oder verschiedenen) Konjugierten von β über $\mathfrak{R}$, so hat $\beta = \beta_0$ in $\widetilde{B}_0 = \widetilde{B}$ einen negativen Wert, während aus Isomorphiegründen die Werte von $\beta_1, \ldots, \beta_{m-1}$ in $\widetilde{B}$ jedenfalls durchweg nicht positiv sind. $(\beta_0 \cdot \ldots \cdot \beta_{m-1})$ ist demnach ein nicht zu $\mathfrak{\widetilde{B}}$ und wegen $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{\widetilde{B}}$ erst recht nicht zu $\mathfrak{J}$ gehöriges Element aus $\mathfrak{R}$. Da $(\beta_0 \cdot \ldots \cdot \beta_{m-1})$ eine Potenz von $N(\beta)$ darstellt, ist damit Hilfssatz 2 bewiesen.

Aus Satz 11 folgt sofort der schon in 1. angekündigte Permanenzsatz:

Satz 12. *Ist $\mathfrak{J}$ ein Artinscher Multiplikationsring, so gilt das gleiche für jeden ganz abgeschlossenen Integritätsbereich aus ganzen algebraischen Funktionen über dem Grundbereich $\mathfrak{J}$.*

Da nach dem „Gruppensatz der v-Ideale" die Begriffe „Artinscher v-Multiplikationsring" und „vollständig ganz abgeschlossener Integritätsbereich" identisch sind, hat man zum Beweise von Satz 12 nur dreierlei zu beachten: Den in 4. näher beschriebenen Aufbau der Ringe aus ganzen algebraischen Funktionen, Satz 11, und die Tatsache, daß Satz 12

nach meiner in Anmerkung [5]) zitierten Note für die Polynomringe $\mathfrak{J}_x$ über $\mathfrak{J}$ jedenfalls richtig ist. — Vergleicht man das gewonnene Ergebnis mit den Sätzen, die sich bereits bei van der Waerden finden[24]), so ergibt sich: Die Sätze des Lehrbuches reichen aus, um zu zeigen, daß jeder ganz abgeschlossene Integritätsbereich aus ganzen algebraischen Funktionen über einem *Körper* Artinscher v-Multiplikationsring ist. Unser Permanenzsatz stellt eine arithmetische Verfeinerung dar, indem gezeigt wird, daß der Grundbereich auch ein geeigneter *Integritätsbereich* sein darf.

Zum Schlusse sei noch darauf hingewiesen, daß Satz 11 viel einfacher bewiesen werden könnte, wenn man wüßte, daß jeder vollständig ganz abgeschlossene Integritätsbereich Durchschnitt von Maximalringen ist. Dann brauchte man sich nur auf die — im wesentlichen bekannte[25]) — Tatsache zu berufen, daß gleichzeitig mit $\mathfrak{J}$ stets auch $\bar{\mathfrak{J}}$ als Durchschnitt von Maximalringen dargestellt werden kann.

---

[24]) Moderne Algebra, § 103.

[25]) Vgl. Bericht 48.

(Eingegangen am 28. März 1936.)

25. Juni 1936. Zusatz bei der Korrektur. Ein neuer, einfacher Beweis für Satz 4 wurde von Y. Akizuki angegeben. [Einige Bemerkungen über primäre Integritätsbereiche mit Teilerkettensatz, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, 3. ser., vol. 17 (1935) S. 327—336]. Über den Satz 4 hinaus beweist Akizuki, daß jeder Zwischenring zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{J}$ ein O-Ring ist, auch gibt er ein Beispiel an, bei dem $\mathfrak{J}$ über $\mathfrak{R}$ keine endliche Modulbasis besitzt.

On certain new connections between Legendre and Bessel Functions.

By

S. C. Mitra, Dacca (India).

The object of the present note is to obtain certain new relations between Legendre and Bessel Functions.

Let n be either zero or a positive integer.

1. Then[1]), we know that if m is greater than -1,

$$(1) \qquad \int_0^1 P_n(1-2y^2)\, y^{2m+1}\, dy = (-1)^n \frac{\{\Gamma(m+1)\}^2}{2\,\Gamma(m-n+1)\,\Gamma(m+n+2)}.$$

Consider the integral

$$I = \int_0^1 P_n(1-2y^2)\, y^2 \{(n+\nu+1)\, J_{\nu-1}(yz) + (n-\nu+1)\, J_{\nu+1}(yz)\}\, J_\nu(yz)\, dy, \qquad (\nu > -1).$$

Expanding the integrand in powers of z, and integrating term by term[2]), we get

$$(2) \qquad I = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+2\nu-1}\, \Gamma(2m+2\nu)\,(n+\nu+1)}{2^{2m+2\nu-1}\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(m+\nu)\,\Gamma(m+\nu+1)\,\Gamma(m+2\nu)} \times \int_0^1 P_n(1-2y^2)\, y^{2m+2\nu+1}\, dy$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+2\nu+1}\, \Gamma(2m+2\nu+2)\,(n-\nu+1)}{2^{2m+2\nu+1}\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(m+\nu+1)\,\Gamma(m+\nu+2)\,\Gamma(m+2\nu+2)} \times \int_0^1 P_n(1-2y^2)\, y^{2m+2\nu+3}\, dy$$

$$= \tfrac{1}{4}(-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^m z^{2m+2\nu-1}\, \Gamma(2m+2\nu+1)\,(n+\nu+1)}{2^{2m+2\nu-1}\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(m-n+\nu+1)\,\Gamma(m+n+\nu+2)\,\Gamma(m+2\nu)} + \frac{(-1)^m z^{2m+2\nu+1}\, \Gamma(2m+2\nu+3)\,(n-\nu+1)}{2^{2m+2\nu+1}\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(m-n+\nu+2)\,\Gamma(m+n+\nu+3)\,\Gamma(m+2\nu+2)} \right\}$$

---

[1]) This is obtained by putting $1-2y^2$ for x in Rodrigues' formula and integrating n times by parts, Cf. Cooke, *Proc. London Math. Soc.*, Series 2, **23**, (1924). XIX.

[2]) The process of arrangement and term by term integration can be easily justified.

$$= \tfrac{1}{2}(-1)^n \nu \frac{z^{2\nu-1}}{2^{2\nu-1}\Gamma(\nu-n+1)\Gamma(\nu+n+1)}$$

$$+ \tfrac{1}{2}(-1)^n \nu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+2\nu-1}\Gamma(2m+2\nu+1)}{2^{2m+2\nu-1}\Gamma(m+1)\Gamma(m-n+\nu+1)\Gamma(m+n+\nu+1)\Gamma(m+2\nu+1)}$$

$$= \tfrac{1}{2}(-1)^n \nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+2\nu-1}\Gamma(2m+2\nu+1)}{2^{2m+2\nu-1}\Gamma(m+1)\Gamma(m-n+\nu+1)\Gamma(m+n+\nu+1)\Gamma(m+2\nu+1)}$$

$$= (-1)^n \nu z^{-1} J_{\nu-n}(z) J_{\nu+n}(z).$$

In a similar way we can prove the following results[3])

(3) $$\int_0^1 P_n(1-2y^2) J_0(yz)\, y\, dy = z^{-1} J_{2n+1}(z).$$

(4) $$\int_0^1 P_n(1-2y^2) \sin 2yz\, dy = \frac{\pi}{2} J^2_{n+\frac{1}{2}}(z).$$

(5) $$\int_0^1 P_n(1-2y^2) \cos 2yz\, dy = \frac{\pi}{2}(-1)^n J_{n+\frac{1}{2}}(z) J_{-n-\frac{1}{2}}(z).$$

(6) $$\int_0^1 P_n(1-2y^2) \operatorname{Exp}(-2yz)\, dy = I_{n+\frac{1}{2}}(z) K_{n+\frac{1}{2}}(z).$$

(7) $$\int_0^1 P_n(1-2y^2) H_0(yz)\, y\, dy$$

$$= z^{-1} H_{2n+1}(z) + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^{m+n} z^{2m+1}}{2^{2m+2}\Gamma(m-n+\frac{3}{2})\Gamma(m+n+\frac{3}{2})}$$

and

(8) $$\int_0^1 P_n(1-2y^2) E_0(yz)\, y\, dy = z^{-1} E_{2n+1}(z) - 2\{(2n+1)\pi z\}^{-1};$$

where $H_0(z)$ and $H_{2n+1}(z)$ are Struve's functions[4]) of orders zero and $2n+1$ respectively, and[5])

$$E_n(z) = \sin\frac{n\pi}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{2^{2m}\Gamma(m-\frac{1}{2}n+1)\Gamma(m+\frac{1}{2}n+1)}$$

$$- \cos\frac{n\pi}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+1}}{2^{2m+1}\Gamma(m-\frac{1}{2}n+\frac{3}{2})\Gamma(m+\frac{1}{2}n+\frac{3}{2})}.$$

---

[3]) (3) has been given in the *Proc. Edinburgh Math. Soc.* Series 2, 4, Part. III (1935), S. 111; (4), (5), (6) have been given in the *Bulletin, Calcutta Math. Soc.*, Vol. 25, 2 (1933), S. 81—98.

[4]) Watson, *Bessel Functions*, S. 328.

[5]) *loc. cit.*, S. 309; It is to be noticed that $E_0(z) = -H_0(z)$.

2.1. Let us consider the relation (3).

Multiply both sides of (3) by $z^{-1}\,\mathrm{Exp}\,(-2kz^{-1})$ and integrate with respect to z between the limits zero and infinity. We get[6])

$$\int_0^1 P_n(1-2y^2)\,y\,dy\int_0^\infty J_0(yz)\,z^{-1}\,\mathrm{Exp}\,(-2kz^{-1})\,dz$$

$$=\int_0^\infty J_{2n+1}(z)\,z^{-2}\,\mathrm{Exp}\,(-2kz^{-1})\,dz$$

$$=\frac{1}{2(2n+1)}\int_0^\infty \left(J_{2n}(z)+J_{2n+2}(z)\right)z^{-1}\,\mathrm{Exp}\,(-2kz^{-1})\,dz.$$

Now Hardy has proved that[7])

$$\int_0^\infty J_n(z)\,z^{-1}\,\mathrm{Exp}\,(-2kz^{-1})\,dz = 2J_n(2\sqrt{k})\,K_n(2\sqrt{k}).$$

We therefore get

$$\int_0^1 P_n(1-2y^2)\,J_0(2\sqrt{ky})\,K_0(2\sqrt{ky})\,y\,dy \tag{9}$$

$$=\frac{1}{2(2n+1)}\left\{J_{2n}(2\sqrt{k})\,K_{2n}(2\sqrt{k})+J_{2n+2}(2\sqrt{k})\,K_{2n+2}(2\sqrt{k})\right\}.$$

2.2. Let us now write $2z\sin\Theta$ for z in (3).

We get

$$\int_0^1 P_n(1-2y^2)\,J_0(2yz\sin\Theta)\,y\,dy = (2z\sin\Theta)^{-1}J_{2n+1}(2z\sin\Theta)$$

$$=\frac{1}{2(2n+1)}\left(J_{2n}(2z\sin\Theta)+J_{2n+2}(2z\sin\Theta)\right).$$

Integrating with respect to Θ between the limits zero and $\frac{\pi}{2}$ and making use of the well-known formula[8])

$$J_n^2(z)=2\pi^{-1}\int_0^{\pi/2} J_{2n}(2z\sin\Theta)\,d\Theta$$

we get

$$\int_0^1 P_n(1-2y^2)\,J_0^2(yz)\,y\,dy=\frac{1}{2(2n+1)}\left(J_n^2(z)+J_{n+1}^2(z)\right). \tag{10}$$

---

[6]) In this and in the subsequent cases, change in the order of integration is permissible; See *Theory of Infinite series* by Bromwich, Art. 177.

[7]) Hardy, *Messenger of Math.* **56**, S. 190.

[8]) Neumann, *Theorie der Bessel'schen Functionen*, (Leipzig, 1867). S. 70.

Now multiply both sides of (10) by $\frac{z}{z^2+k^2}$ and integrate with respect to z between zero and infinity.

Since[9])

$$\int_0^\infty \frac{J_n^2(az)\,z}{z^2+k^2}\,dz = I_n(ak)\,K_n(ak),$$

we have

$$\int_0^1 P_n(1-2y^2)\,I_0(ky)\,K_0(ky)\,y\,dy$$

$$= \frac{1}{2(2n+1)}\{I_n(k)\,K_n(k) + I_{n+1}(k)\,K_{n+1}(k)\}. \tag{11}$$

2.3. Again let us multiply both sides of (3) by $\mathrm{Exp}(-kz)$ and integrate as before between zero and infinity.

We get

$$\int_0^1 \frac{P_n(1-2y^2)\,y}{\sqrt{(k^2+y^2)}}\,dy = \frac{1}{2n+1}\,\frac{1}{\{\sqrt{(k^2+1)}+k\}^{2n+1}} \tag{12}$$

whence we have,

$$\int_0^1 P_n(1-2y^2)\,y\,dy \int_0^\infty \frac{\mathrm{Exp}(-kz)}{\sqrt{k^2+y^2}}\,dk$$

$$= \frac{1}{2n+1}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Exp}(-kz)}{\{\sqrt{(k^2+1)}+k\}^{2n+1}}\,dk.$$

The left hand side is[10])

$$-\frac{\pi}{2}\int_0^1 P_n(1-2y^2)\,(E_0(yz)+Y_0(yz))\,y\,dy.$$

To evaluate the integral on the right, put $k = \sinh t$.

The integral becomes

$$\frac{1}{2(2n+1)}\int_0^\infty \mathrm{Exp}(-z\sinh t)\,(\mathrm{Exp}(-2nt)+\mathrm{Exp}(-2(n+1)t))\,dt$$

which is equal to

$$-(2z)^{-1}\left\{S_{2n+1}(z)+\pi E_{2n+1}(z)-\frac{2}{2n+1}+\pi Y_{2n+1}(z)\right\}$$

---

[9]) Hankel, *Math. Annalen* 8, S. 461—467.

[10]) Watson, *loc. cit.*, S. 313; $Y_0(x)$ is Bessel's function of the second kind, see Watson, *loc. cit.*, S. 64.

where[11])

$$S_n(z) = \sum_{m=1}^{\frac{1}{2}n} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}n+m)\,2^{2m}}{\Gamma(\frac{1}{2}n-m+1)\,z^{2m}} \qquad (n, \text{ even})$$

$$= \sum_{m=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}n+m+\frac{1}{2})\,2^{2m+1}}{\Gamma(\frac{1}{2}n-m+\frac{1}{2})\,z^{2m+1}} \qquad (n, \text{ odd})$$

and

$$S_0(z) = 0.$$

Therefore we have, on using the relation (8),

$$(13) \quad \int_0^1 P_n(1-2y^2)\,Y_0(yz)\,y\,dy = (\pi z)^{-1}\{S_{2n+1}(z) + \pi\,Y_{2n+1}(z)\}.$$

Similarly, we get

$$(14) \quad \int_0^1 P_n(1-2y^2)\,K_0(yz)\,y\,dy = z^{-1}\{(-1)^{n+1}K_{2n+1}(z) + \tfrac{1}{2}\,i\,S_{2n+1}(iz)\},$$

where i stands for $\sqrt{-1}$.

Other integrals involving Bessel Functions.

3. We shall now evaluate a number of integrals involving Bessel Functions only.

Let us consider the relation (6).

Writing tz for z and differentiating both sides with respect to t[12]), we get

$$\int_0^1 P_n(1-2y^2)\,\mathrm{Exp}(-2ytz)\,y\,dy = -(2z)^{-1}\frac{d}{dt}\{I_{n+\frac{1}{2}}(tz)\,K_{n+\frac{1}{2}}(tz)\}.$$

From this we have

$$\int_0^1 P_n(1-2y^2)\,y\,dy \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{Exp}(-2ytz)\,dt$$

$$= -(2z)^{-1}\int_{-1}^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dt}\{I_{n+\frac{1}{2}}(tz)\,K_{n+\frac{1}{2}}(tz)\}\,dt.$$

Since[13])

$$I_0(z) = \pi^{-1}\int_{-1}^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{Exp}(-tz)\,dt$$

we get

$$\int_0^1 P_n(1-2y^2)\,I_0(2yz)\,y\,dy$$

$$= -(2\pi z)^{-1}\int_{-1}^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dt}\{I_{n+\frac{1}{2}}(tz)\,K_{n+\frac{1}{2}}(tz)\}\,dt.$$

---

[11]) Watson, *loc. cit.*, S. 286.

[12]) The differentiation under the sign of integration is justifiable.

[13]) The result is due to Basset, See Watson, *loc. cit.*, S. 80.

The left hand side is $(-1)^n (2z)^{-1} I_{2n+1}(2z)$.
Therefore

$$(15)\quad \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} \{I_{n+\frac{1}{2}}(tz) K_{n+\frac{1}{2}}(tz)\}\, dt = (-1)^{n+1} \pi I_{2n+1}(2z).$$

Similarly, we have from (3), (4) and (5), the following integrals.

$$(16)\quad \int_{0}^{1} (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} \{J^2_{n+\frac{1}{2}}(tz)\}\, dt = J_{2n+1}(2z)\ ^{14})$$

$$(17)\quad \int_{1}^{\infty} (t^2-1)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} \{J^2_{n+\frac{1}{2}}(tz)\}\, dt = -\left(Y_{2n+1}(2z) + \pi^{-1} S_{2n+1}(2z)\right)$$

$$(18)\quad \int_{1}^{\infty} (t^2-1)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} \{J_{n+\frac{1}{2}}(tz) J_{-n-\frac{1}{2}}(tz)\}\, dt = (-1)^{n+1} J_{2n+1}(2z)$$

$$(19)\quad \int_{0}^{\infty} \frac{J_{2n+1}(z)}{z^2+k^2}\, dz = k^{-1} \{(-1)^{n+1} K_{2n+1}(k) + \tfrac{1}{2} i S_{2n+1}(ik)\}$$

where $i = \sqrt{-1}$ and

$$(20)\quad \int_{0}^{\infty} \frac{J_{2n+1}(z)}{z(z+k)}\, dz = \pi (2k)^{-1} (H_{2n+1}(k) - Y_{2n+1}(k))$$

$$- (2k)^{-1} S_{2n+1}(k) + \pi \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^{m+n} k^{2m+1}}{2^{2m+3} \Gamma(m-n+\frac{3}{2}) \Gamma(m+n+\frac{5}{2})}.$$

---

14) The result is true for unrestrided values of n also, provided $R(n+\frac{1}{2})$ is greater than zero.

(Eingegangen am 30. März 1936.)

Über algebraische Flächen vierter Ordnung im projektiven R_4.

Von

Fr. Fabricius-Bjerre in Kopenhagen.

Einleitung.

Der Zweck der gegenwärtigen Abhandlung ist, die Flächen vierter Ordnung, die durch Schneiden zweier, in einem projektiven R_4 gelegenen, quadratischen Hyperflächen entstehen, zu untersuchen.

Falls man nicht zwischen reell und imaginär unterscheidet, entsteht nur eine ganz bestimmte Art von doppelpunktfreien Flächen. Diese Fläche ist von C. Segre [1]), Rao [2]), Baker [3]) und anderen untersucht worden. Dagegen gibt es keine Untersuchungen über die Realitätseigenschaften der Fläche.

In § 1 zeigen wir, daß es im reellen vierdimensionalen Raum sechs verschiedene Formen für die Fläche Γ gibt (Segres Bezeichnung). Die Einteilung geschieht durch Betrachtung der Hyperkegel, die Γ enthalten, und die zu dem durch die zwei quadratischen Hyperflächen bestimmten Flächenbüschel gehören. In § 2 bestimmen wir die verschiedenen Schnittkurven zwischen Γ und einem dreidimensionalen Raum R_3, und wir definieren elliptische, hyperbolische und parabolische Punkte. Es wird sich zeigen, daß die Anzahl und die Art der parabolischen Punkte zweiter Art charakteristisch ist für die Fläche. Wir schließen mit einer Betrachtung über die Projektion von Γ auf einen R_3 von einem Punkt von Γ aus. — In § 3 wird jeder der sechs Typen für sich untersucht, es wird die Zahl der reellen Geraden, der Kegelschnittsysteme und parabolischen Punkte auf Γ bestimmt und der Charakter der Projektionsflächen angegeben. Schließlich wird eine schematische Übersicht über die gefundenen Resultate gegeben.

§ 1.

Die Typeneinteilung der Fläche Γ.

$V^2_{(3)}$ und $W^2_{(3)}$ seien zwei quadratische Hyperflächen, gegeben durch die Gleichungen

$$a_{ik}\, x_i\, x_k = 0 \quad \text{und} \quad b_{ik}\, x_i\, x_k = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4, 5).$$

[1]) Math. Annalen 24 (1884), S. 313 ff.

[2]) Proc. London Math. Soc. (2) 17 (1918), S. 272.

[3]) Principles of Geometry IV, Cambridge 1925, S. 161.

Γ ist dann bestimmt durch zwei willkürliche Hyperflächen im Büschel

$$(1,1) \qquad (a_{ik} + \lambda b_{ik})\, x_i\, x_k = 0.$$

Unter den Flächen in (1, 1) gibt es *Hyperkegel*, deren Parameterwerte man aus der Gleichung 5. Grades in λ

$$(1,2) \qquad |a_{ik} + \lambda b_{ik}| = 0$$

bestimmt. Von den fünf Lösungen in (1, 2), von denen wir annehmen, daß sie alle *verschieden* sind, können entweder alle oder drei oder eine reell sein. Es ist vorausgesetzt, daß die Koeffizienten a_{ik} und b_{ik} alle reell sind. Die Spitzen der Hyperkegel nennt man die *Hauptpunkte* des Flächenbüschels oder von Γ, es gibt also fünf, drei oder einen reellen Hauptpunkt. — Nehmen wir an, daß Γ reell, so ist ein Hyperkegel durch Γ und mit reeller Spitze selbst reell, und er wird von einem R_3 in einer — in projektivem Sinne — *konvexen* oder *nichtkonvexen* Kegelschnittfläche, d. h. einer Fläche 2. Ordnung ohne oder mit reellen Geraden, geschnitten. Wir unterscheiden also zwischen *konvexen* und *nichtkonvexen* Hyperkegeln[4]). Dagegen wird der Fall, wo die Fläche 2. Ordnung in einen Kegel (Hyperkegel 2. Art) oder in zwei Ebenen degeneriert, ausgeschlossen. Ein konvexer Hyperkegel enthält in jedem Tangentialraum zwei konjugiert imaginäre erzeugende Ebenen, ein nichtkonvexer, zwei reelle erzeugende Ebenen.

Die Hauptpunkte von Γ sind dadurch charakterisiert, daß die Polarräume aller Hyperflächen im Büschel (1, 1) zusammenfallen. Jedem Hauptpunkt H entspricht also ein *Hauptraum* h, welcher die anderen vier Hauptpunkte enthält, so daß die fünf Hauptpunkte ein gemeinsames Polarhypertetraeder für die Hyperflächen im Büschel bilden. Eine harmonische Homologie mit H als Augenpunkt und h als Homologieraum führt Γ in sich selbst über. Γ ist also so viel reellen Homologien gegenüber invariant, wie es reelle Hauptpunkte gibt.

Wir untersuchen nun nacheinander die verschiedenen Möglichkeiten für die Zahl der reellen Hauptpunkte.

A. Fünf reelle Hauptpunkte.

Wir legen die fünf Ecken eines Koordinatensimplexes in die fünf Hauptpunkte, wodurch sämtliche Produktglieder in (1, 1) verschwinden. Einer der fünf Kegel bekommt dann die Gleichung

$$(1,3) \qquad p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 + p_4 x_4^2 + p_5 x_5^2 = 0,$$

wo alle Koeffizienten von 0 verschieden sein müssen. (1, 3) enthält entweder zwei positive und zwei negative Glieder (nichtkonvexer Hyperkegel)

[4]) Eine solche Unterscheidung gibt es für Kegel im R_3 nicht.

oder drei positive (negative) und ein negatives (positives) Glied (konvexer Hyperkegel). Durch eine passende Koordinatenänderung kann (1, 3) auf eine der Formen

$$x_2^2 + x_3^2 \pm x_4^2 - x_5^2 = 0 \tag{1,4}$$

gebracht werden. Die Gleichung für den Hyperkegel mit der Spitze (0, 1, 0, 0, 0) kann man dann folgendermaßen schreiben:

$$x_1^2 + \alpha x_3^2 \pm \beta x_4^2 - \gamma x_5^2 = 0, \tag{1,5}$$

wo die Wahl der Vorzeichen nur formelle Gründe hat. Durch Multiplizieren von (1, 4) mit bzw. $-\alpha$, $-\beta$ und $-\gamma$ und Addieren zu (1, 5) bekommt man die Gleichung für die anderen drei Hyperkegel im Büschel (1, 1), nämlich:

$$x_1^2 - \alpha x_2^2 \mp (\alpha - \beta) x_4^2 + (\alpha - \gamma) x_5^2 = 0. \tag{1,6}$$

$$x_1^2 - \beta x_2^2 + (\alpha - \beta) x_3^2 + (\beta - \gamma) x_5^2 = 0. \tag{1,7}$$

$$x_1^2 - \gamma x_2^2 + (\alpha - \gamma) x_3^2 \pm (\beta - \gamma) x_4^2 = 0. \tag{1,8}$$

Die Art der Kegel und damit die Art der Flächen ist abhängig von den Vorzeichen und der Größenordnung von α, β und γ. Falls das obere Vorzeichen gilt, können wir z. B. voraussetzen, daß $\alpha > \beta$, da α und β in (1, 5) gleichgestellt sind. Analog können wir für das untere Vorzeichen $\beta > \gamma$ setzen. In beiden Fällen müssen wir nun zwölf Möglichkeiten untersuchen. Im ersten Fall kann γ auf drei Weisen in bezug auf das Intervall $(\beta\,\alpha)$ gelegen sein und der Nullpunkt auf vier Weisen in bezug auf $(\alpha\ \beta\ \gamma)$. Analog im zweiten Fall. Betrachtet man diese 24 Möglichkeiten und zählt man jedes Mal die positiven und die negativen Glieder in den fünf Gleichungen (1, 4) ... (1, 8), dann sieht man, daß für ein reelles Γ nur drei Möglichkeiten entstehen können. Der eine der fünf Hyperkegel ist nämlich immer nichtkonvex; es können ein, drei oder fünf nichtkonvexe Hyperkegel im Büschel sein. Indem wir stets das *untere* Vorzeichen benutzen, bekommen wir

Γ erster Art: es gibt *vier konvexe* oder *einen nichtkonvexen* Hyperkegel. Γ bestimmt man aus den Gleichungen

$$x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 = 0 \tag{1,9}$$

$$x_1^2 + \alpha x_3^2 - \beta x_4^2 - \gamma x_5^2 = 0 \tag{1,10}$$

$$\alpha > \beta > 0 > \gamma.$$

Γ zweiter Art: es gibt *zwei konvexe* und *drei nichtkonvexe* Hyperkegel Γ bestimmt man aus den oben genannten Gleichungen unter der Bedingung, daß

$$\alpha > \beta > \gamma > 0.$$

Γ dritter Art: es gibt *fünf nichtkonvexe* Hyperkegel. Man kann Γ us den Gleichungen (1, 9) und (1, 10) bestimmen, wenn

$$\beta > \alpha > \gamma > 0.$$

Hiermit sind alle Möglichkeiten erschöpft, wenn man fünf reelle Haupt-unkte hat.

B. Drei reelle Hauptpunkte.

Die drei reellen Hauptpunkte werden in (1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0) und 0, 0, 1, 0, 0) gelegt. Die beiden letzten müssen konjugiert imaginäre Koordinaten haben, so daß ihre Verbindungslinie reell wird. Wählen wir die Hauptpunkte (0, 0, 0, i, 1) und (0, 0, 0, $-i$, 1), so bekommt jede Hyperfläche im Büschel (1, 1) eine Gleichung der Form

$$p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 + q_4 x_4^2 + q_5 x_5^2 + 2 r x_4 x_5 = 0.$$

Für die Form

$$q_4 x_4^2 + q_5 x_5^2 + 2 r x_4 x_5 = 0$$

ollen die Punkte (i, 1) und ($-i$, 1) konjugiert sein. Dieses ergibt die Bedingung

$$q_4 + q_5 = 0,$$

o daß wir also folgende Gleichung bekommen:

(1, 11) $$p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 + q (x_4^2 - x_5^2) + 2 r x_4 x_5 = 0.$$

Die Gleichung für den Hyperkegel mit der Spitze (1, 0, 0, 0, 0) ist also

$$p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 + q (x_4^2 - x_5^2) + 2 r x_4 x_5 = 0.$$

Durch eine „Drehung" des $x_4 x_5$-Systems können wir das Produktglied $2 r x_4 x_5$ zum Verschwinden bringen, ohne daß dieses für diese wie für die anderen Hyperflächen die Tatsache ändert, daß die Summe der Koeffizienten von x_4^2 und x_5^2 null ist. Daher können wir durch eine passende Koordinatentransformation erreichen, daß der Hyperkegel die Gleichung

(1, 12) $$\underline{x_2^2 \pm x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 = 0}$$

bekommt. Durch Multiplizieren von (1, 12) mit $-p_2$ und Addieren zu (1, 11) bekommt man nach Division durch p_1 die Gleichung für den Hyperkegel mit der Spitze (0, 1, 0, 0, 0):

(1, 13) $$\underline{x_1^2 \pm \alpha x_3^2 + \beta (x_4^2 - x_5^2) + 2 \gamma x_4 x_5 = 0.}$$

Schließlich bekommt man aus (1, 12) und (1, 13) die Gleichung für den letzten reellen Hyperkegel

(1, 14) $$\underline{x_1^2 - \alpha x_2^2 + (\beta - \alpha)(x_4^2 - x_5^2) + 2 \gamma x_4 x_5 = 0.}$$

Bilden wir mit Hilfe von (1, 13) und (1, 12) die Gleichung (1, 2), dann bekommen wir für λ die Werte: ∞, 0, $-\alpha$, $-\beta \pm i\gamma$. Also müssen wir $\alpha \neq 0$ und $\gamma \neq 0$ haben, während speziell $\beta = 0$ stattfinden kann

Wenn (1, 12) konvex ist (Vorzeichen $+$), dann ist entweder (1, 13) oder (1, 14) konvex; ist aber (1, 12) nichtkonvex, dann können die anderen beiden entweder beide konvex oder beide nichtkonvex sein. Es entstehen die beiden Möglichkeiten:

Γ vierter Art: es gibt *zwei konvexe* und *einen nichtkonvexen* Hyperkegel. Γ kann durch die Gleichungen

$$x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 = 0 \tag{1,15}$$

$$x_1^2 + \alpha x_3^2 + \beta(x_4^2 - x_5^2) + 2\gamma x_4 x_5 = 0 \tag{1,16}$$

$$\alpha > 0,\ \gamma \neq 0$$

dargestellt werden.

Γ fünfter Art: es gibt *drei nichtkonvexe* Hyperkegel. Γ wird durch die obenstehenden Gleichungen dargestellt, wenn

$$\alpha < 0, \quad \gamma \neq 0.$$

Wir gehen nun zu der letzten Möglichkeit über:

C. Ein reeller Hauptpunkt.

Den reellen Hauptpunkt legen wir in (1, 0, 0, 0, 0) und die konjugiert imaginären in $(0, i, 1, 0, 0)$, $(0, -i, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 0, i, 1)$ und $(0, 0, 0, -i, 1)$. Wenn man verlangt, daß jeder dieser fünf Punkte mit den vier anderen in bezug auf alle Hyperflächen im Büschel (1, 1) konjugiert sein soll, findet man folgende Gleichung für diese Hyperflächen:

$$p_1 x_1^2 + q_1(x_2^2 - x_3^2) + 2r_1 x_2 x_3 + p_2(x_4^2 - x_5^2) + 2r_2 x_4 x_5 = 0.$$

Setzt man $p_1 = 0$, so bekommt man die Gleichung für den reellen Hyperkegel durch Γ, die durch eine geeignete Koordinatentransformation folgendes Aussehen bekommt:

$$\underline{x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 = 0.} \tag{1,17}$$

(1, 17) ergibt zusammen mit einer Hyperfläche

$$\underline{x_1^2 + \alpha(x_2^2 - x_3^2) + 2\beta x_2 x_3 + \gamma(x_4^2 - x_5^2) + 2\delta x_4 x_5 = 0} \tag{1,18}$$

eine Fläche *Γ sechster Art.*

Berechnen wir wie oben die fünf Werte für λ, so bekommen wir: $\lambda = \infty$, $-\alpha \pm i\beta$, $-\gamma \pm i\delta$. Also muß $\beta \neq 0$, $\delta \neq 0$ und $\alpha \pm i\beta \neq \gamma \pm i\delta$ sein. Dagegen kann entweder $\alpha = 0$ oder $\gamma = 0$ sein.

Hiermit haben wir sechs Typen für die Fläche Γ gefunden; es wird sich zeigen, daß die Realitätseigenschaften dieser Flächen höchst verschieden sind.

§ 2.

Schnittkurven und Projektion von Γ.

Schneidet man das Hyperflächenbüschel (1, 1) mit einem willkürlichen R_3, dann entsteht ein Büschel von Flächen zweiter Ordnung, dessen Grundkurve, C^4, die Schnittkurve des R_3 mit Γ ist. C^4 ist eine algebraische Kurve vierter Ordnung. — Sofern R_3 keine Tangentialebene von Γ enthält, ist C^4 frei von Doppelpunkten; die Gestalt des C^4 hängt von den Kegeln im Büschel von Flächen zweiter Ordnung[5]) ab. So schneidet jeder Koordinatenraum Γ *dritter* Art in einer C^4, die aus zwei voneinander getrennten Zweigen gerader Ordnung besteht; die Gleichungen (1, 5), (1, 6), (1, 7) und (1, 8) enthalten nämlich alle zwei positive und zwei negative Glieder, so daß $x_1 = 0$ diese Hyperkegel in vier reellen Kegeln schneidet. Dabei schneidet $X_1 = 0$ Γ *sechster* Art in einer C^4, die aus zwei Zweigen ungerader Ordnung besteht; denn das Büschel von Flächen zweiter Ordnung in diesem Raum enthält vier imaginäre Kegel. Es kann weiter eintreffen, daß ein R_3 Γ überhaupt nicht schneidet. Es sei nur einer der Hyperkegel, die Γ enthalten, *konvex*, dann wird man einen R_3 durch die Spitze und im übrigen ganz außerhalb des Hyperkegels legen können. R_3 schneidet dann nicht Γ, da Γ nicht durch die Spitze des Hyperkegels geht. Γ erster, zweiter und vierter Art liegen auf mindestens einem konvexen Kegel. Daraus folgt: *die Flächen Γ erster, zweiter und vierter Art können ganz ins Endliche projiziert werden; sie enthalten keine Geraden.*

Falls R_3 eine Tangentialebene π zu Γ enthält, also selbst *Tangentialraum* ist, bekommt die Schnittkurve einen singulären Punkt im Berührungspunkt P. — Jede Ebene schneidet das Hyperflächenbüschel (1, 1) in einem Kegelschnittbüschel; wenn aber die Ebene π Tangentialebene ist, dann entartet das Kegelschnittbüschel in Geraden durch P, die eine *Involution* bilden. Jeder Tangentialraum durch π schneidet (1, 1) in einem Büschel von Flächen zweiter Ordnung, die alle π in P berühren, und deren Erzeugende durch P die genannte Involution bilden. Das Aussehen der Schnittkurve hängt teils von der Involution, teils von der Lage des Tangentialraumes ab.

1. π enthält eine elliptische Involution.

Der Punkt P heißt dann selbst *elliptisch*[6]). Jeder Raum durch π schneidet Γ in einer reellen Kurve mit P als Doppelpunkt; die Tangenten in P sind ein Strahlenpaar der Involution. Die Kurve hat nur einen Zweig, die Pseudozweige, die von P ausgehen, sind beide von dritter

[5]) Siehe Reye: Geometrie der Lage, Leipzig 1923, III, S. 54.

[6]) Vgl. Kommerell: Die Krümmung der zweidim. Geb., Diss. Tübingen 1897.

Ordnung. — Durch π und einen willkürlichen Punkt Q von Γ geht ein Tangentialraum, der Γ in einer Kurve von der genannten Art schneidet. Daraus folgt, daß *eine Fläche Γ, die elliptische Punkte enthält, nur aus einem Blatt bestehen kann.* Im entgegengesetzten Fall wäre es möglich, Q so zu wählen, daß die genannte Schnittkurve zwei getrennte Zweige bekäme.

2. π enthält eine hyperbolische Involution.

P heißt dann selbst *hyperbolisch.* Da P nicht isolierter Punkt von Γ ist, gibt es stets Tangentialräume durch π, die Γ in einer C^4 mit P als gewöhnlichem Doppelpunkt schneiden, und da konjugiert imaginäre Strahlen auftreten, kann P auch ein isolierter Doppelpunkt sein. Als Übergangsform entsteht eine C^4 mit einer Spitze in P. Die Doppelstrahlen der Involution sind die Spitzentangenten.

Man bemerkt, daß die Tangentialebene in einem *gewöhnlichen* Punkt von Γ, d. h. in einem elliptischen oder hyperbolischen Punkt, weiter keine Punkte mit Γ gemeinsam hat. Die Tangentialebene schneidet Γ in vier zusammenfallenden Punkten[7]).

Falls der Tangentialraum τ durch π noch eine Tangentialebene ϱ enthält, d. h. wenn τ ein *Doppeltangentialraum* ist, zerfällt die Schnittkurve in zwei reelle oder imaginäre Kegelschnitte durch die reellen Berührungspunkte P und R. Dann enthält das in τ liegende Büschel von Flächen zweiter Ordnung eine Fläche, die in zwei — reelle oder imaginäre — Ebenen mit reeller Schnittgerade entartet ist. Indessen enthält eine quadratische Hyperfläche im R_4 nur dann Ebenen, wenn sie ein Hyperkegel ist, und diese Ebenen sind, wie früher besprochen, reell oder imaginär, je nachdem der Kegel nichtkonvex oder konvex ist. Die Gerade PR muß also ein Erzeuger des Hyperkegels sein. Umgekehrt schneiden eine Erzeugerebenen der zu (1, 1) gehörenden Hyperkegel Γ in einem Kegelschnitt. — Da jeder der sechs Flächentypen Γ auf mindestens einem nichtkonvexem Hyperkegel liegt, sieht man, daß *durch jeden gewöhnlichen Punkt von Γ mindestens zwei, in einem Doppeltangentialraum liegende reelle Kegelschnitte gehen.*

Jedes reelle Γ wird also von zwei Kegelschnittsystemen überdeckt. Zwei Kegelschnitte aus dem gleichen System schneiden sich nicht; gehöhren sie zu verschiedenen Systemen, so haben sie zwei Punkte gemeinsam. Weiter folgt aus unseren Betrachtungen:

Durch einen gewöhnlichen Punkt von Γ gehen genau so viele Doppeltangentialräume, wie es reelle Hauptpunkte gibt.

---

[7]) Siehe Matematisk Tidsskrift B, (1936) S. 31.

3. π enthält eine parabolische Involution.

Wir nehmen an, daß ein einzelner Strahl durch P für alle Strahlenpaare gemeinsam ist. P wird *parabolisch erster Art* genannt. Der genannte Strahl p muß allen Hyperflächen im Büschel (1, 1) und daher auch Γ angehören.

Die parabolische Kurve von Γ besteht aus Geraden.

Jeder Raum durch p schneidet das Hyperflächenbüschel in einem Büschel von Flächen 2. Ordnung, die eine Gerade gemeinsam haben. Im allgemeinen ist dann die übrigbleibende Schnittkurve eine algebraische Raumkurve 3. Ordnung, für welche p Bisekante ist; jedoch können die Schnittpunkte imaginär sein. Daher enthält ein R_3 durch p im allgemeinen 0 oder 2 reelle Tangentenebenen, d. h.:

Ein Tangentialraum τ durch eine Gerade p ist im allgemeinen Doppeltangentialraum von Γ.

Der Tangentialraum τ kann nur zwei Tangentialebenen von Γ durch p enthalten, in entgegengetsetztem Fall waren nämlich alle Ebenen in τ durch p Tangentialebenen zu Γ, und das Büschel von Flächen zweiter Ordnung in τ müßte eine Fläche enthalten, die in zwei Ebenen durch p entartet ist. p selbst wäre Erzeugende eines durch Γ gehenden Hyperkegels. Dies aber ist ausgeschlossen, da Γ (und p) durch keine Spitze der Hyperkegel in (1, 1) geht.

Es ist nun einleuchtend, daß die Tangentialebenen von Γ durch p einen Hyperkegel zweiter Art (siehe S. 687) erfüllen; denn jeder R_3 durch p schneidet ja diese Hyperfläche in zwei Ebenen und — nach den obigen Bemerkungen — kann der Hyperkegel nicht entarten. Wir haben also bewiesen[8]):

Die Tangentialebenen längs einer Geraden in Γ beschreiben einen Hyperkegel 2. Art.

4. π enthält eine identische Involution.

Hierunter wollen wir eine Involution verstehen, wo alle Geradenpaare mit einem gegebenen reellen oder imaginären zusammenfallen. Der Punkt P, durch den also zwei reelle oder imaginäre (punktierte)[9]) Geraden in Γ gehen, heißt *parabolisch zweiter Art*. Γ enthält nur eine endliche Anzahl Punkte, die parabolisch zweiter Art sind. Die Tangentialebene π von Γ in einem solchen Punkt P enthält einen entarteten Kegelschnitt und muß also Erzeugerebene eines der *nichtkonvexen* Hyperkegel in (1, 1) sein. Eine harmonische Homologie mit der Spitze des Hyperkegels als Augenpunkt, dem

[8]) Segres Beweis, l. c. S. 340 ist nicht hinreichend.

[9]) Punktierte Geraden bedeutet Geraden mit *einem* reellen Punkt.

Polarraum h als Homologieraum, führt, wie früher erwähnt, P in sich selbst über, wobei die beiden Geraden in π vertauscht werden. Dann liegt ihr Schnittpunkt P in h. Also:

Die parabolischen Punkte zweiter Art liegen in den Polarräumen der Spitzen der nichtkonvexen Hyperkegel.

Man bestimmt nun die Lage dieser Punkte folgendermaßen: Man schneidet das Hyperflächenbüschel (1, 1) mit h, wodurch der nichtkonvexe Hyperkegel mit der Spitze H in einer geradlinigen Fläche zweiter Ordnung $U^2_{(2)}$, die die Schnittkurve C^4 von h mit Γ enthält, geschnitten wird. Auf C^4 liegen die parabolischen Punkte P; h schneidet π in einem Erzeuger auf $U^2_{(2)}$, der C^4 in P tangiert. — Umgekehrt besitzt jeder Erzeuger f auf $U^2_{(2)}$, der C^4 berührt, im Berührungspunkt einen Punkt P, der auf Γ parabolisch zweiter Art ist. Die Ebene fH ist nämlich für Γ Tangentialebene, d. h. da f Γ tangiert und H der Pol von h ist, gemeinsame Tangentialebene für alle Hyperflächen im Büschel (1, 1). fH muß also eine der Hyperflächen in zwei Geraden durch P schneiden, so daß P parabolisch zweiter Art wird[10]). — Hiermit sind wir zu der für *reelle* Elemente gültigen Segreschen Konstruktion[11]) der Geraden (und anderer parabolischer Punkte) der Fläche gelangt:

„Ein nichtkonvexer Hyperkegel durch Γ wird von dem Polarraum h der Spitze H in der Fläche $U^2_{(2)}$, die die Schnittkurve C^4 von h mit Γ enthält, geschnitten. Die Berührungspunkte der Erzeuger f auf $U^2_{(2)}$, die C^4 berühren, sind parabolisch zweiter Art. Die eventuellen Geraden der Fläche liegen in den Erzeugerebenen fH des Hyperkegels“.

Danach erfordert also die Bestimmung der Geraden der Fläche eine doppelte Realitätsuntersuchung.

Sämtliche Tangentialräume von Γ durch einen parabolischen Punkt weiter Art schneiden Γ stets in noch einem Kegelschnitt, der immer reell ist. Falls die Geraden durch P reell sind, hat der Tangentialraum dreifache Berührung mit Γ, da beide Geraden den Kegelschnitt schneiden. — Falls dieser Kegelschnitt in zwei reelle Geraden entartet, enthält der Tangentialraum τ vier parabolische Punkte zweiter Art, die vier Tangentialebenen, und er schneidet Γ in vier Geraden. Die beiden letzten Kanten in dem entstandenen Tetraeder sind Erzeuger auf zwei nichtkonvexen Hyperkegeln, sie gehen also durch die Spitzen H_1 und H_2. *τ ist dann gemeinsamer Tangentialraum für zwei nichtkonvexe Hyperkegel.*

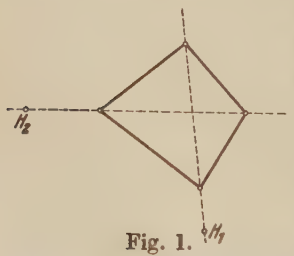

Fig. 1.

[10]) Vgl. Rao, l. c., S. 275–276.

[11]) Segre, l. c., S. 330.

Schnittkurven, die aus vier Geraden bestehen, können nur auf den Flächen Γ dritter und fünfter Art entstehen.

Wir betrachten nun die *Projektion* von Γ auf einen R_3 von einem Punkte von Γ aus. Auf alle Fälle entsteht eine algebraische Fläche dritter Ordnung F^3, jedoch hängt ihre Art von Γ und von der Lage des Projektionszentrums P auf Γ ab.

1. P ist elliptisch oder hyperbolisch.

Wenn P ein gewöhnlicher Punkt ist, dann entspricht P selbst die Schnittlinie p' zwischen R^3 und der Tangentialebene π. Die Tangentialräume durch π schneiden Γ in Kurven mit P als Doppelpunkt, die in Kegelschnitte projiziert werden, die in Ebenen durch p' liegen. Die Doppelpunktstangenten schneiden auf p' eine Involution aus, die ebenfalls durch Schneiden der Kegelschnitte mit p' entsteht. p' ist der Träger einer elliptischen oder hyperbolischen Involution, je nachdem P elliptisch oder hyperbolisch ist. — Jeder von P verschiedene Punkt R wird in einen Punkt R' projiziert, und da eine Gerade höchstens zwei Punkte mit Γ gemeinsam hat, hat F^3 *keine Doppelpunkte.*

Ist der Punkt R elliptisch, dann ist die Projektion R' ein hyperbolischer Punkt auf F^3. Denn jeder Tangentialraum durch die Tangentialebene ϱ in R schneidet Γ in einer C^4 mit reellen Doppelpunktstangenten in R. Ist dagegen R hyperbolisch, dann kann R' auch elliptisch oder parabolisch auf F^3 sein. Das letztere trifft ein, wenn der Raum ϱP Γ in einer C^4 mit einer Spitze in R schneidet. Hierdurch bekommt man Aufschluß über die Lage der parabolischen Kurve auf F^3.

Eine *Gerade* auf Γ wird in eine Gerade auf F^3 projiziert. Außerdem werden die durch P gehenden Kegelschnitte in Geraden auf F^3 projiziert. — Umgekehrt entspricht eine Gerade auf F^3 einer Geraden oder einem Kegelschnitt durch P auf Γ.

Ein parabolischer Punkt zweiter Art wird in einen Punkt auf F^3 projiziert, durch den zwei reelle oder imaginäre Geraden gehen.

Ein *Doppeltangentialraum* durch P wird in eine Ebene durch p' projiziert, die drei Geraden mit F^3 gemeinsam hat, wovon eventuell zwei konjugiert imaginär sein können. Eine solche Ebene nennen wir eine Δ-Ebene. — Jeder R_3 durch einen Kegelschnitt α, der P enthält, wird in eine Doppeltangentialebene durch die Projektion α' projiziert. Enthält R_3 außerdem die Tangentialebene in einem parabolischen Punkt zweiter Art, dann wird R_3 in eine Δ-Ebene projiziert. Die Δ-Ebene kann nur auf die beiden hier beschriebenen Weisen entstehen.

Nunmehr ist es leicht, die charakteristische Zahl der Geraden und der Δ-Ebenen für die Projektionsfläche F^3 zu bestimmen.

2. P ist parabolisch erster Art.

P liegt auf einer Geraden p auf der Fläche Γ. Alle Punkte von p werden in denselben Punkt P' projiziert. Die Tangentialebenen durch p bilden — wie S. 693 gezeigt — einen Hyperkegel zweiter Art. Hieraus folgt:

Γ wird in eine F^3 mit konischem Doppelpunkt projiziert.

Der Tangentialebene π durch P entspricht eine Gerade durch P', die in F^3 liegt. Auf Γ gibt es stets eine Gerade, die p schneidet. Deren Projektion ist eine Gerade durch P'.

F^3 enthält mindestens zwei reelle Geraden durch den Doppelpunkt. Folglich kann eine F^3 mit konischem Doppelpunkt und *ohne* binäre Geraden *nicht* als Projektion einer doppelpunktfreien Γ entstehen.

3. P ist parabolisch zweiter Art.

Es ist einleuchtend, daß Γ in eine F^3 mit zwei reellen oder imaginären konischen Doppelpunkten projiziert wird. Die Schnittlinie der Tangentialebenen mit R^3 wird die quaternäre Gerade der F^3; sie wird auf F^3 von der Projektion des anderen Kegelschnittes durch P geschnitten.

Hiermit sind wir mit den allgemeinen Betrachtungen über Γ fertig, wir werden nunmehr im nächsten Paragraphen die sechs Typen einzeln behandeln.

§ 3.

Die sechs Typen.

Γ erster Art.

Eine Fläche Γ erster Art ist durch die Gleichungen (S. 688)

$$(3,1) \qquad x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 = 0,$$

$$(3,2) \qquad x_1^2 + \alpha x_3^2 - \beta x_4^2 - \gamma x_5^2 = 0 \qquad \alpha > \beta > 0 > \gamma$$

definiert. Das Hyperflächenbüschel (1, 1) enthält außer dem nichtkonvexen Hyperkegel (3, 1) den konvexen (3, 2) und noch drei weitere konvexe. Wie S. 691 erwähnt, kann Γ ganz im Endlichen liegen, Γ enthält dann keine reellen Geraden (parabolische Punkte erster Art). Γ kann keine elliptischen Punkte enthalten, da ein Tangentialraum in einem solchen Punkt Γ in einer Kurve schneidet, die nicht ganz im Endlichen liegen kann (die Kurve hat Maximalindex). Die Kurve enthält also *hyperbolische Punkte* und — eventuell — parabolische Punkte zweiter Art. Durch jeden hyperbolischen Punkt gehen *zwei Kegelschnitte* (Ellipsen).

Aus dem Satze S. 694 folgt, daß die parabolischen Punkte zweiter Art nur in dem Raume $x_1 = 0$ liegen können. Schneiden wir diesen Raum

mit dem Hyperflächenbüschel (1, 1), dann bekommen wir ein Büschel von Flächen zweiter Ordnung, die die geradlinige Fläche (3, 1) und den Kegel

$$(3,3) \qquad \alpha x_3^2 - \beta x_4^2 - \gamma x_5^2 = 0$$

enthalten, und außerdem die drei Kegel, die entstehen, wenn man in (1, 6), (1, 7) und (1, 8) $x_1 = 0$ einsetzt und das untere Vorzeichen anwendet. Die Gleichungen lauten dann:

$$(3,4) \qquad -\alpha x_2^2 + (\alpha - \beta) x_4^2 + (\alpha - \gamma) x_5^2 = 0,$$

$$(3,5) \qquad -\beta x_2^2 + (\alpha - \beta) x_3^2 + (\beta - \gamma) x_5^2 = 0,$$

$$(3,6) \qquad -\gamma x_2^2 + (\alpha - \gamma) x_3^2 - (\beta - \gamma) x_4^2 = 0.$$

Die vier Kegel sind reell, d. h. die Schnittkurve zwischen $x_1 = 0$ und Γ ist eine C^4, die aus zwei Zweigen gerader Ordnung besteht. Es ist bekannt, daß, wenn es in (3, 1) nur *einen* Erzeuger gibt, der C^4 *berührt*, es in *jedem* System *vier* solche gibt[12]); und daß solche Erzeuger existieren, ist sicher, sofern es auf (3, 1) Erzeuger gibt, die z. B. den Kegel (3, 3) *überhaupt nicht schneiden*. Betrachten wir den Erzeuger

$$x_2 = x_5, \quad x_3 = x_4,$$

dann sind die Schnittpunkte mit (3, 3) durch die Gleichung

$$(3,7) \qquad (\alpha - \beta) x_3^2 - \gamma x_5^2 = 0$$

bestimmt, die, da $\alpha - \beta > 0$ und $\gamma < 0$, keine reellen Lösungen hat. Daraus folgt, daß *Γ acht parabolische Punkte zweiter Art enthält.* In jeder der acht Tangentialebenen von Γ in den gefundenen Punkten liegen zwei punktierte Geraden.

Schneidet man Γ, gegeben durch (3, 2) und den zu (3, 4) gehörenden Hyperkegel

$$(3,8) \qquad x_1^2 - \alpha x_2^2 + (\alpha - \beta) x_4^2 + (\alpha - \gamma) x_5^2 = 0,$$

mit dem Raumbüschel $x_4 = \lambda x_2$, so sieht man, daß es für $\lambda = 0$ keine Schnittkurve gibt, da in (3, 2) $\alpha > 0$ und $\gamma < 0$ ist, und wenn $|\lambda| \geqq \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha - \beta}}$ die Schnittkurve mit (3, 8) imaginär wird. Mit anderen Worten, Γ liegt ganz in zwei getrennten Winkelräumen, die von Räumen des Büschels $x_4 = \lambda x_2$ begrenzt sind. Also:

Γ besteht aus zwei Mänteln.

Projiziert man Γ von einem *hyperbolischen* Punkt P aus, dann entsteht eine F^3 mit drei Geraden, nämlich p' und die Projektionen der Kegelschnitte durch P. — Da durch P fünf Doppeltangentialräume von Γ gehen, gehen durch p' fünf Δ-Ebenen. Da durch jeden Kegelschnitt

[12]) Reye, l. c., S. 53.

vier Räume gehen, die die Tangentialebenen von Γ in parabolischen Punkten zweiter Art enthalten, gibt es noch weitere acht Δ-Ebenen für die Projektionsfläche.

Γ wird in eine F^3 mit drei reellen Geraden und dreizehn Δ-Ebenen projiziert.

Die übrigen 24 Geraden auf F^3 sind punktiert. In jeder der zwölf Δ-Ebenen, die nicht das reelle Dreieck enthalten, liegen zwei.

Projiziert man Γ von einem der acht parabolischen Punkte aus, dann entsteht eine F^3 mit zwei imaginären Doppelpunkten (S. 696). Diese Fläche können wir als eine der oben besprochenen auffassen, wo zwei der drei reellen Geraden zusammenfallen.

Γ zweiter Art.

Γ liegt, wie S. 688 erwähnt, auf drei nichtkonvexen und zwei konvexen Hyperkegeln; Γ kann ganz im Endlichen liegen, enthält keine Geraden und keine elliptischen Punkte. Durch jeden Punkt P von Γ gehen *sechs Kegelschnitte*, die sich auf drei Doppelsysteme, den drei nichtkonvexen Hyperkegeln entsprechend, verteilen. Zwei Kegelschnitte, die verschiedenen Doppelsystemen angehören, haben nur einen Punkt gemeinsam. Wir beweisen:

Γ enthält keine parabolischen Punkte zweiter Art.

Es sei P ein solcher Punkt, er liege auf dem Erzeuger f der Fläche (3, 1). Bezeichnet man deren Spitze mit H, dann muß die Ebene fH gemeinsame Tangentialebene für alle Hyperflächen im Büschel (1, 1) sein, also auch im Tangentialraum zu einem der anderen nichtkonvexen Hyperkegel liegen. Da dieser Hyperkegel in seinen Tangentialräumen zwei reelle Ebenen enthält, muß die Ebene fH diese in zwei reellen Geraden schneiden, die zu Γ gehören. Γ enthält aber keine reellen Geraden, das bedeutet also, daß Γ keinen parabolischen Punkt zweiter Art enthält.

Γ enthält also *nur* hyperbolische Punkte.

Projiziert man Γ von einem Punkte P aus, dann entsteht eine F^3 mit sieben reellen Geraden, nämlich p' und drei Paare, die in Δ-Ebenen durch p' liegen. Die beiden Δ-Ebenen, die den konvexen Hyperkegeln entsprechen, enthalten punktierte Linien. Da es in Γ keine parabolischen Punkte zweiter Art gibt, können weiter keine Δ-Ebenen entstehen. Also:

Γ wird in eine F^3 mit sieben reellen Geraden und fünf Δ-Ebenen projiziert.

Von den übrigen 20 Linien auf F^3 sind 4 punktiert, und 16 imaginär.

Man kann mit einer Betrachtung analog der unter Γ erster Art nachweisen, daß Γ nur aus einem Mantel besteht. Es geht jedoch schon unmittelbar aus dem obigen Satz hervor.

Γ dritter Art.

Alle Hyperkegel durch Γ sind nichtkonvex. Daraus:

Γ enthält fünf Doppelsysteme von Kegelschnitten.

Die Kegelschnitte haben null, zwei oder einen Schnittpunkt, je nachdem sie dem gleichen System, dem gleichen Doppelsystem oder verschiedenen Doppelsystemen angehören.

Die parabolischen Punkte zweiter Art im Raum $x_1 = 0$ findet man auf dieselbe Weise wie bei Γ erster Art. Dieselben Gleichungen mit der Bedingung

$$\beta > \alpha > \gamma > 0$$

werden angewandt. Auch in diesem Falle hat (3, 7) keine reellen Lösungen, da $\alpha - \beta < 0$ und $\gamma > 0$. Folglich enthält der Raum $x_1 = 0$ acht parabolische Punkte zweiter Art. Da nun dieser Raum im Verhältnis zu den anderen Haupträumen keine Ausnahme bildet — alle Hyperkegel sind ja nichtkonvex — folgt daraus, daß

Γ 40 parabolische Punkte zweiter Art hat.

Da Γ keine Doppelpunkte enthält, und zwei Hyperkegel keine gemeinsame Erzeugerebene haben, können keine Punkte zusammenfallen. — Auf S. 698 haben wir gezeigt, daß die Existenz parabolischer Punkte zweiter Art auf einer Fläche Γ, die auf zwei oder mehreren nichtkonvexen Hyperkegeln liegt, die Existenz zweier Geraden durch jeden parabolischen Punkt erfordert. Diese Geraden können nicht zusammenfallen; denn sonst würden sie in einen Erzeuger auf einem Hyperkegel fallen, und Γ müßte dessen Spitze enthalten. Durch jeden der acht parabolischen Punkte in $x_1 = 0$ gehen also zwei reelle Geraden, d. h.

Γ enthält 16 reelle Geraden.

Da die 40 parabolischen Punkte auf den 16 Geraden liegen, und da durch jeden parabolischen Punkt zwei Geraden gehen, müssen auf jeder Gerade fünf Punkte liegen, oder *jede Gerade wird von fünf anderen geschnitten.*

Wir wollen diese Geradenkonfiguration $(16_5, 40_2)$ etwas näher untersuchen.

Man kann, so wie Rao[13]) und Baker[14]) es getan haben, die 16 Geraden in ein System von 16 Geraden auf einer F^3 übertragen. Es ist nämlich klar, daß

Γ von einem nichtparabolischen Punkt in eine F^3 mit 27 reellen Geraden projiziert wird.

Hiervon stammen zehn von den Kegelschnitten durch das Projekionszentrum P, die eine (p') von P selbst, und die übrigen von Γ's 16 Geraden.

---

[13]) l. c., S. 276.

[14]) l. c., S. 170.

Entfernen wir daher in der Schäflischen Aufstellung a_i, b_i, c_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, 6)$ eine willkürliche Gerade, z. B. c_{56} und außerdem die zehn Geraden, die diese schneiden, dann erhalten wir das System

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & . & . \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & . & . \\ . & . & . & c_{45} & . & \\ . & . & c_{35} & c_{46} & & \\ . & c_{25} & c_{36} & & & \\ c_{15} & c_{26} & & & & \\ c_{16} & & & & & \end{array}$$

der 16 Geraden auf Γ. Die Verhältnisse des Schneidens sind wie auf der F^3, da man nachweisen kann, daß bei der Projektion keine neuen Schnittpunkte entstehen. Jede Gerade wird von fünf anderen geschnitten, z. B. a_3 von b_1, b_2, b_4, c_{35} und c_{36}.

Indessen kommt uns eine andere Bezeichnung der Geraden natürlicher vor. Wir haben schon besprochen, daß eine harmonische Homologie mit z. B. dem Punkte $(1, 0, 0, 0, 0)$ als Augenpunkt und $x_1 = 0$ als Homologieraum Γ in sich selbst überführt. Projizieren wir $x_5 = 0$ ins Unendliche, so bekommt Γ vier Symmetrieräume $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ und außerdem das Symmetriezentrum $(0, 0, 0, 0)$, welches dem unendlich fernen Symmetrieraum entspricht. Mit Hilfe einer einzigen der Geraden von Γ kann man also alle anderen finden, nämlich durch wiederholte Spiegelungen an den vier Symmetrieräumen. Ein willkürlicher Punkt der Geraden durchläuft bei diesen Spiegelungen nacheinander die 16 Ecken eines Parallelotops, welches $(0, 0, 0, 0)$ als Zentrum hat. Es sei die Gleichung der Gerade:

$$x_i = a_i + \lambda b_i, \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

dann wird die Gerade durch gleichzeitiges Wechseln beider Vorzeichen von z. B. a_3 und b_3 in eine andere übergeführt. Für die Vorzeichen gibt es nun 2^4 Möglichkeiten, die also den 16 Geraden entsprechen. Bezeichnen wir die gegebene Gerade durch (1 1 1 1) und bedeutet eine Spiegelung in $x_i = 0$, daß die i-te 1 durch eine 2 erstattet wird (oder umgekehrt), dann bezeichnen die 16 *Symbole* (*i j k l*), *wo alle Buchstaben die Ziffern* 1 *oder* 2 *bedeuten, die* 16 *Geraden der Fläche.*.

Die Gerade (1 1 1 1) schneidet die Gerade (2 1 1 1), (1 2 1 1), (1 1 2 1) und (1 1 1 2); und außerdem schneidet sie (2 2 2 2) im Unendlichen:

Eine Gerade wird von einer anderen geschnitten, wenn entweder ein Index oder alle Indizes verschieden sind.

Da jede Gerade fünf andere schneidet, schneidet sie die zehn anderen nicht. Es gibt also $\frac{16 \cdot 10}{2} = 80$ *Duplen* (zwei windschiefe Geraden).

Der R_3, der ein gegebenes Duppel, z. B. (1 1 1 1) und (1 1 2 2) enthält, enthält ebenfalls die Linien (1 1 1 2) und (1 1 2 1), die mit den gegebenen ein windschiefes Viereck bilden. Es gibt 40 solcher Vierecke. S. 694 haben wir diese Figuren behandelt und konstatiert, daß die Räume R_3 Doppeltangentialräume von zwei nichtkonvexen Hyperkegeln waren. Hierdurch finden wir abermals die Zahl 40; zwei Hyperkegel haben nämlich vier gemeinsame Tangentialräume, und es ist $4 \cdot \binom{5}{2} = 40$. Ein R_3 durch ein Duppel schneidet also Γ in vier Geraden, d. h. es enthält nur parabolische Punkte, woraus die Behauptung von S. 700, betreffs der Entstehung neuer Schnittpunkte bei der Projektion folgt.

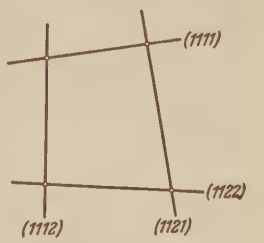

Fig. 2.

Einen Überblick über die Lage der 16 Geraden bekommt man, wenn man acht davon betrachtet. Spiegelt man (1 1 1 1) an den Räumen $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ und $x_4 = 0$, dann bleibt der erste Index unverändert, und die acht Geraden liegen symmetrisch um $x_1 = 0$ mit den übrigen acht. Die Lage der acht Geraden, ihre Schnittpunkte und ihre Bezeichnung sind auf der Fig. 3 angegeben. Diese Geraden verteilen sich in 2×4, wo jede der 4 Geraden 3 des anderen Systems schneidet. Man nennt die acht Geraden einen „*Doppelvierer*". Für drei ausgewählte Symmetrieräume gibt es zwei Doppelvierer. Im ganzen gibt es also $2 \cdot \binom{5}{3} = 20$ Doppelvierer. Benutzen wir die früheren Bezeichnungen, so bilden z. B. $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$, $b_1\ b_2\ b_3\ b_4$ sowie die c einen Doppelvierer.

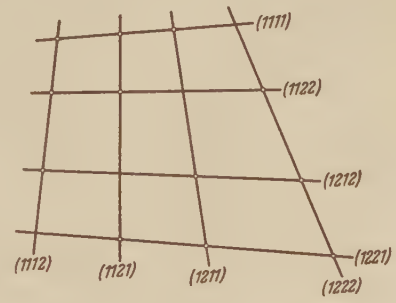

Fig. 3.

Die Geraden der Fläche können auch auf eine andere Art und Weise bestimmt werden, da wir sie nämlich als die parabolische Kurve (16. Ordnung) der Fläche auffassen können. Man schneidet das Hyperflächenbüschel (1, 1) mit der Tangentialebene in einem willkürlichen Punkt von Γ und sucht die Bedingung dafür, daß die entstandene Involution parabolisch wird. Die Rechnungen sollen hier nicht durchgeführt werden; sie bestätigen die gefundenen Resultate. Weiter geht aus ihnen hervor, daß die Involution sowohl elliptisch als auch hyperbolisch sein kann. Demnach muß Γ also sowohl *elliptische* als auch *hyperbolische Punkte* enthalten und nur aus einem Mantel bestehen.

Wir haben gesehen, daß eine einzige der Geraden von Γ zusammen mit den fünf Hauptpunkten genügt, um alle 16 Geraden von Γ zu bestimmen. Sie verteilen sich, wie schon erwähnt, auf acht Erzeugerebenen, vier von jedem System, für jeden der nichtkonvexen Hyperkegel. Hiermit sind die fünf Hyperkegel und damit auch Γ vollständig bestimmt, d. h. durch die 16 Geraden geht nur eine einzige Γ. Die fünf Hauptpunkte und die Gerade sind gegeben durch $5 \cdot 4 + 6 = 26$ Konstanten,

Γ ist durch 26 Konstanten bestimmt.

Es sei erwähnt, daß Γ von einem nichtparabolischen Punkt in eine F^3 mit 27 Geraden projiziert wird. Von den zu F^3 gehörenden 45 Δ-Ebenen gehen, wie früher, fünf durch p'. Durch jeden der Kegelschnitte durch P gehen, wie unter Γ erster Art erwähnt, vier Räume, die dreifache Berührung mit Γ haben, da sie die Tangentialebene in einem parabolischen Punkt zweiter Art enthalten. Es gibt $10 \cdot 4 = 40$ solche Räume, die in die übrigen 40 Δ-Ebenen projiziert werden.

Von einem *parabolischen Punkt erster Art* wird Γ in eine F^3 mit konischem Doppelpunkt projiziert. Die fünf Geraden, die die Gerade durch das Projektionszentrum P schneiden, werden in *binäre* Geraden auf F^3 projiziert, von denen also im ganzen sechs entstehen. Hiermit ist die Fläche charakterisiert. Die fünfzehn unären Geraden auf Γ sind teils Projektionen der übrigen zehn Geraden $\Gamma's$ und teils Projektionen von fünf Kegelschnitten durch P.

Projizieren wir schließlich Γ von einem *parabolischen Punkt zweiter Art* aus, dann entsteht eine F^3 mit zwei reellen konischen Doppelpunkten. Es ist nicht schwierig nachzuweisen, daß F^3 eine quaternäre, acht binäre und sieben unäre Geraden enthält.

Hiermit schließen wir die Behandlung der Flächen Γ, die fünf reelle Hauptpunkte besitzen. Wir gehen nunmehr zu dem ersten der beiden Typen über, wo die Anzahl der reellen Hauptpunkte drei ist.

Γ vierter Art.

Von den drei Hyperkegeln, auf denen Γ liegt, sind zwei konvex und der eine nichtkonvex (S. 690). Γ wird durch die Gleichungen

$$x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 = 0 \tag{3, 9}$$

$$x_1^2 + \alpha x_3^2 + \beta (x_4^2 - x_5^2) + 2\gamma x_4 x_5 = 0 \qquad \alpha > 0,\ \gamma \neq 0 \tag{3, 10}$$

dargestellt. Γ kann ganz ins Endliche projiziert werden, Γ hat weder reelle Geraden noch elliptische Punkte. Durch jeden hyperbolischen Punkt gehen *zwei reelle Kegelschnitte* (Ellipsen).

Die parabolischen Punkte zweiter Art müssen im Raume $x_1 = 0$ liegen. Dieser Hauptraum schneidet Γ in einer C^4 (dritter Art), die aus einem reellen Zweig von gerader Ordnung besteht. Denn das Büschel von Flächen zweiter Ordnung muß zwei reelle und zwei imaginäre Hauptpunkte enthalten. Sobald es nur einen Erzeuger auf der Fläche (3, 9) gibt, der C^4 berührt, gibt es in jedem System *zwei*[15]). Betrachtet man die Erzeuger

$$x_2 = x_3, \quad x_4 = \pm x_5,$$

dann sind ihre Schnittpunkte mit dem Kegel

$$\alpha x_3^2 + \beta (x_4^2 - x_5^2) + 2\gamma x_4 x_5 = 0,$$

der der Schnittkegel von (3, 10) mit $x_1 = 0$, durch die Gleichungen

$$\alpha x_3^2 \pm 2\gamma x_5^2 = 0 \tag{3, 11}$$

bestimmt ist. Folglich gibt es einen Erzeuger, der den Kegel nicht schneidet, woraus folgt, daß es Erzeuger gibt, die den Kegel und damit C^4 berühren. Wir haben also:

Γ enthält vier parabolische Punkte zweiter Art.

Schneidet man Γ mit dem Raumbüschel $x_1 = \lambda x_2$, dann sieht man, daß nicht nur für $\lambda = 0$, sondern für alle Werte von λ die Schnittkurve eine C^4 dritter Art ist. Hieraus folgt, daß Γ nur aus einem Mantel besteht.

Durch Projektion von Γ von einem hyperbolischen Punkt P aus entsteht eine F^3 mit drei reellen Geraden. Es gibt drei Δ-Ebenen durch p', die den drei Doppeltangentialräumen durch P entsprechen, und die zwei mal zwei reellen Räume durch die Kegelschnitte und die Tangentialebenen in den parabolischen Punkten ergeben vier neue Δ-Ebenen. Also:

Γ wird in eine F^3 mit drei reellen Geraden und sieben Δ-Ebenen projiziert.

Von den übrigen 24 Geraden der Fläche sind zwölf punktiert und zwölf imaginär. Die Projektion von Γ von einem parabolischen Punkt aus ergibt eine F^3 mit zwei imaginären Doppelpunkten.

Γ fünfter Art.

Diese Fläche liegt auf drei nichtkonvexen Hyperkegeln. Wir können die Gleichungen (3, 9) und (3, 10) mit der Bedingung $\alpha < 0$, $\gamma \neq 0$ benutzen. Durch jeden gewöhnlichen Punkt von Γ gehen offenbar *sechs Kegelschnitte*, deren gegenseitige Lage genau dieselbe ist wie bei Γ zweiter Art.

Bezüglich der parabolischen Punkte zweiter Art zeigt die Gleichung (3, 11), wo $\alpha < 0$, daß es auch in diesem Fall Erzeuger auf (3, 9) gibt, die die Schnittkurve C^4 zwischen $x_1 = 0$ und Γ berühren. Folglich gibt es vier

---

[15]) Reye, l. c. p. 53.

parabolische Punkte zweiter Art im Hauptraum $x_1 = 0$, und da dieser kein ausgezeichneter Fall ist, haben wir also gefunden, daß:

Γ im ganzen zwölf parabolische Punkte zweiter Art enthält.

Durch jeden der parabolischen Punkte in $x_1 = 0$ gehen zwei reelle Geraden (Beweis wie unter Γ dritter Art, S. 699), also

Γ enthält acht reelle Geraden.

Dann wird jede Gerade von drei anderen geschnitten. Dieses stimmt damit überein, daß es drei harmonische Homologien gibt, die Γ in sich selbst überführen, und wo eine Gerade einer Geraden entspricht mit dem Schnittpunkt im Homologieraum. Gehen wir von einer einzelnen Geraden der Fläche aus, dann bekommen wir die übrigen sieben Geraden der Fläche durch Anwendung dieser Homologien. Aber dann ist es klar, daß wir hierbei genau das System von acht Geraden bekommen, welches S. 701 abgebildet und beschrieben ist, nämlich einen Doppelvierer.

Das Geradensystem auf Γ bildet einen Doppelvierer.

Auf der Abbildung sieht man die zwölf parabolischen Punkte zweiter Art. Für den einzelnen Doppelvierer ist das erste Zeichen überflüssig, so daß die acht Geraden auf Γ fünfter Art mit dem *Symbol* $(i\,j\,k)$ bezeichnet werden können, wo die Buchstaben die Zahlen 1 oder 2 bedeuten, und wo *zwei Geraden sich schneiden, wenn nur ein einziges Zeichen verschieden ist.*

Man kann nachweisen, daß Γ in Gebieten, die durch Geraden getrennt sind, *elliptische* und *hyperbolische* Punkte enthält. Γ hat nur einen Mantel.

Projiziert man Γ von einem *nicht-parabolischen* Punkte P von Γ aus auf einen R_3, dann entsteht eine F^3 mit $1 + 6 + 8 = 15$ reellen Geraden. Zu dieser F^3 gehören 15 Δ-Ebenen, die alle reelle Dreiecke enthalten. Durch p' gehen drei Δ-Ebenen, und durch jede Gerade, die durch Projektion eines der Kegelschnitte durch P entsteht, gehen weitere zwei, also im ganzen $3 + 6 \cdot 2 = 15$. Wir heben hervor:

Von einem gewöhnlichen Punkt aus wird Γ in eine F^3 mit 15 reellen Geraden und 15 Δ-Ebenen projiziert.

Die übrigen zwölf Geraden auf F^3 sind imaginär.

Von einem *parabolischen Punkt erster Art* aus wird Γ in eine F^3 mit konischem Doppelpunkt projiziert. Da jede Gerade auf Γ von drei anderen geschnitten wird, gehen im ganzen vier *binäre* Geraden durch den Doppelpunkt.

Projizieren wir Γ von einem *parabolischen Punkt zweiter Art*, dann entsteht eine F^3 mit zwei konischen Doppelpunkten. F^3 enthält eine quaternäre, vier binäre und drei unäre Geraden.

Wir wollen auf die Behandlung dieser Projektionsflächen nicht weiter eingehen, sondern gehen nunmehr zum letzten Fall über.

Γ sechster Art.

Im Flächenbüschel (1, 1) gibt es einen reellen und vier imaginäre Hyperkegel. Γ wird dargestellt durch die Gleichungen

(3, 12) $$x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 = 0,$$

(3, 13) $$x_1^2 + 2\beta x_2 x_3 + \gamma(x_4^2 - x_5^2) + 2\delta x_4 x_5 = 0,$$

indem wir in (1, 18) $\alpha = 0$ gesetzt haben. Durch gewöhnliche Punkte von Γ gehen *zwei reelle Kegelschnitte*, die in den Erzeugerebenen des Hyperkegels (3, 12) liegen.

Schneiden wir Γ mit dem Raum $x_1 = 0$, dann entsteht, wie schon S. 691 erwähnt, eine C^4 vierter Art, die aus zwei Zweigen dritter Ordnung besteht. Folglich kann Γ nicht ganz ins Endliche gebracht werden. — Die eventuellen parabolischen Punkte zweiter Art liegen auf der Kurve C^4. Sie sind alle Berührungspunkte für die Erzeuger des *gleichen* Systems auf der Kegelschnittfläche (3, 12), da nämlich das Flächenbüschel durch C^4 nur imaginäre Hauptpunkte enthält. C^4 ist gegeben durch die Gleichungen

(3, 14) $$x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 = 0,$$

(3, 15) $$2\beta x_2 x_3 + \gamma(x_4^2 - x_5^2) + 2\delta x_4 x_5 = 0.$$

Die Schnittpunkte zwischen (3, 15) und den Erzeugern

$$x_2 = x_3, \qquad x_4 = \pm x_5$$

sind bestimmt durch

$$2\beta x_3^2 \pm 2\delta x_5^2 = 0,$$

woraus folgt, das jedenfalls das eine System nichtschneidende Erzeuger und damit berührende Erzeuger enthält. Γ enthält also parabolische Punkte zweiter Art. Die Kollineationen $(x_2, x_3, x_4, x_5) \to (\div x_2', \div x_3', x_4', x_5')$ und $(x_2, x_3, x_4, x_5) \to (\div x_3', x_2', \div x_5', x_4')$ ebenso wie ihr Produkt führen C^4 in sich selbst über, da sowohl (3, 14) und (3, 15) invariant sind. Also lassen sich aus einem parabolischen Punkt drei weitere ableiten, d. h.

Γ enthält vier parabolische Punkte zweiter Art.

Um zu entscheiden, ob diese Punkte Träger reeller oder punktierter Geradenpaare sind, müssen wir die Fläche (3, 13) mit den Erzeugerebenen durch die vier berührenden Erzeuger schneiden. Es sei der eine Erzeuger gegeben durch die Gleichungen (in $x_1 = 0$)

(3, 16) $$x_2 = p_1 x_4 + q_1 x_5, \qquad x_3 = p_2 x_4 + q_2 x_5,$$

die auch im R_4 die Gleichungen für eine Erzeugerebene sein können. Setzen wir (3, 16) in (3, 13) ein, dann bekommen wir eine neue Gleichung von der Form

(3, 17) $$x_1^2 + k(a x_4 + b x_5)^2 = 0,$$

wo das *Vorzeichen* von k von Bedeutung ist für die Realität der Geraden. Während die eine der besprochenen Kollineationen die *Form* von (3, 15) unverändert läßt, ergibt die andere einen *Vorzeichenwechsel.* Hieraus folgt, daß in Gleichung (3,17) k für zwei der vier Erzeuger positiv ist, während es für die anderen zwei negativ ist[16]). Wir bekommen also als Resultat: *zwei der parabolischen Punkte tragen reelle Geraden, die zwei anderen punktierte. Γ enthält vier reelle Geraden.*

Die Lage der vier Geraden auf Γ erkennt man deutlich, wenn man für $x_1 = 0$ den unendlich fernen Raum wählt. Dann führen nämlich die beiden Symmetrien

$$x_2 = -x_2', \; x_3 = -x_3' \quad \text{und} \quad x_4 = -x_4', \; x_5 = -x_5'$$

Γ in sich selbst und jede der Geraden in eine der anderen über. Mit den früheren Bezeichnungen haben die vier Geraden (1 1 1 1), (1 1 1 2) und (1 2 2 1), (1 2 2 2) die richtige Lage. Die vier Geraden liegen nicht in einem dreidimensionalen Raum. Man kann nachweisen, daß Γ sowohl elliptische als auch hyperbolische Punkte enthält; Γ besteht nur aus einem Mantel.

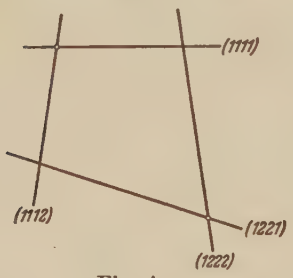

Fig. 4.

Die zwei Kegelschnittsysteme auf Γ haben *verschiedene Lage* in bezug auf die Geraden der Fläche. Ein Kegelschnitt, der in der Erzeugerebene des *gleichen* Systems wie die vier Ebenen durch die parabolischen Punkte liegt, wird von den Geraden nicht geschnitten, und durch einen solchen Kegelschnitt geht kein R_3, der dreifache Berührung mit Γ hat. Dagegen wird ein Kegelschnitt von dem *anderen* System von allen vier Geraden geschnitten, und durch diesen gehen vier Räume R_3, die die Tangentialebenen in den parabolischen Punkten zweiter Art enthalten.

Betrachten wir nun die *Projektion* von Γ von einem *gewöhnlichen* Punkt aus, dann ergibt sich aus dem vorigen:

Γ wird in eine F^3 mit sieben reellen Geraden und fünf Δ-Ebenen projiziert.

Diese F^3 entstand auch bei Projektion von Γ zweiter Art. Jedoch besteht der Unterschied, daß für Γ zweiter Art die Gerade p' Träger der fünf Δ-Ebenen ist und von den sechs reellen Geraden geschnitten wird; für Γ sechster Art gilt dieses für die Projektion desjenigen Kegelschnittes durch P, der von den Geraden auf Γ *geschnitten* wird. Auch hier verteilen sich die übrigen 20 Geraden auf F^3 so, daß vier punktiert und 16 imaginär sind.

[16]) Dieses kann leicht durch Berechnung nachgewiesen werden, jedoch erscheint mir die obige Schlußweise hinreichend.

Γ wird von einem *parabolischen Punkt erster Art* in eine F^3 mit konischem Doppelpunkt projiziert. F^3 erhält zwei binäre und drei unäre Geraden.

Von einem *parabolischen Punkte zweiter Art* aus wird Γ in eine F^3 mit zwei konischen Doppelpunkten, die reell oder imaginär sein können, projiziert

Damit schließen wir die Behandlung dieser sechs Typen von Flächen vierter Ordnung. In der untenstehenden Übersicht über die verschiedenen charakteristischen Größen der Flächen haben wir den größten Teil der gefundenen Resultate zusammengefaßt.

Γ vom Typus.

	I	II	III	IV	V	VI
Zahl der konvexen bzw. nicht-konvexen Hyperkegel	4,1	2.3	0,5	2,1	0,3	0,1
Zahl der Kegelschnitte durch einen gewöhnlichen Punkt . .	2	6	10	2	6	2
Zahl der reellen Geraden . . .	0	0	16	0	8	4
Zahl der parabolischen Punkte zweiter Art	8	0	40	4	12	4
Zahl der Geraden bzw. Δ-Ebenen für die Projektion von Γ von einem gewöhnlichen Punkt aus	3,13	7,5	27,45	3,7	15,15	7,5

(Eingegangen am 2. April 1936.)

A Problem on the additive Theory of Number of several variables.

By

Loo-keng Hua *) in Peiping (China).

In this note the following question is answered:

Wheter there exists an integer s such that the system of diophantine equations

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_{r=1}^{s} \varepsilon_r P(x_r, y_r) = n, \\ \sum_{r=1}^{s} \varepsilon_r P'(x_r, y_r) = n', \end{array}\right. \qquad (\varepsilon_r = \pm 1) \tag{1}$$

is solvable simultaneously for all integers n and n', where P and P' are two integral-valued polynomials of the variables x and y?

The question is answered affirmatively provided that P and P' satisfy a certain restriction. The upper bound of s will be given here, it is equal to $2^k k - 1$, k being the greater of the degrees of P and P'.

We assume: $P(x, y)$ and $P'(x, y)$ are two integral-valued polynomials of k-th and k'-th degree respectively. For any prime p there do not exist integers q and q', $(q, q') = 1$, and l such that

$$q P(x, y) + q' P'(x, y) \equiv l \pmod{p} \tag{2}$$

identically. Without loss of generality we may assume $k \geqq k'$. In the study of this problem, the condition stated here cannot be removed; for otherwise, n and n' cannot be two arbitrary integers.

Lemma 1. *Every integral valued polynomial $P(x, y)$ can be put in the form*

$$P(x, y) = \Sigma a_{\mu\nu} P_\mu(x) P_\nu(y),$$

where the a's are integers and

$$P_\mu(z) = \frac{z(z-1)\ldots(z-\mu+1)}{\mu!} \text{ for } \mu > 0; \quad P_0(z) = 1.$$

Lemma 2. *Let*

$$P(x, y) = \Sigma a_{\mu\nu} P_\mu(x) P_\nu(y)$$

*) Research fellow of the China Foundation of the Promotion of Education and Culture.

and

$$P'(x, y) = \Sigma a'_{\mu\nu} P_\mu(x) P_\nu(y).$$

The necessary and sufficient condition that for a given prime p there exist integers q and q' and l such that

$$q P + q' P' \equiv l \pmod{p}$$

identically is that

$$q a_{\mu\nu} + q' a'_{\mu\nu} \equiv 0 \pmod{p}$$

for

$$q a_{0\,0} + q' a'_{0\,0} \equiv l \pmod{p}.$$

These Lemmas can be obtained easily in the same way as those of the author's former papers [1]).

Let $H(P, P', m, m')$ be the least integer of s for which the system of congruences

$$\sum_{\nu=1}^{s} \varepsilon_\nu P(x_\nu, y_\nu) \equiv n \pmod{m}$$

and

$$\sum_{\nu=1}^{s} \varepsilon_\nu P'(x_\nu, y_\nu) \equiv n' \pmod{m'}$$

is solvable simultaneously for any integers n and n'. Let $H(P, P', 0, 0)$ be the least integer of s for which (1) is solvable.

Let $\Delta_t^x(P(x, y))$ and $\Delta_t^y(P(x, y))$ be the t-th difference of $P(x, y)$ with respect to x and y respectively. $\Delta_t^x(P(x, y))$ can be considered as the sum of 2^t terms of $\pm P(x, y)$.

Lemma 3. *Let α, β, γ and δ be integers with the relation*

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Then

$$H(P, P', 0, 0) = H(\alpha P + \beta P, \gamma P + \delta P', 0, 0).$$

The Lemma follows immediately.

Lemma 4. *Let $a_{uv} P_u(x) P_v(y)$ be a term of k-th degree in $P(x, y)$. If $a'_{uv} = 0$, and $P' \not\equiv 0 \pmod{m}$ then*

$$H(P, P', m, m') \leqq 2^{k-1} + H(P, P', (m, a_{uv}), m').$$

(Here m, m' may be zeros).

Proof. Here

$$\Delta_{u-1}^x \Delta_v^y P(x, y) = a_{u,v} x + a_{u-1,\,v} + a_{u-1,\,v+1} y,$$

$$\Delta_{u-1}^x \Delta_v^y P'(x, y) = a'_{u-1,\,v} + a'_{u-1,\,v+1} y.$$

---

[1]) Journ. of London Math. Soc. **11**, 1935, pp. 4—5. Science Report of Tsing Hua University, Ser. A. **3**, 1935, 247—260.

Let s be an integer $\geqq H(P, P', (m, a_{n\,v}), m')$, then

$$\sum_{v=1}^{s} \varepsilon_v P(x_v, y_v) \equiv n \pmod{(m, a_{u\,v})},$$

$$\sum_{v=1}^{s} \varepsilon_v P'(x_v, y_v) \equiv n' \pmod{m'}$$

is solvable for all integers n and n', and thence

$$(3) \qquad \begin{cases} \sum_{v=1}^{s} \varepsilon_v P(x_v, y_v) + \Delta_{u-1}^{x} \Delta_{v}^{y} P(x, y) \equiv N \pmod{m}, \\ \sum_{v=1}^{s} \varepsilon_v P'(x_v, y_v) + \Delta_{u-1}^{x} \Delta_{v}^{y} P(x, y) \equiv N' \pmod{m'}, \end{cases}$$

(is solvable for all integers N and N'). In fact (3) can be written in the form or

$$\sum_{v=1}^{s} \varepsilon_v P(x_v, y_v) + a_{u,v}\, x + a_{u-1,v} + a_{u-1,v+1}\, y \equiv N \pmod{m},$$

$$\sum_{v=1}^{s} \varepsilon_v P'(x_v, y_v) + a'_{u-1,v} + a'_{u-1,v+1}\, y \equiv N' \pmod{m'},$$

From (3) the Lemma follows with the remark before the Lemma 3.

Lemma 5.

$$H(P, P', 0, 0) \geqq H(P, P', m, m').$$

This Lemma is evident.

Lemma 6. *Let*

$$R(x, y) = a\, x + b\, y + c,$$

$$R'(x, y) = a'\, x + b'\, y + c.$$

If for any prime p there do not exist integers q and q', $(q, q') = 1$, and $l^{(>1)}$ such that

$$q R + q' R' \equiv l \pmod{p},$$

then

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Thus

$$H(R, R', 0, 0) = H(x, y, 0, 0) = 1.$$

Proof. Let μ and μ' be two integers such that

$$a\,\mu + a'\,\mu' = 0, \qquad (\mu, \mu') = 1.$$

Then

$$b\,\mu + b\,\mu' = \pm 1.$$

for otherwise, let p be a prime divisor of $b\mu + b'\mu'$, then

$$\mu R + \mu' R' \equiv \mu c + \mu' c' \pmod{p}$$

identically. But this contradicts our hypothesis. Thus $(b, b') = 1$. Similarly $(a, a') = 1$. Therefore

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Theorem 1. $H(P, P', 0, 0) \leqq 2^k k - 1$.

Proof. Let $a_{uv} P_u(x) P_v(y)$ be a term of $P(x, y)$ where $u + v = k$, $a_{uv} \neq 0$ and u is the greatest one of the u's satisfying the conditions $u + v = k$.

1. $a'_{uv} = 0$. By Lemmas 4 and 5

$$\begin{aligned} H(P, P', 0, 0) &\leqq 2^{u+v-1} + H(P, P', a_{uv}, 0) \\ &\leqq 2^{k-1} + H(Q, Q', 0, 0) \end{aligned}$$

where Q and Q' are two Polynomials having the same properties as P and P' and

$$P \equiv Q, \quad P' \equiv Q' \pmod{a_{uv}}$$

and the coefficients of $P_u(x) P_v(y)$ in Q and Q' are zeros.

2. $a'_{uv} \neq 0$. Let r and r' be two integers having the properties

$$(r, r') = 1$$

and

$$r a_{uv} + r' a'_{uv} = 0.$$

We have integers s and s' such that

$$\begin{vmatrix} r & r' \\ s & s' \end{vmatrix} = \pm 1.$$

By Lemma 3, we have

$$H(P, P', 0, 0) = H(sP + s'P', rP + r'P', 0, 0)$$

and the coefficient of $P_u(x) P_v(y)$ in $rP + r'P'$ is zero. By 1. we have, thus, two polynomials Q and Q' having the same properties as P and P', and then coefficients of $P_u(x) P_v(y)$ being zero, such that

$$\begin{aligned} H(P, P', 0, 0) &\leqq 2^{u+v-1} + H(Q, Q', 0, 0) \\ &\leqq 2^{k-1} + H(Q, Q', 0, 0). \end{aligned}$$

This is true in both cases.

Repeating this process, we have finally

$$H(P, P', 0, 0) \leqq \sum_{\nu=2}^{k} (\nu + 1) 2^{\nu-1} + H(R, R', 0, 0)$$

where R and R' are two linear polynomials in x and y and have the properties mentioned in Lemma 6. Thus we have

$$H(P, P', 0, 0) \leqq \sum_{\nu=1}^{k} (\nu+1)\, 2^{\nu-1} - 1 = k\, 2^k - 1.$$

This result can be extended to t variables:

Theorem 2. *Let $P_1, \ldots, P_t$ be t integral-valued polynomials of $x_1, \ldots, x_t$, the highest of their degrees being equal to k, and suppose for any prime p there do not exist integers $q_1, \ldots, q_t$ and $l\ (> 1)$ such that*

$$q_1 P_1 + \ldots + q_t P_t \equiv l \pmod{p}, \qquad (q_1, \ldots, q_t) = 1$$

Then

$$H(P_1, \ldots, P_s, 0, \ldots, 0) = O(2^k k^{t-1}).$$

(Eingegangen am 20. April 1936.)

Bemerkung zu einer Differentialungleichung von Carleman.

Von

Alexander Dinghas in Berlin.

1. In einer interessanten Note[1]) aus dem Jahre 1933 zeigte Carleman, wie die von Ahlfors[2]) zuerst bewiesene Denjoysche Vermutung aus einer leicht beweisbaren Differentialungleichung folgt.

Fast gleichzeitig gab Milloux[3]) in einer größeren Arbeit eine allgemeine Ungleichung an, deren Beweis ihm durch eine Kombination des Maximumprinzips und der ersten Ahlforsschen Ungleichung[4]) gelang. Diese Ungleichung kann nicht nur zum Beweis des Denjoy-Ahlforsschen Satzes benutzt werden, sondern auch zur Verallgemeinerung einiger klassischer Sätze von Lindelöf.

Wir zeigen in dieser Note, daß Carlemans Methode zu einer mit der Millouxschen im wesentlichen übereinstimmenden Ungleichung führt, wenn man abweichend von Carleman nicht Cartesische, sondern Polarkoordinaten benutzt, die Integration in etwas modifizierter Form durchführt und dabei ein Integral geeignet nach unten abschätzt.

Es ist bemerkenswert, daß aus der Ungleichung (2.7), die sich ohne Benutzung des tieferen Ahlforsschen Lemmas beweisen läßt, die Millouxsche Ungleichung (3.1) folgt.

2. B sei ein einfach zusammenhängender Bereich, der von zwei sich ins Unendliche erstreckenden und sich nicht schneidenden analytischen Kurven C_1, C_2 begrenzt ist. S_r sei der Teil der Peripherie von $|z| = r$, der im Innern von B liegt und $S(r)$ seine Länge. Die ganze transzendente Funktion $f(z)$ sei auf den Kurven C_1, C_2 absolut kleiner als Eins und auf S_r kleiner als $M(r)$. Diese Voraussetzung bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn $|f(z)|$ auf C_1 und C_2 unter einer festen endlichen Schranke liegt.

---

[1]) Carleman, Sur une inégalité différentielle dans la théorie des fonctions analytiques, Comp. Rend. 196, (1933), S. 995—997.

[2]) Ahlfors, Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen, Acta Soc. Sc. Fenn. Nova Series A, 1, Nr. 9.

[3]) Milloux, Sur les domaines de détermination infinies des fonctions entières, Acta Math. 61 (1933), S. 105—134.

[4]) l. c., S. 10.

Mit $m(r)$ bezeichnen wir wie Carleman die Funktion

$$m(r) = \int_{S_r} (\overset{+}{\log} |f(re^{i\varphi})|)^2 \, d\varphi$$

und setzen

$$m(r) = \psi(\xi) = \int_{S_r} (\overset{+}{\log} |f(e^{\xi + i\varphi})|)^2 \, d\varphi \tag{2.1}$$

mit

$$\xi = \log r.$$

Die positive Potentialfunktion $\overset{+}{\log} |f(re^{i\varphi})|$ bezeichnen wir im folgenden mit $u(\xi, \varphi)$.

Dann folgt aus (2.1)

$$\psi'(\xi) = 2 \int_{S_r} u u_\xi \, d\varphi,$$

$$\psi''(\xi) = 2 \int_{S_r} (u u_{\xi\xi} + u_\xi^2) \, d\varphi,$$

also wegen $u_{\xi\xi} + u_{\varphi\varphi} = 0$ durch partielle Integration

$$\psi''(\xi) = 2 \int_{S_r} (u_\xi^2 + u_\varphi^2) \, d\varphi.$$

Nun ist

$$\int_{S_r} u_\xi^2 \, d\varphi \geqq \frac{1}{4} \frac{\psi'^2(\xi)}{\psi(\xi)} \text{ [5]} \tag{2.2}$$

und

$$\int_{S_r} u_\varphi^2 \, d\varphi \geqq \frac{\pi^2 r^2}{S^2(r)} \int_{S_r} u^2 \, d\varphi \text{ [6]}, \tag{2.3}$$

also

$$\frac{1}{2} \frac{\psi''(\xi)}{\psi(\xi)} - \frac{1}{4} \left\{ \frac{\psi'(\xi)}{\psi(\xi)} \right\}^2 \geqq \frac{\pi^2 r^2}{S^2(r)}. \tag{2.4}$$

Diese Ungleichung, der die Carlemansche Differentialungleichung (8)[7] entspricht, geht durch die Substitution

$$\omega(\xi) = \log \psi(\xi) = \log m(r)$$

in

$$2\omega''(\xi) + \omega'^2(\xi) \geqq \frac{4\pi^2 r^2}{S^2(r)}$$

---

[5]) Dies folgt aus der Schwarzschen Ungleichung.

[6]) Bekannte Aufgabe der Variationsrechnung. Wenn $y(x)$ in $0 \leqq x \leqq a$ stetig und stückweise differenzierbar ist mit $y(0) = y(a) = 0$, so gilt

$$\int_0^a y'^2 \, dx \geqq \frac{\pi^2}{a^2} \int_0^a y^2 \, dx.$$

[7]) l. c., S. 996.

ber. Wegen

$$1 + 2\,\frac{\omega''(\xi)}{\omega'^2(\xi)} < \left(1 + \frac{\omega''(\xi)}{\omega'^2(\xi)}\right)^2$$

rhalten wir daraus

2.5) $$\omega'(\xi) + \frac{\omega''(\xi)}{\omega'(\xi)} \geqq 2\pi\,\frac{r}{S(r)}.$$

Die linke Seite dieser Ungleichung ist nun gleich

$$\frac{d}{d\xi}\left(\log\frac{d}{d\xi}\,e^{\omega(\xi)}\right) = \frac{d}{d\xi}\left(\log\frac{d}{d\xi}\,\psi(\xi)\right),$$

vir haben also

2.6) $$\frac{d}{dr}\log\left(r\,\frac{dm(r)}{dr}\right) \geqq \frac{2\pi}{S(r)}$$

und daraus durch zweimalige Integration von $r_0 = e^{\xi_0}$ bis r

2.7) $$m(r) \geqq m(r_0) + C_0\int_{r_0}^{r}\frac{dt}{t}\,e^{2\pi\varphi(t)}$$

oder da $m(r_0) \geqq 0$

2.71) $$m(r) \geqq C_0\int_{r_0}^{r}\frac{e^{2\pi\varphi(t)}}{t}\,dt,$$

wobei

$$\varphi(r) = \int_{r_0}^{r}\frac{dt}{S(t)}$$

und

$$C_0 = \psi'(\xi_0).$$

3. Die Ungleichung (2.71) leistet uns dieselben Dienste wie die Millouxsche Ungleichung nur mit dem Unterschied, daß sie bei Funktionen unendlicher Ordnung ein wenig schlechtere Abschätzungen liefert.

Es sei nun $\alpha > 1$. Dann haben wir wegen der Monotonität von $\varphi(r)$

$$\int_{r_0}^{\alpha r}\frac{dt}{t}\,e^{2\pi\varphi(t)} > \int_{r}^{\alpha r}\frac{dt}{t}\,e^{2\pi\varphi(t)} > e^{2\pi\varphi(r)}\log\alpha,$$

also

$$m(\alpha r) > C_0\,e^{2\pi\varphi(r)}\log\alpha.$$

Wegen

$$m(\alpha r) < 2\pi\{\log M(\alpha r)\}^2$$

wird also

3.1) $$\log\log M(\alpha r) > \pi\int_{r_0}^{r}\frac{dt}{S(t)} + C_1(\alpha),$$

wobei $C_1(\alpha)$, ebenso wie später $C_2(\alpha)$, $C_3(\alpha)$, ..., eine nur von α und von dem betreffenden Bereich abhängige Konstante bedeutet.

Setzt man voraus, daß $f(z)$ von der endlichen Ordnung $\varrho > \frac{1}{2}$ ist, so ergeben sich aus (3.1) ohne weiteres die wichtigsten Millouxschen Sätze für diese Funktionenklasse.

Aus derselben Ungleichung folgt übrigens der Denjoy-Ahlforssche Satz ohne jede Schwierigkeit. Wenn die ganze Funktion $f(z)$ n asymptotische Werte hat, so ist, wenn man (3.1) in jedem von je zwei aufeinander folgenden Kurven begrenzten anwendet, dann summiert und sich außerdem noch der elementaren Ungleichung

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{a_\nu} \geqq \frac{n}{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu}$$

bedient,

$$n \log\log M(r) > \pi\frac{n^2}{2\pi}\log r + \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu(\alpha) - \frac{n^2}{2}\log \alpha r_0$$

mit

$$M(r) = \operatorname{Max}|f(re^{i\varphi})|$$

für $|z| = r$, oder

$$\log\log M(r) > \frac{n}{2}\log r + C_{n+1}(\alpha).$$

Daraus folgt der Denjoy-Ahlforssche Satz

$$n \leqq 2\varrho$$

unmittelbar.

(Eingegangen am 11. Mai 1936.)

Konvexe Kurven und Fußpunktkurven.

Von

Gustav Doetsch in Freiburg i. B.

§ 1.

Die Fußpunktkurve.

1. Eine ebene Kurve $\mathfrak{F}$ sei in Polarkoordinaten (φ = Arcus, h = Radiusvektor oder kurz Radius) durch eine Gleichung $h = h(\varphi)$ gegeben. Existenz einer (einseitigen) Tangente ist gleichbedeutend mit (einseitiger) Differenzierbarkeit der Funktion $h(\varphi)$; bedeutet γ den Winkel zwischen der Tangente und der Normalen auf dem Radius (im folgenden kurz *Radiusnormale* genannt), so ist (vgl. Fig. 1)

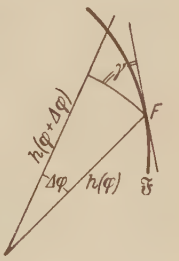

Fig. 1.

$$\text{tg}\,\gamma = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{h(\varphi+\Delta\varphi) - h(\varphi)}{h(\varphi)\,\Delta\varphi} = \frac{h'(\varphi)}{h(\varphi)} \tag{1}$$

bzw. $\frac{h'_+(\varphi)}{h(\varphi)}$ oder $\frac{h'_-(\varphi)}{h(\varphi)}$, wenn es sich um eine einseitige Tangente in Richtung wachsender oder abnehmender φ handelt.

Bezeichnen wir die laufenden Polarkoordinaten auf der zum Kurvenpunkt (φ,h) gehörigen Radiusnormalen mit α und r, so lautet ihre Gleichung

$$h(\varphi) = r(\alpha)\cos(\alpha - \varphi). \tag{2}$$

Die Radiusnormalen umhüllen eine Kurve $\mathfrak{C}$, die man erhält, indem man zu (2) die nach dem Parameter φ differenzierte Gleichung

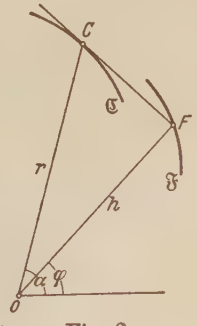

Fig. 2.

$$h'(\varphi) = r(\alpha)\sin(\alpha - \varphi) \tag{3}$$

hinzunimmt und diejenigen Punkte (α, r) sucht, die beiden Gleichungen genügen. Explizit kann man α und r aus

$$r^2(\alpha) = h^2(\varphi) + h'^2(\varphi) \tag{4}$$

und

$$\text{tg}\,(\alpha - \varphi) = \frac{h'(\varphi)}{h(\varphi)} \tag{5}$$

entnehmen. Aus diesen Relationen ergibt sich die bekannte Tatsache, daß $h'(\varphi)$ *gleich dem Abschnitt der Radiusnormalen zwischen* $\mathfrak{F}$ *und* $\mathfrak{C}$ ist (vgl. Fig. 2).

Die Radiusnormalen von $\mathfrak{F}$ sind die Tangenten oder allgemeiner, wenn $\mathfrak{C}$ Ecken hat, die Stützgeraden von $\mathfrak{C}$ mit der Normalenrichtung φ; $\mathfrak{F}$ ist die Fußpunktkurve von $\mathfrak{C}$ bezüglich des Poles O. $h(\varphi)$ ist die Stützfunktion von $\mathfrak{C}$ hinsichtlich O[1]).

2. An jeder Stelle, wo $h''(\varphi)$ vorhanden ist, existieren offenbar $\frac{d\alpha}{d\varphi}$[2]) und $\frac{dr}{d\alpha} = r'(\alpha)$. Wir behaupten nun den

Satz 1. *Ist $\mathfrak{F}$ die Fußpunktkurve von $\mathfrak{C}$, d. h. stehen $h(\varphi)$ und $r(\alpha)$ in den Beziehungen* (2) *und* (3) *zueinander, so gilt an jeder Stelle, wo $\frac{d\alpha}{d\varphi} \neq 0$ ist*[3]):

$$\frac{r'(\alpha)}{r(\alpha)} = \frac{h'(\varphi)}{h(\varphi)} \quad [= \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)]. \tag{6}$$

Beweis: Aus (2) folgt durch Differentiation nach φ:

$$h'(\varphi) = r'(\alpha)\frac{d\alpha}{d\varphi}\cos(\alpha-\varphi) - r(\alpha)\sin(\alpha-\varphi)\left(\frac{d\alpha}{d\varphi} - 1\right)$$

$$= \frac{d\alpha}{d\varphi}\{r'(\alpha)\cos(\alpha-\varphi) - r(\alpha)\sin(\alpha-\varphi)\} + r(\alpha)\sin(\alpha-\varphi)$$

oder wegen (3):

$$\{r'(\alpha)\cos(\alpha-\varphi) - r(\alpha)\sin(\alpha-\varphi)\}\frac{d\alpha}{d\varphi} = 0.$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung.

Der Satz besagt wegen (1), daß an jeder Stelle, wo α in Abhängigkeit von φ nicht stationär ist, der *Winkel zwischen Kurve und Radius (oder auch Radiusnormalen) bei den beiden Kurven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{F}$ derselbe ist.*

---

[1]) Die Ausdrücke Stützgerade, Stützfunktion, Fußpunktkurve sind ursprünglich nur für den Fall, daß $\mathfrak{C}$ konvex ist, geprägt worden.

[2]) Übrigens ist $\frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{h+h''}{h^2+h'^2}h$. — In dem uns später hauptsächlich interessierenden Fall, daß $\mathfrak{C}$ eine geschlossene *konvexe* Kurve ist, existiert $h''(\varphi)$ fast überall; siehe M. Fujiwara, Über Stützgeradefunktion der konvexen geschlossenen Kurven. The Tôhoku Math. Journ. **20** (1921/22), S. 51—59.

[3]) An den Stellen beispielsweise, wo $\mathfrak{F}$ eine Ecke hat, existiert $h''(\varphi)$ und $\frac{d\alpha}{d\varphi}$ nicht; vgl. das in Fig. 8 und 9 gezeichnete Beispiel, wo $\mathfrak{F}$ ein Kreisbogendreieck und $\mathfrak{C}$ ein geradliniges Dreieck ist; hier entsprechen einer Ecke von $\mathfrak{F}$, d. h. einem φ unendlich viele α. — Ist $\frac{d\alpha}{d\varphi} = 0$, so braucht (6) nicht richtig zu sein: so ist dem erwähnten Beispiel für alle Punkte von $\mathfrak{F}$ außer den Ecken $\frac{d\alpha}{d\varphi} = 0$ und $r'(\alpha) = 0$, aber $h'(\varphi) \neq 0$.

3. Wir beweisen nun die Umkehrung von Satz 1:

Satz 2. *Stehen die Kurven* $\mathfrak{F}(\varphi, h)$ *und* $\mathfrak{C}(\alpha, r)$ *in den Beziehungen* (2) *und* (6) *zueinander, so ist in einem Intervall, wo* $\frac{d\alpha}{d\varphi} \neq 1$ *ist,* $\mathfrak{F}$ *die Fußpunktkurve von* $\mathfrak{C}$[4]).

Beweis: Wird (2) nach φ logarithmisch differenziert, so ergibt sich:

$$\frac{h'(\varphi)}{h(\varphi)} = \frac{r'(\alpha)}{r(\alpha)}\frac{d\alpha}{d\varphi} - \frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos(\alpha-\varphi)}\left(\frac{d\alpha}{d\varphi} - 1\right),$$

und nach (6):

$$\frac{h'(\varphi)}{h(\varphi)} = \frac{h'(\varphi)}{h(\varphi)}\frac{d\alpha}{d\varphi} - \operatorname{tg}(\alpha-\varphi)\left(\frac{d\alpha}{d\varphi} - 1\right)$$

oder

$$\frac{h'(\varphi)}{h(\varphi)}\left(1 - \frac{d\alpha}{d\varphi}\right) = \operatorname{tg}(\alpha-\varphi)\left(1 - \frac{d\alpha}{d\varphi}\right),$$

also für $\frac{d\alpha}{d\varphi} \neq 1$:

$$\frac{h'(\varphi)}{h(\varphi)} = \operatorname{tg}(\alpha-\varphi),$$

woraus unter Zuhilfenahme von (2) folgt:

$$h'(\varphi) = r(\alpha)\sin(\alpha-\varphi).$$

Für die beiden Kurven ist also außer (2) auch (3) erfüllt.

4. $\mathfrak{C}$ wurde erhalten als Einhüllende der Radiennormalen von $\mathfrak{F}$. *Ist* $r(\alpha)$ *differenzierbar, so erhält man umgekehrt* $\mathfrak{F}$ *als Einhüllende der Kreise über den Radien von* $\mathfrak{C}$.

Beweis: Bezeichnen wir die Polarkoordinaten des laufenden Punktes auf dem Kreise über dem zu einem festen α gehörigen r von $\mathfrak{C}$ als Durchmesser mit φ, H, so lautet die Gleichung dieses Kreises

$$H = r(\alpha)\cos(\alpha-\varphi). \tag{7}$$

Die Einhüllende erhält man als Ort derjenigen Punkte (φ, H), die außer (7) auch die nach dem Parameter α differenzierte Gleichung

$$0 = r'(\alpha)\cos(\alpha-\varphi) - r(\alpha)\sin(\alpha-\varphi)$$

oder

$$\frac{r'(\alpha)}{r(\alpha)} = \operatorname{tg}(\alpha-\varphi) \tag{8}$$

erfüllen. Die durch $H = h(\varphi)$ gegebene Kurve $\mathfrak{F}$ genügt aber wegen (2) und (6) den beiden Forderungen (7) und (8).

---

[4]) Ist in einem Intervall $\frac{d\alpha}{d\varphi} = 1$, so ist $\alpha = \varphi + \varphi_0$, $h(\varphi) = r(\alpha)\cos\varphi_0$. Daß bei $\frac{d\alpha}{d\varphi} = 1$ die Kurven, die (2) und (6) befriedigen, nicht im Verhältnis von Kurve und Fußpunktkurve zu stehen brauchen, zeigt folgendes Beispiel: Beziehen wir die zwei Kreise $r(\alpha) = \text{const.} = r_0$, $h(\varphi) = \text{const.} = r_0\cos\varphi_0$ so aufeinander, daß $\alpha = \varphi + \varphi_0$ ist, so ist (2) erfüllt, (6) aber auch, da $h' = r' = 0$ ist. Trotzdem ist (φ, h) nicht Fußpunktkurve von (α, r).

5. $\mathfrak{F}$ hat also in einem Punkte F dieselbe Richtung wie der über dem zugehörigen Radius OC der Kurve $\mathfrak{C}$ stehende Kreis, während $\mathfrak{C}$ in C die Richtung FC hat. Nach der Deutung von (6) in 2. (Ende) ist mithin der Winkel zwischen dem Kreis und der Radiusnormalen in F gleich dem Winkel zwischen der Geraden FC und der Radiusnormalen in C. Das ist elementargeometrisch klar, denn diese Winkel sind beide gleich dem Winkel FOC (s. Fig. 3).

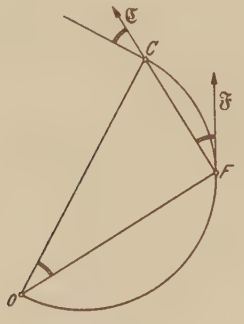

Fig. 3.

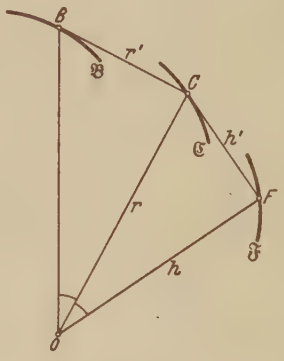

Fig. 4.

6. Wir wollen der Gleichung (6) noch eine andere Deutung geben. Bezeichnen wir die Kurve, von der $\mathfrak{C}$ die Fußpunktkurve ist, mit $\mathfrak{B}$ und drei zusammengehörige Punkte auf $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$ mit F, C, B, so ist nach 1:

$$FC = h', \qquad CB = r',$$

und (6) besagt, daß die Dreiecke OFC und OCB ähnlich sind und somit

$$\measuredangle FOC = \measuredangle COB$$

ist. *Eine Kurve eilt also ihrer Fußpunktkurve in jedem Augenblick um denselben Winkel voraus, wie diese wiederum ihrer Fußpunktkurve* (s. Fig. 4).

7. An dem Zusammenhang zwischen einer Kurve und ihrer Fußpunktkurve ist nun mit Rücksicht auf unsere späteren Anwendungen am interessantesten die Tatsache, daß das Verhältnis zwischen den beiden Kurven sich bei Spiegelung an einem Kreis um O umkehrt. Es gilt nämlich

Satz 3. *Spiegelt man eine Kurve $\mathfrak{C}$ und ihre Fußpunktkurve $\mathfrak{F}$ bezüglich O an einem Kreis um O (Transformation durch reziproke Radien), so gehen sie in zwei Kurven $\overline{\mathfrak{C}}$ und $\overline{\mathfrak{F}}$ über, die in der umgekehrten Beziehung stehen: $\overline{\mathfrak{C}}$ ist die Fußpunktkurve von $\overline{\mathfrak{F}}$.*

Beweis: Es genügt, als spiegelnden Kreis den Einheitskreis um O zu nehmen. Mit Ausnahme der Punkte, wo $\frac{d\alpha}{d\varphi}$ gleich 0 oder 1 ist, sind die Gleichungen

$$h(\varphi) = r(\alpha) \cos(\alpha - \varphi)$$

und

$$\frac{r'(\alpha)}{r(\alpha)} = \frac{h'(\varphi)}{h(\varphi)} \quad \text{oder} \quad \frac{d \log |r|}{d\alpha} = \frac{d \log |h|}{d\varphi}$$

notwendig und hinreichend dafür, daß $\mathfrak{F}$ die Fußpunktkurve von $\mathfrak{C}$ ist. Aus diesen Gleichungen folgt aber:

$$\frac{1}{r(\alpha)} = \frac{1}{h(\varphi)} \cos(\varphi - \alpha) \tag{9}$$

und

$$\frac{d \log \frac{1}{|r|}}{d\alpha} = -\frac{d \log \frac{1}{|h|}}{d\varphi}, \tag{10}$$

d. h. die Kurve $\left(\alpha, \frac{1}{r}\right)$ ist die Fußpunktkurve von $\left(\varphi, \frac{1}{h}\right)$.

Geometrisch ist der Satz ebenso leicht einzusehen (Fig. 5). Zwei entsprechende Punkte C, F auf $\mathfrak{C}, \mathfrak{F}$ mögen bei der Spiegelung in $\overline{C}, \overline{F}$ übergehen. Die Gerade CF, die auf OF senkrecht steht, geht bei der Spiegelung über in einen Kreis durch O, der auf $O\overline{F}$ senkrecht steht, also $O\overline{F}$ zum Durchmesser hat. Da $\mathfrak{C}$ von den Geraden CF eingehüllt wurde, so wird $\overline{\mathfrak{C}}$ von den Kreisen über den Strecken $O\overline{F}$ eingehüllt, ist also Fußpunktkurve von $\overline{\mathfrak{F}}$. Entsprechend geht der Kreis CFO über in die Gerade $\overline{C}\overline{F}$, die auf $O\overline{C}$ senkrecht steht, und die Gesamtheit dieser Geraden hüllt die Kurve $\overline{\mathfrak{F}}$ ein. — Übrigens ergibt sich aus den ähnlichen Dreiecken OFC und $O\overline{C}\overline{F}$, daß $\overline{C}\overline{F} = \frac{r'}{r^2}$ ist, wie es sein muß, da ja diese Strecke nach 1. gleich $\frac{d\frac{1}{r}}{d\alpha}$ ist.

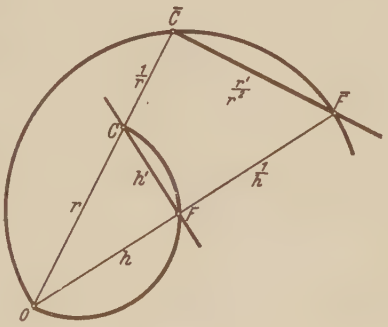

Fig. 5.

Bemerkung: Gibt es von O aus eine Tangente an $\mathfrak{C}$, so geht $\mathfrak{F}$ durch O hindurch, $\overline{\mathfrak{F}}$ läuft also ins Unendliche. Gibt es mehrere derartige Tangenten, so ist O ein Mehrfachpunkt von $\mathfrak{F}$, und $\overline{\mathfrak{F}}$ hat mehrere Äste, die ins Unendliche laufen.

§ 2.

Die Strebenendkurve.

1. Die Fußpunktkurve von $\mathfrak{C}$ besteht aus den Punkten F in denen die Lote von einem festen Punkt O auf die Tangenten (oder Stützgeraden) von $\mathfrak{C}$ diese Tangenten treffen. Wir wollen jetzt allgemeiner statt des

Lotes diejenige Gerade betrachten, die mit der Tangente einen bestimmten Winkel bildet und sie in einem Punkt S schneidet (Fig. 6). Der Bequemlichkeit halber bezeichnen wir nicht diesen Winkel, sondern den mit der Normalen auf der Tangente gebildeten Winkel mit ϑ. Um Eindeutigkeit zu erzielen, kann man etwa festsetzen, daß die Normale immer nach der Seite weisen soll, die den Punkt O enthält, und daß ϑ der Winkel ist, um den man die in S angebrachte Normale schwenken muß, damit sie nach O zeigt, wobei der Uhrzeigersinn der positive sein möge. Es ist dann $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < +\frac{\pi}{2}$. Die Strecke OS kann man als eine die Tangente stützende „Strebe" auffassen, und daher nennen wir den Radiusvektor k von S in Abhängigkeit von seinem Arcus ψ die *ϑ-Strebenfunktion* und den geometrischen Ort der Punkte S die *ϑ-Strebenendkurve* $\mathfrak{S}_\vartheta$ von $\mathfrak{C}$ bezüglich O[5]). Geht man umgekehrt von $\mathfrak{S}_\vartheta$ aus, so ist $\mathfrak{C}$ die Einhüllende der Geraden, die mit den Radien von $\mathfrak{S}_\vartheta$ den Winkel $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ bilden. — Die Fußpunktkurve entspricht dem Fall $\vartheta = 0$.

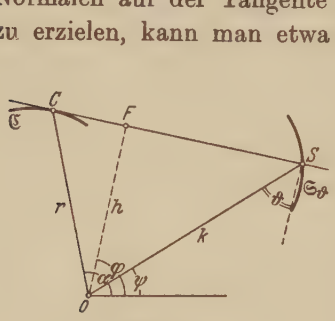

Fig. 6.

Zwischen den Polarkoordinaten ψ, k von S und den Polarkoordinaten φ, h von F bestehen die Beziehungen

$$h = k \cos\vartheta, \qquad \varphi = \psi + \vartheta, \tag{11}$$

und die Gleichung (2) verwandelt sich in folgende Relation zwischen S und C:

$$k(\psi) \cos\vartheta = r(\alpha) \cos(\alpha - \psi - \vartheta). \tag{12}$$

Bei festem (ψ, k) und variablem (α, r) ist das die Gleichung einer Geraden, nämlich SF, bei festem (α, r) und variablem (ψ, k) die Gleichung eines Kreises, nämlich des Kreises durch S über OC als Sehne, der den Winkel $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ als festen Peripheriewinkel faßt. — $\mathfrak{C}$ kann als *Einhüllende der Geraden*, die mit den Radien von $\mathfrak{S}_\vartheta$ den Winkel $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ bilden, und $\mathfrak{S}_\vartheta$ als *Einhüllende der Kreise* über den Radien von $\mathfrak{C}$, die den Peripheriewinkel $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ fassen, erzeugt werden.

2. Da

$$\frac{dh}{d\varphi} = \cos\vartheta \frac{dk}{d\psi}$$

[5]) Auf die Notwendigkeit, diese Begriffe einzuführen, wie überhaupt auf die Resultate dieser Arbeit bin ich durch gewisse funktionentheoretische Untersuchungen geleitet worden, die ich an anderer Stelle veröffentlichen werde.

ist, so entspricht der Gleichung (6) hier die folgende:

$$\frac{r'(\alpha)}{r(\alpha)} = \frac{k'(\psi)}{k(\psi)}. \tag{13}$$

Sie ist, von den Ausnahmestellen $\frac{d\alpha}{d\psi} = 0$ oder 1 abgesehen, zusammen mit (12) notwendig und hinreichend dafür, daß (ψ, k) die ϑ-Strebenendkurve von (α, r) ist. — Die Beziehung (13) ist analog zu § 1, 5 auch elementargeometrisch einzusehen (Fig. 7), denn nach (1) ist $\frac{r'(\alpha)}{r(\alpha)}$ der Tangens des Winkels zwischen der Kurve $\mathfrak{C}$, d. h. der Geraden SC und der Radiusnormalen in C, während $\frac{k'(\psi)}{k(\psi)}$ der Tangens des Winkels zwischen der Kurve $\mathfrak{S}_\vartheta$, d. h. dem Kreise SCO und der Radiusnormalen in S ist. Die beiden Radiusnormalen treffen sich aber in dem dem Punkte O diametral gegenüberliegenden Punkt D des Kreises, und der zuerst genannte Winkel ist gleich dem Winkel SCD, der als Peripheriewinkel über SD gleich dem zu zweit genannten Winkel zwischen Sehne und Tangente ist.

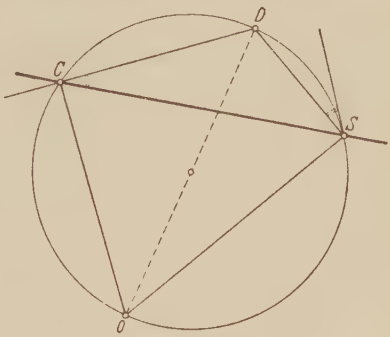

Fig. 7.

3. Wir wenden nun analog zu § 1, 7 auf unsere Konfiguration die Transformation durch reziproke Radien an und erhalten

Satz 4. *Spiegelt man eine Kurve $\mathfrak{C}$ und ihre ϑ-Strebenendkurve $\mathfrak{S}_\vartheta$ bezüglich O an einem Kreis um O, wobei sie in die Kurven $\overline{\mathfrak{C}}$ und $\overline{\mathfrak{S}}_\vartheta$ übergehen, so ist $\overline{C}$ die $-\vartheta$-Strebenendkurve von $\overline{\mathfrak{S}}_\vartheta$.*

Beweis: Mit (12) und (13) gilt auch

$$\frac{1}{r(\alpha)} \cos(-\vartheta) = \frac{1}{k(\psi)} \cos(\psi - \alpha + \vartheta) \tag{14}$$

und

$$d\frac{1}{|r|} = d\frac{1}{|k|}. \tag{15}$$

§ 3.

Die Fußpunkt- und Strebenendkurven von konvexen Kurven.

1. Fußpunktkurve.

Wir erinnern zunächst an folgende Hilfssätze:

Hilfssatz 1. *Eine eindeutige, positive Funktion $r = r(\alpha)$ mit der Periode 2π stellt dann und nur dann in Polarkoordinaten eine geschlossene*

konvexe Kurve $\mathfrak{K}$ mit O im Innern dar, wenn für jedes Tripel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ mit

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3, \qquad \alpha_2 - \alpha_1 < \pi, \qquad \alpha_3 - \alpha_2 < \pi, \qquad \alpha_3 - \alpha_1 < \pi$$

folgendes gilt:

$$(16)\quad \begin{vmatrix} \frac{1}{r(\alpha_1)} & \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ \frac{1}{r(\alpha_2)} & \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 \\ \frac{1}{r(\alpha_3)} & \cos\alpha_3 & \sin\alpha_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{r(\alpha_3)}\sin(\alpha_2-\alpha_1) + \frac{1}{r(\alpha_1)}\sin(\alpha_3-\alpha_2) + \frac{1}{r(\alpha_2)}\sin(\alpha_1-\alpha_3) \geqq 0.$$

Beweis: $\mathfrak{K}$ ist dann und nur dann konvex, wenn jedes einem solchen Tripel entsprechende Dreieck positiven Flächeninhalt hat, d. h.

$$\begin{vmatrix} 1 & r(\alpha_1)\cos\alpha_1 & r(\alpha_1)\sin\alpha_1 \\ 1 & r(\alpha_2)\cos\alpha_2 & r(\alpha_2)\sin\alpha_2 \\ 1 & r(\alpha_3)\cos\alpha_3 & r(\alpha_3)\sin\alpha_3 \end{vmatrix} \geqq 0.$$

Nach Division durch die positive Größe $r(\alpha_1)\, r(\alpha_2)\, r(\alpha_3)$ steht die Behauptung da.

Bemerkung: Die Ungleichung ist auch richtig, jedoch trivial, wenn $\alpha_2 - \alpha_1 < \pi$, $\alpha_3 - \alpha_2 < \pi$, aber $2\pi > \alpha_3 - \alpha_1 \geqq \pi$ ist, denn dann sind alle drei Summanden positiv.

Hilfssatz 2[6]): *Eine eindeutige Funktion $h = h(\varphi)$ mit der Periode 2π stellt dann und nur dann die Stützfunktion eines konvexen Bereiches dar, wenn für jedes Tripel $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ mit*

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3, \qquad \varphi_2 - \varphi_1 < \pi, \qquad \varphi_3 - \varphi_2 < \pi$$

folgendes gilt:

$$(17)\quad \begin{vmatrix} h(\varphi_1) & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ h(\varphi_2) & \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \\ h(\varphi_3) & \cos\varphi_3 & \sin\varphi_3 \end{vmatrix} = h(\varphi_3)\sin(\varphi_2-\varphi_1) + h(\varphi_1)\sin(\varphi_3-\varphi_2) + h(\varphi_2)\sin(\varphi_1-\varphi_3) \geqq 0.$$

Wir behaupten nun

Satz 5. *$\mathfrak{K}$ sei eine geschlossene konvexe Kurve, $\mathfrak{F}$ ihre Fußpunktkurve bezüglich eines im Innern liegenden Punktes O. Gehen durch Spiegelung an einem Kreis um O die Kurven $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{F}$ in $\overline{\mathfrak{K}}$ und $\overline{\mathfrak{F}}$ über, so ist $\overline{\mathfrak{F}}$ eine konvexe Kurve und $\overline{\mathfrak{K}}$ ihre Fußpunktkurve.*

---

[6]) Zuerst ohne Beweis ausgesprochen von W. Blaschke, Beweise zu Sätzen von Brunn und Minkowski über die Minimaleigenschaft des Kreises. Jahresber. D M V 23 (1914), S. 210—234 [S. 222, Fußnote]. Daß die Ungleichung (17) mit den von Minkowski bewiesenen charakteristischen Eigenschaften der Stützfunktion völlig äquivalent ist, wurde von H. Rademacher, Über eine funktionale Ungleichung in der Theorie der konvexen Körper. Math. Zeitschr. 13 (1922), S. 18—27, gezeigt.

Bemerkung: Die Tatsache, daß $\overline{\mathfrak{F}}$ konvex ist, wurde bereits von Minkowski[7]) unter anderer Gestalt ausgesprochen. Er zeigte, daß durch die Polarenverwandschaft in bezug auf einen Kreis um O die Stützgeraden von $\mathfrak{K}$ in die Randpunkte eines konvexen Bereichs, des von ihm so genannten „polaren Körpers" übergehen. Diese Polarität führt aber eine Stützgerade offenbar in denselben Punkt über wie die Transformation durch reziproke Radien den auf ihr liegenden Fußpunkt. — Daß gleichzeitig die ursprüngliche konvexe Kurve in die Fußpunktkurve der polaren Kurve übergeht, scheint früher nicht erkannt worden zu sein[8]).

Beweis: Zunächst sei bemerkt, daß, wenn O im Innern von $\mathfrak{K}$ liegt, die Stützfunktion positiv ist. — Für die die konvexe Kurve $\mathfrak{K}$ darstellende Funktion $r(\alpha)$ gilt die Ungleichung (16); diese kann aber vermöge (17) so interpretiert werden: $\frac{1}{r(\alpha)}$ ist eine Stützfunktion, also $\overline{\mathfrak{K}}$ die Fußpunktkurve einer konvexen Kurve $\mathfrak{K}^*$. Ferner gilt für die die Fußpunktkurve darstellende Funktion $h(\varphi)$ die Ungleichung (17); diese kann aber, indem man $h(\varphi) = \frac{1}{\frac{1}{h(\varphi)}}$ setzt, vermöge (16) so interpretiert werden: $\frac{1}{h(\varphi)}$ stellt eine konvexe Kurve $\overline{\mathfrak{F}}$ dar. Daß schließlich $\overline{\mathfrak{F}}$ und $\overline{\mathfrak{K}}$ gerade zusammen gehören, d. h. daß $\mathfrak{K}^* = \overline{\mathfrak{F}}$ ist, folgt aus unserem allgemeinen Satz 3.

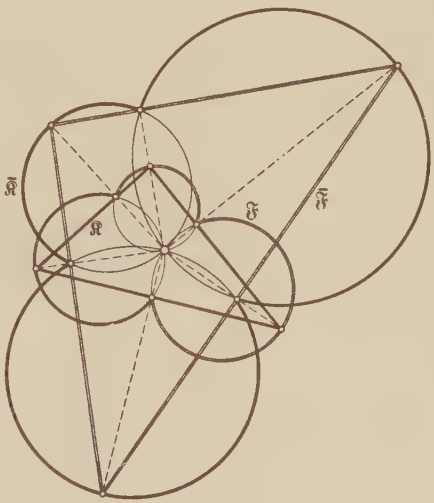

Fig. 8.

Man kann den Satz 5 auch ohne die Hilfssätze 1 und 2 beweisen, indem man seine Richtigkeit zunächst für konvexe geradlinige *Polygone* zeigt, wo er, wie man an Fig. 8 abliest, fast unmittelbar evident ist, und dann eine beliebige konvexe Kurve in bekannter Weise als Grenze von konvexen Polygonen auffaßt.

Diese Beweismethode bietet den Vorteil, daß man sich mit ihr am leichtesten von der Einschränkung befreien kann, daß O im *Innern* der

[7]) H. Minkowski, Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs. Ges. Abh. 2, S. 131—229 [§ 8].

[8]) Ich habe auf den betreffenden Zusammenhang schon einmal gelegentlich einer funktionentheoretischen Betrachtung hingewiesen: Über eine Integraldarstellung von meromorphen Funktionen. Sitz.-Ber. Bayr. Akad. 1931, S. 1—16 [S. 12].

konvexen Kurve liegen soll[9]), was bei analytischer Behandlung umständliche Vorzeichenbestimmungen nötig macht. Liegt O außerhalb $\mathfrak{K}$, so gibt es zwei Stützgeraden durch O; für beide ist O auch Fußpunkt. Daher läuft die Fußpunktkurve $\mathfrak{F}$ durch O und hat hier einen Doppelpunkt, der bei Transformation durch reziproke Radien in den unendlich fernen Punkt übergeht. Wie man an Hand eines konvexen Polygons (vgl. Fig. 9) feststellt, gilt nun hier

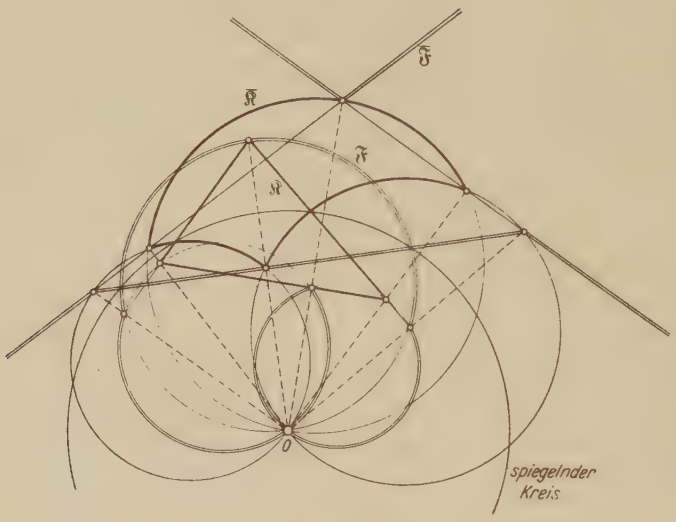

Fig. 9.

Satz 6. *$\mathfrak{K}$ sei eine geschlossene konvexe Kurve, $\mathfrak{F}$ ihre Fußpunktkurve bezüglich eines im Äußeren liegenden Punktes O. Durch Spiegelung an einem Kreis um O geht $\mathfrak{F}$ in zwei getrennte, ins Unendliche laufende Kurven über, die im Unendlichen zusammenhängen und einzeln für sich genommen konvex sind, während $\mathfrak{K}$ in die Summe der Fußpunktkurven dieser beiden konvexen Kurven übergeführt wird.*

Sind die Sätze 5 und 6 auf diese Art bewiesen, so kann man mit ihrer Hilfe den ziemlich überraschenden Blaschkeschen Hilfssatz 2 als Korollar des fast selbstverständlichen Hilfssatzes 1 ableiten. Denn wenn $h(\varphi)$ eine Stützfunktion ist, so muß $\frac{1}{h(\varphi)}$ eine bzw. zwei konvexe Kurven darstellen, also die Ungleichung (16) erfüllen. — Ferner sieht man jetzt sehr leicht, daß Hilfssatz 2 sich nicht auf höhere Dimensionen verallgemeinern läßt, was bereits Rademacher[10]) bemerkt hat. Schreibt man ihn

[9]) In der unter [7]) erwähnten Untersuchung von Minkowski wird nur dieser Fall ins Auge gefaßt.

[10]) l. c. [6]). Hier wird gezeigt, daß die Verallgemeinerung für den Raum nur von der Stützfunktion der Kugel erfüllt wird.

in der Gestalt: $h(\varphi)$ *ist dann und nur dann eine Stützfunktion, wenn für je drei Werte* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ *gilt:*

$$\begin{vmatrix} h(\varphi_1) & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ h(\varphi_2) & \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \\ h(\varphi_3) & \cos\varphi_3 & \sin\varphi_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ 1 & \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \\ 1 & \cos\varphi_3 & \sin\varphi_3 \end{vmatrix} \geqq 0,$$

so könnte man vermuten, daß z. B. im Raum eine Stützfunktion stets durch die Ungleichung (in leichtverständlicher Bezeichnung)

$$(18)\quad \begin{vmatrix} h(u_1,u_2,u_3)\ u_1\ u_2\ u_3 \\ h(v_1,v_2,v_3)\ v_1\ v_2\ v_3 \\ h(w_1,w_2,w_3)\ w_1\ w_2\ w_3 \\ h(x_1,x_2,x_3)\ x_1\ x_2\ x_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1\ u_1\ u_2\ u_3 \\ 1\ v_1\ v_2\ v_3 \\ 1\ w_1\ w_2\ w_3 \\ 1\ x_1\ x_2\ x_3 \end{vmatrix} \geqq 0 \text{ mit } \begin{matrix} u_1^2+u_2^2+u_3^2=1 \\ v_1^2+v_2^2+v_3^2=1 \\ w_1^2+w_2^2+w_3^2=1 \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=1 \end{matrix}$$

charakterisiert wäre. Dann müßte sich aber, da der Satz 5 auch im Raum sinngemäß gilt (wir beschränken uns auf den Fall, daß h positiv ist), jede konvexe Fläche $\mathfrak{k}$ mit O im Innern durch

$$(19)\quad \begin{vmatrix} \frac{1}{r(u_1,u_2,u_3)}\ u_1\ u_2\ u_3 \\ \frac{1}{r(v_1,v_2,v_3)}\ v_1\ v_2\ v_3 \\ \frac{1}{r(w_1,w_2,w_3)}\ w_1\ w_2\ w_3 \\ \frac{1}{r(x_1,x_2,x_3)}\ x_1\ x_2\ x_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1\ u_1\ u_2\ u_3 \\ 1\ v_1\ v_2\ v_3 \\ 1\ w_1\ w_2\ w_3 \\ 1\ x_1\ x_2\ x_3 \end{vmatrix} \geqq 0 \text{ mit } \begin{matrix} u_1^2+u_2^2+u_3^2=1 \\ v_1^2+v_2^2+v_3^2=1 \\ w_1^2+w_2^2+w_3^2=1 \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=1 \end{matrix}$$

charakterisieren lassen. Das ist aber nicht der Fall. Denn (19) besagt, daß die von den vier Vektoren $\mathfrak{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathfrak{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathfrak{w} = (w_1, w_2, w_3)$, $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, x_3)$ auf der Fläche $\mathfrak{k}$ ausgestoßenen Punkte ein Tetraeder mit positivem (negativem) Inhalt bestimmen, wenn die von ihnen auf der Einheitskugel ausgestoßenen Punkte ein Tetraeder mit positivem (negativem) Inhalt bestimmen. Hat daher das Tetraeder in der Einheitskugel den Inhalt 0, so muß wegen der Stetigkeit auch das in der Fläche $\mathfrak{k}$ den Inhalt 0 haben, d. h. bei beiden liegen die vier Punkte zugleich in einer Ebene. Denkt man sich nun $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ fest und $\mathfrak{x}$ variierend, so liegen die vier Punkte auf der Einheitskugel dann und nur dann in einer Ebene, wenn der Endpunkt von $\mathfrak{x}$ den durch die Endpunkte von $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ bestimmten Kreis durchläuft. $\mathfrak{x}$ beschreibt also einen geraden Kreiskegel. Dessen Mantellinien müssen nun aus $\mathfrak{k}$ lauter Punkte ausstoßen, die in einer Ebene liegen (nämlich in der durch die Durchstoßpunkte von $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ bestimmten Ebene), d. h. der Schnitt von $\mathfrak{k}$ mit jedem geraden Kreiskegel aus O muß eine ebene Kurve und zwar eine Ellipse sein (weil es auf dem Kegel keine anderen ebenen beschränkten

Kurven gibt). $\mathfrak{k}$ ist also eine ganz spezielle Fläche. Aus dem Ergebnis von Rademacher kann man schließen, daß es diejenige konvexe Fläche ist, deren „Fußpunktfläche" von einer Kugel gebildet wird.

2. Strebenendkurve.

Hilfssatz 3. *Eine eindeutige Funktion $k(\psi)$ mit der Periode 2π stellt dann und nur dann eine ϑ-Strebenfunktion eines konvexen Bereiches dar, wenn für jedes Tripel ψ_1, ψ_2, ψ_3 mit*

$$\psi_1 < \psi_2 < \psi_3, \qquad \psi_2 - \psi_1 < \pi, \qquad \psi_3 - \psi_2 < \pi$$

gilt:

$$(20)\quad \begin{vmatrix} k(\psi_1) & \cos\psi_1 & \sin\psi_1 \\ k(\psi_2) & \cos\psi_2 & \sin\psi_2 \\ k(\psi_3) & \cos\psi_3 & \sin\psi_3 \end{vmatrix} = k(\psi_3)\sin(\psi_2-\psi_1) + k(\psi_1)\sin(\psi_3-\psi_2) + k(\psi_2)\sin(\psi_1-\psi_3) \geqq 0.$$

Beweis: (ψ, k) ist dann und nur dann ϑ-Strebenfunktion, wenn $(\psi+\vartheta,\ k\cos\vartheta)$ Stützfunktion ist. (20) folgt also $\left(\text{wegen } -\frac{\pi}{2} < \vartheta < +\frac{\pi}{2},\ \cos\vartheta > 0\right)$ sofort aus (17).

Da (20) von ϑ unabhängig ist, so ergibt sich das

Korollar. *Jede Stützfunktion eines konvexen Bereichs ist zugleich ϑ-Strebenfunktion $\left(\vartheta \text{ beliebig zwischen } -\frac{\pi}{2} \text{ und } +\frac{\pi}{2}\right)$ eines anderen konvexen Bereichs; und jede ϑ-Strebenfunktion eines konvexen Bereichs ist zugleich ϑ'-Strebenfunktion $\left(\vartheta' \text{ beliebig zwischen } -\frac{\pi}{2} \text{ und } +\frac{\pi}{2}\right)$ eines anderen konvexen Bereichs.*

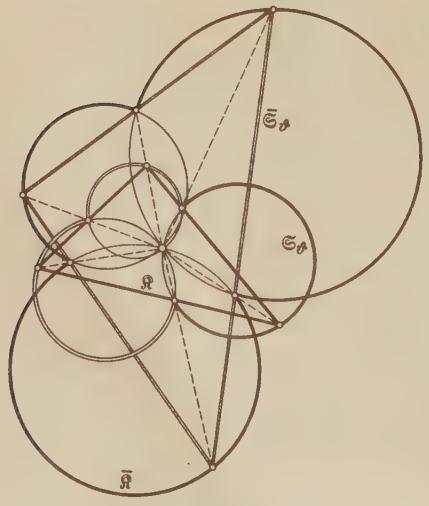

Fig. 10.

Den Sätzen 5 und 6 entsprechen hier nun die folgenden:

Satz 7. *$\mathfrak{K}$ sei eine geschlossene konvexe Kurve, $\mathfrak{S}_\vartheta$ ihre ϑ-Strebenendkurve bezüglich eines im Innern liegenden Punktes O. Durch Spiegelung an einem Kreis um O geht $\mathfrak{S}_\vartheta$ in eine konvexe Kurve, $\mathfrak{K}$ in deren — ϑ-Strebenendkurve über.*

Der Beweis ergibt sich analog zum Beweis des Satzes 5 aus Hilfssatz 1 und 3 sowie aus Satz 4. Ein Beispiel siehe in Fig. 10.

Satz 8. *Liegt O außerhalb $\mathfrak{K}$, so geht bei Spiegelung an einem Kreis um O die Kurve $\mathfrak{S}_\vartheta$ in zwei ins Unendliche laufende Kurven über, die im Unendlichen zusammenhängen und einzeln für sich genommen konvex sind. $\mathfrak{K}$ geht in die Summe ihrer $-\vartheta$-Strebenendkurven über.*

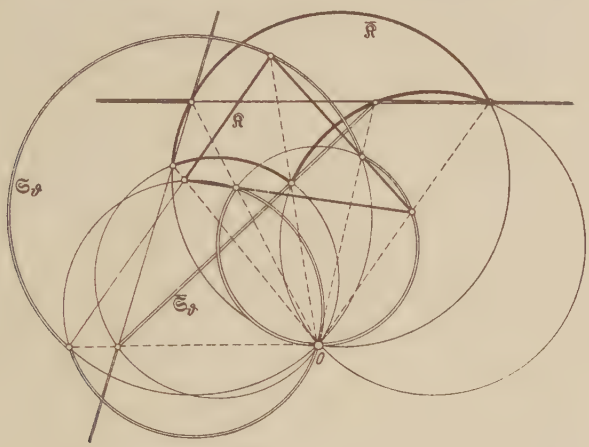

Fig. 11.

Der Satz ergibt sich für konvexe Polygone durch elementargeometrische Betrachtung (siehe Fig. 11), von da aus überträgt er sich auf beliebige konvexe Kurven.

Bemerkung: Da also jede Fußpunkt- und Strebenendkurve vermittels Kreisspiegelung aus einer konvexen Kurve erhalten werden kann und eine solche an jeder Stelle eine Tangente nach rechts und eine nach links besitzt (die sogar außer an abzählbar vielen Stellen zusammenfallen), so gilt dasselbe für jede Fußpunkt- und Strebenendkurve. *Jede Stütz- und Strebenfunktion einer konvexen Kurve ist also überall nach rechts und links differenzierbar.*

§ 4.

Kinematische Erzeugung der Kurven. Verallgemeinerte Fluchtpunktschiene.

1. Die Fußpunktkurve einer konvexen Kurve $\mathfrak{K}$ in bezug auf einen Pol O kann man kinematisch sehr einfach erzeugen: Man läßt einen Rechtwinkelhaken mit dem einen Schenkel an $\mathfrak{K}$, mit dem anderen an O gleiten und verfolgt den Weg des Scheitels F. Analog erhält man die ϑ-Strebenendkurve $\mathfrak{S}_\vartheta$, indem man einen Winkelhaken von der Öffnung $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ verwendet. Man kann aber $\mathfrak{S}_\vartheta$ auch gleichzeitig mit $\mathfrak{F}$ erhalten, indem man noch einen um O drehbaren Stab anbringt, der sich

an den längs O gleitenden Schenkel unter dem konstanten Winkel ϑ anlegt. Er schneidet auf dem anderen Schenkel des Rechtwinkelhakens, d. h. auf der Stützgeraden die Punkte von $\mathfrak{S}_\vartheta$ aus (Fig. 12). Da jeder Punkt der Stützgeraden in jedem Augenblick der Bewegung einem bestimmten $\mathfrak{S}_\vartheta$ angehört und die Stützgeraden das ganze Äußere von $\mathfrak{K}$ zweifach überdecken, so *überdeckt auch die Gesamtheit aller Strebenendkurven das Äußere von $\mathfrak{K}$ doppelt.*

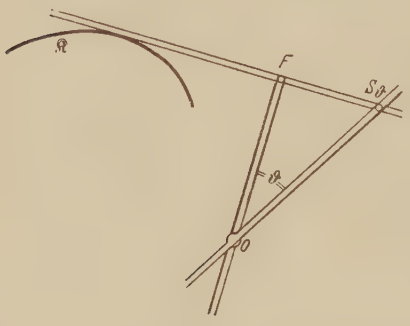

Fig. 12.

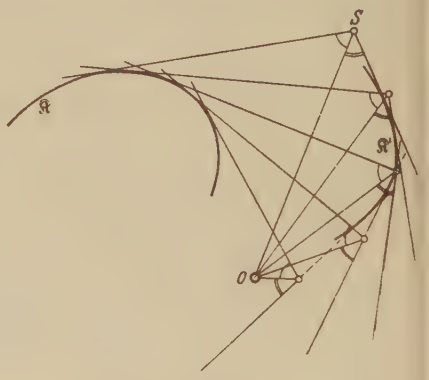

Fig. 13.

2. Nach dem Korollar in § 3, 2 ist die ϑ-Strebenendkurve $\mathfrak{S}_\vartheta$ von $\mathfrak{K}$ gleichzeitig auch die ϑ'-Strebenendkurve $\mathfrak{S}_{\vartheta'}$ einer anderen konvexen Kurve $\mathfrak{K}'$. Bewegt sich also der zur Erzeugung von $\mathfrak{S}_\vartheta$ verwendete Winkelhaken, so *umhüllt jeder starr mit ihm im Scheitel verbundene dritte Schenkel ebenfalls eine konvexe Kurve $\mathfrak{K}'$* (Fig. 13). Man kann das auch so ausdrücken: Gleiten zwei von den drei Schenkeln an den konvexen Kurven $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$, so geht der dritte stets durch O. Damit hat man eine Verallgemeinerung der bekannten Wirkungsweise der in der Perspektive benutzten *Fluchtpunktschiene:* Schrumpft nämlich $\mathfrak{K}$ auf einen Punkt K zusammen,

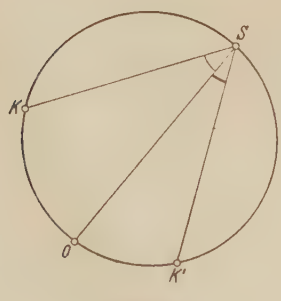

Fig. 14.

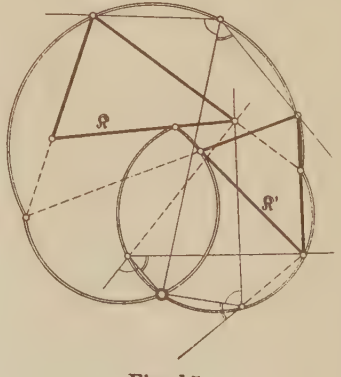

Fig. 15.

so ist $\mathfrak{S}_\vartheta$ ein Kreis durch K und O, der den Winkel $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ als Peripheriewinkel faßt; der dritte Schenkel geht offenbar stets durch denselben Punkt K' dieses Kreises, so daß $\mathfrak{K}'$ sich auf diesen Punkt K' reduziert (Fig. 14). Darauf beruht die übliche Verwendung der Fluchtpunktschiene: Läßt man zwei Schenkel der Schiene an festen *Punkten* gleiten, so geht der dritte stets durch einen festen Punkt, den „Fluchtpunkt" hindurch. Unser obiges Ergebnis besagt, daß man denselben Effekt erreichen kann, indem man zwei der Schienen an passend zueinander gewählten *konvexen Kurven* gleiten läßt[11]). In Fig. 15 ist das für den Fall, daß $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ Dreiecke sind, dargestellt. Allgemein müssen die beiden Kurven $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ je eine Strebenendkurve besitzen, die untereinander kongruent sind.

[11]) Das könnte auch technisch gelegentlich von Bedeutung werden. Bei der gewöhnlichen Verwendungsart der Fluchtpunktschiene realisiert man die Punkte K und K' durch zwei kleine Zylinder und setzt die gleitenden Backen der Schiene um den Betrag des Radius zurück.

(Eingegangen am 18. Mai 1936.)

Ein Satz über geschlossene Vektorpolygone des Hilbertschen Raumes.

Von

Hugo Hadwiger in Bern.

Einleitende Bemerkungen.

Wir betrachten eine endliche Nullsumme

$$\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 + \ldots + \mathfrak{v}_N = 0$$

s-dimensionaler Vektoren $\mathfrak{v}$, deren Absolutbeträge noch der Einschränkung

$$|\mathfrak{v}_\nu| \leqq 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N);$$

unterworfen sein sollen.

Es bezeichne 0 den Ursprung des s-dimensionalen Raumes R_s. Indem man $\mathfrak{v}_1$ bei 0 beginnen läßt, und die folgenden $\mathfrak{v}$ in der angegebenen Reihenfolge addiert, entsteht ein geschlossenes Vektorpolygon.

Die kleinste Kugel um 0, welche das Polygon noch ganz enthält, nennen wir *Hüllkugel* des Polygons.

Da sich das Polygon bei Änderung der Reihenfolge der Vektoren in der Summe gestaltlich verändert, ist die Größe dieser Hüllkugel von der Anordnung abhängig.

Die kleinste in Betracht fallende Hüllkugel sei K_0 (*Minimale H-Kugel*). Ihren Radius bezeichnen wir mit ϱ_0.

V. Bergström[1]) zeigte, daß

$$\varrho_0 \leqq \sqrt{\frac{4^s - 1}{3}}\,^{2}),$$

das heißt, daß sich immer eine Anordnung so finden läßt, daß das Polygon ganz im Innern einer Kugel vom Radius

$$\sqrt{\frac{4^s - 1}{3}}$$

Platz findet.

Das Wesentliche dieser Aussage besteht darin, daß die angegebene Schranke nur von der Dimension s und nicht von der Anzahl N der Vektoren abhängt.

[1]) Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 8. Bd., 1931: Ein neuer Beweis eines Satzes von E. Steinitz, S. 148—152; Zwei Sätze über ebene Vektorpolygone, S. 206—214.

[2]) Die vorliegende Schranke nimmt im Falle $s = 2$ den Wert $\sqrt{5}$ an. Die genaue Schranke ist jedoch $\sqrt{\frac{5}{4}}$, wie V. Bergström in der zweiten der unter [1]) zitierten Arbeiten beweist.

Die vorliegende Arbeit behandelt nun das Problem der minimalen Hüllkugel von gerade entgegengesetztem Standpunkte aus: Es soll eine Schranke für ϱ_0 gefunden werden, welche von der Anzahl N der Vektoren, aber nicht von der Dimension abhängt.

Um die in diesem Falle mögliche Verwertung des Satzes für Funktionen usw. zu sichern, wird der Satz direkt für Vektoren des Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$ ausgesprochen.

Dabei wird für eine Nullsumme von Elementen aus $\mathfrak{H}$ die anschauliche Bezeichnung „geschlossenes Polygon" festgehalten.

Bei Formulierung und Beweis wird direkt auf eine den Hilbertschen Raum charakterisierende Postulatgruppe, so wie sie etwa von J. von Neumann[3]) angegeben wird, Bezug genommen.

Formulierung des Satzes.

Der (abstrakte) Hilbertsche Raum $\mathfrak{H}$ kann durch fünf Postulate A., B., C., D., E. eindeutig gekennzeichnet werden, von denen wir im folgenden nur die ersten drei angeben und später benutzen werden.

A. *$\mathfrak{H}$ ist ein linearer Raum*, d. h. in $\mathfrak{H}$ ist eine Addition $f+g$ und eine skalare Multiplikation af definiert, [f, g Elemente von $\mathfrak{H}$, a eine komplexe Zahl, $f+g$ und af gehören wieder zu $\mathfrak{H}$].

Ferner gibt es ein Element 0.

Für diese gelten die Rechenregeln der Vektoralgebra.

Definition: Die Elemente $f_1, f_2, \ldots, f_k$ heißen linear unabhängig, wenn aus $a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_k f_k = 0$ folgt $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$.

B. *In $\mathfrak{H}$ ist ein Hermitesches inneres Produkt definiert*, d. h. es gibt ein Symbol (f, g) [f, g in $\mathfrak{H}$, (f, g) eine komplexe Zahl] von folgender Beschaffenheit:

1. $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$,
2. $(af, g) = a(f, g)$,
3. $(f, g) = \overline{(g, f)}$,
4. $(f, f) \begin{cases} > 0, & f \neq 0, \\ = 0, & f = 0. \end{cases}$

Definitionen: a) Unter dem Betrag von f verstehen wir die positive Zahl $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$,

b) f heißt normiert, falls $\sqrt{(f, f)} = \|f\| = 1$ ist,

c) f und g heißen orthogonal, falls $(f, g) = 0$ ist.

C. *Es gibt in $\mathfrak{H}$ beliebig viele linear unabhängige Elemente.*

---

[3]) Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin: J. Springer (1932), S. 18.

Wir schreiten nun zur Formulierung des Satzes.

Voraussetzungen: Die N-Vektoren

$$g_1, g_2, g_3, \ldots, g_N$$

von $\mathfrak{H}$ bilden ein geschlossenes Vektorpolygon

1. $$g_1 + g_2 + g_3 + \ldots + g_N = 0,$$

ferner sei

2. $$\|g_\nu\| \leqq 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N),$$

3. ϱ_0 sei der Radius der minimalen Hüllkugel, genauer:

Ist $g_1' + g_2' + g_3' + \ldots + g_N' = 0$ irgendeine Anordnung der Vektoren in der Summe 1., so ist das Maximum der Zahlen

$$\begin{aligned} s_1 &= \|g_1'\|, \\ s_2 &= \|g_1' + g_2'\|, \\ s_3 &= \|g_1' + g_2' + g_3'\|, \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \\ s_N &= \|g_1' + g_2' + g_3' + \ldots + g_N'\| \end{aligned}$$

$= \varrho =$ Radius der Hüllkugel des Polygons das dieser Anordnung entspricht. Die kleinste Hüllkugel, die unter allen $N!$ Anordnungen festzustellen ist, nennen wir minimale Hüllkugel K_0.

Behauptung:

I. $$\varrho_0 \leqq \sqrt{\frac{\left[\frac{N}{2}\right]\left(N - \left[\frac{N}{2}\right]\right)}{N-1}}\ ,$$ [4])

d. h.: Es gibt immer eine Anordnung der Vektoren, so daß das Polygon ganz im Innern der Kugel vom Radius

$$\sqrt{\frac{\left[\frac{N}{2}\right]\left(N - \left[\frac{N}{2}\right]\right)}{N-1}}$$

Platz findet.

II. Die angegebene Schranke für ϱ_0 ist genau, d. h. es gibt zu jedem N Polygone, so daß

$$\varrho_0 = \sqrt{\frac{\left[\frac{N}{2}\right]\left(N - \left[\frac{N}{2}\right]\right)}{N-1}}$$

wird.

Beweise: Es sei $k \geqq 2$

$$\begin{gathered} G + g_1 + g_2 + \ldots + g_k = 0 \\ \|G\| \leqq M, \\ \|g_\nu\| \leqq 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k). \end{gathered}$$

[4]) [a] bezeichne die größte ganze Zahl die in a enthalten ist, Gaußsche Klammer.

Es gibt dann unter den Vektoren

$$g_1,\ g_2,\ g_3,\ \ldots,\ g_k$$

sicher einen g^*,

so daß

A. $$\|G+g^*\|^2 \leqq 1+M^2\left(1-\frac{2}{k}\right)$$

ausfällt.

Denn bilden wir

$$(G,\ g_1+g_2+g_3+\ldots+g_k)=(G,\ -G)=-\|G\|^2,$$

also

$$(G,\ g_1)+(G,\ g_2)+\ldots+(G,\ g_k)=-\|G\|^2,$$

ebenso

$$\overline{(G,\ g_1)}+\overline{(G,\ g_2)}+\ldots+\overline{(G,\ g_k)}=-\|G\|^2,$$

und setzen wir noch

$$\Theta_\nu=\frac{(G,\ g_\nu)+\overline{(G,\ g_\nu)}}{2}, \qquad (\Theta_\nu \text{ reell})$$

so ist

$$\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3+\ldots+\Theta_k=-\|G\|^2.$$

Nicht alle Θ können größer sein als $-\frac{\|G\|^2}{k}$. Es gibt also ein Θ^*, so daß

$$\Theta^* \leqq -\frac{1}{k}\|G\|^2, \qquad \Theta^*=\frac{(G,\ g^*)+\overline{(G,\ g^*)}}{2}.$$

Wir bilden jetzt

$$\begin{aligned}\|G+g^*\|^2 &= \|G\|^2+\|g^*\|^2+(G,\ g^*)+(g^*,\ G)\\ &= \|G\|^2+\|g^*\|^2+2\Theta^*,\end{aligned}$$

$$\|G+g^*\|^2 \leqq \|G\|^2+\|g^*\|^2-\frac{2}{k}\|G\|^2$$

und nach den Voraussetzungen

$$\|G+g^*\|^2 \leqq 1+M^2\left(1-\frac{2}{k}\right).$$

Damit ist A. bewiesen.

Aus den Vektoren

$$g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_N$$

wähle man nun g_1' beliebig

$$\|g_1'\|^2 \leqq 1=\alpha_1,$$

dann kann nach der oben angestellten Hilfsbetrachtung aus den $N-1$ übrigen Vektoren sicher ein g_2' so ausgewählt werden, daß

$$\|g_1'+g_2'\|^2 \leqq 1+\left(1-\frac{2}{N-1}\right)\alpha_1=\alpha_2,$$

und dann g_3', so daß

$$\|g_1' + g_2' + g_3'\|^2 \leqq 1 + \left(1 - \frac{2}{N-2}\right)\alpha_2 = \alpha_3,$$
$$\vdots$$
$$\|g_1' + g_2' + g_3' + \ldots + g_\lambda'\|^2 \leqq 1 + \left(1 - \frac{2}{N-\lambda+1}\right)\alpha_{\lambda-1} = \alpha_\lambda,$$
$$1 \leqq \lambda \leqq N-1.$$

Wir konstruieren jetzt die Zahlenfolge

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_{N-1}\ \alpha_N$$

durch die Rekursion

$$\alpha_1 = 1,$$
$$\alpha_{\lambda+1} = 1 + \left(1 - \frac{2}{N-\lambda}\right)\alpha_\lambda, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, N-1,$$

und gewinnen

$$\alpha_1 = 1,$$
$$\alpha_2 = \frac{2(N-2)}{N-1},$$
$$\alpha_3 = \frac{3(N-3)}{N-1},$$
$$\vdots$$
$$\alpha_\lambda = \frac{\lambda(N-\lambda)}{N-1}.$$

Es wird also

$$\|g_1' + g_2' + \ldots + g_\lambda'\|^2 \leqq \frac{\lambda(N-\lambda)}{N-1} \leqq \frac{\left[\frac{N}{2}\right]\left(N - \left[\frac{N}{2}\right]\right)}{N-1},$$

also

$$\|g_1' + g_2' + \ldots + g_\lambda'\| \leqq \sqrt{\frac{\left[\frac{N}{2}\right]\left(N - \left[\frac{N}{2}\right]\right)}{N-1}},$$

für alle $\lambda = 1, 2, 3, \ldots, N$.

Der Radius der Hüllkugel bei dieser speziell konstruierten Anordnung kann nicht größer sein als die rechtsstehende Schranke.

Umsomehr muß dies für den Radius der minimalen Hüllkugel der Fall sein.

Also

$$\varrho_0 \leqq \sqrt{\frac{\left[\frac{N}{2}\right]\left(N - \left[\frac{N}{2}\right]\right)}{N-1}}.$$

Damit ist I. der Behauptung bewiesen.

Wir haben noch zu zeigen, daß die angegebene Schranke genau ist; d. h. daß zu jedem N ein Polygon so konstruiert werden kann, daß der Radius der zugehörenden minimalen Hüllkugel die angegebene Schranke erreicht.

Um ein solches Polygon zu finden, gehen wir aus von einem regulären Vektorstern der Ordnung N.

Darunter verstehen wir ein System von Einheitsvektoren

$$e_1, e_2, e_3, \ldots, e_N,$$

in welchem die Relationen gelten:

$$(e_i, e_k) = \begin{cases} 1 & i = k, \\ -\frac{1}{N-1} & i \gtrless k. \end{cases}$$

Zunächst weisen wir die Existenz solcher regulärer Sterne für jedes $N \geqq 2$ nach.

Angenommen, die Existenz eines regulären Sternes der Ordnung $N-1$ sei sicher:

$$e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{N-1},$$

$$(e_i, e_k) = \begin{cases} 1 & i = k, \\ -\frac{1}{N-2} & i \gtrless k. \end{cases}$$

Es sei nun e_0 ein Einheitsvektor der zu allen e_ν $1 \leqq \nu \leqq N-1$ orthogonal ist:

$$(e_0, e_\nu) = 0,$$
$$(e_0, e_0) = 1.$$

Die Existenz eines solchen kann leicht aus dem Postulat C. gefolgert werden.

Wir bilden dann das System der N-Vektoren

$$e_\nu^* = \begin{cases} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{N-1}\right)^2}\, e_\nu - \frac{1}{N-1} e_0 & \nu = 1, 2, \ldots, N-1; \\ e_0 & \nu = N: \end{cases}$$

Man rechnet ohne Mühe aus

$$(e_i^*, e_k^*) = \begin{cases} 1 & i = k, \\ -\frac{1}{N-1} & i \gtrless k, \end{cases}$$

d. h. das System

$$e_1^*, e_2^*, e_3^*, \ldots, e_N^*$$

ist ein regulärer Stern der Ordnung N.

Ist e irgend ein Einheitsvektor, so bilden die Vektoren e und $-e$ jedenfalls einen regulären Vektorstern der Ordnung 2.

Damit folgt nach Vorangehendem die Existenz solcher der Ordnungen $N = 3, 4, 5, \ldots$ usw.

Es sei nun

$$e_1, e_2, e_3, \ldots, e_N$$

ein solcher Stern der Ordnung N; dann ist

$$e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_N = 0,$$

ferner

$$\|e_\nu\| = 1, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N).$$

Aus diesen Vektoren kann also ein geschlossenes Polygon der oben erwähnten Voraussetzungen gebildet werden.

Ist nun

$$e'_1 + e'_2 + e'_3 + \ldots + e'_N = 0$$

eine beliebige Anordnung, so bilden wir die Teilsumme

$$e'_1 + e'_2 + e'_3 + \ldots + e'_\lambda$$

und ihr Betragsquadrat

$$\|e'_1 + e'_2 + e'_3 + \ldots + e'_\lambda\|^2 = \sum_1^\lambda \sum_1^\lambda (e'_i, e'_k) = \frac{\lambda(N-\lambda)}{N-1}.$$

Setzen wir jetzt insbesondere

$$\lambda = \left[\frac{N}{2}\right],$$

so wird

$$\|e'_1 + e'_2 + \ldots + e'_{\left[\frac{N}{2}\right]}\| = \sqrt{\frac{\left[\frac{N}{2}\right]\left(N - \left[\frac{N}{2}\right]\right)}{N-1}}.$$

Ist nun ϱ der Radius der zugehörenden Hüllkugel, so muß

$$\varrho \geqq \sqrt{\frac{\left[\frac{N}{2}\right]\left(N - \left[\frac{N}{2}\right]\right)}{N-1}}$$

sein. Da aber die Anordnung beliebig war, so gilt diese Ungleichung auch für den Radius der minimalen Hüllkugel.

Wegen der gleichzeitigen Gültigkeit der Ungleichung in Aussage I. des Satzes muß der Radius der minimalen Hüllkugel in der Tat genau gleich der gegebenen Schranke sein.

Damit ist auch Aussage II des Satzes bewiesen.

(Eingegangen am 22. Mai 1936.)

Über die asymptotische Darstellung gewisser Lösungen der Differenzengleichung der Hermiteschen Polynome.

Von

A. Kienast in Küsnacht-Zürich.

Herr O. Perron [2][1]) hat die auf Laplace zurückgehende Methode zur Gewinnung asymptotischer Darstellungen zu einem handlichen Rechnungsverfahren ausgestaltet. Er führt die Beweise für die seit Laplace übliche Form des Integrals

$$\int f(z)\, \varphi(z)^n\, dz.$$

Eines der Ziele dieses Aufsatzes ist, zu zeigen, daß dieses Verfahren auch anwendbar ist auf Integrale

$$\int f(z)\, g(z\, n^\alpha)\, \varphi(z)^n\, dz,$$

wobei $\lg \varphi(z) = z^\alpha\ (b_0 + b_1 z + \ldots)$, vgl. [2] § 3, falls $g(u)$ so beschaffen ist, daß das Integral

$$\int_0^\infty e^{-ct}\, g(t_\alpha)\, t^\nu\, dt, \quad c > 0$$

absolut konvergiert. Damit wird der Verwendungsbereich dieser Methode erheblich erweitert.

Die Beweise werden für eine spezielle Funktion in § 3 ausgeführt; das genügt, weil daraus in ausreichender Weise ersehen werden kann, daß der zusätzliche Faktor $g(u)$ im Integranden und die Ausdehnung auf komplexe Werte (n ersetzt durch $|x|\, e^{2i\theta}$, $|x| \to \infty$) die Schlüsse des Perronschen Beweises nicht beeinflussen, wenn die genannte Bedingung erfüllt ist.

Andererseits gelange ich so zu asymptotischen Reihen für Funktionen, die in gewisser Hinsicht von Interesse sind.

Die Funktion, von der ich ausgehe, A, ist das bestimmte Integral (1); einige ihrer Eigenschaften werden in § 1 zusammengestellt, wobei die Beweise nur angedeutet zu werden brauchen, da sie äußerst einfach sind. A ist Lösung der Differenzengleichung (3), der die Hermiteschen Polynome genügen. (3) ist einer der „irregulären" Fälle der linearen homogenen Differenzengleichung zweiter Ordnung mit linearen Koeffizienten, in denen die Wurzeln ϱ_1, ϱ_2 der charakteristischen Gleichung Ausnahmewerte be-

[1]) Nummern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Verzeichnis am Schluß des Aufsatzes.

sitzen. Diese Fälle sind zum ersten Male in der Literatur eingehend behandelt worden von P. M. Batchelder [1], 4th Chap. Gleichung (3) ist der Fall, in dem $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$ und Herr Batchelder sagt von ihm, daß seine Resultate „far from complete" seien.

In § 2 werden Betrachtungen durchgeführt, um zu einem Integrationsweg zu gelangen, der für die Anwendung der Perronschen Methode im vorliegenden Spezialfall die günstigsten Eigenschaften hat. Diese Vorbereitungen müssen in jedem Anwendungsfall dessen besonderen Eigentümlichkeiten angepaßt werden. Sie führen hier in, wie mir scheint, naturgemäßer Weise zu linearen Verbindungen zweier A, die auch Lösungen von (3) sind. Die Abschätzungen werden dadurch einerseits auf ein Minimum reduziert, andererseits ergeben sie, daß die asymptotischen Reihen in Sektoren gleichmäßig gültig sind. Letztere können nicht vergrößert werden.

Für das Integral (1), in etwas anderer Gestalt, hat G. N. Watson [3] die Darstellung (28), reduziert auf den ersten Term plus Rest, bewiesen, jedoch mit wesentlich kleinerem Gültigkeitsbereich.

Ich habe es der freundlichen Kritik von Herrn Perron zu danken, daß es mir schließlich gelungen ist, für die erforderlichen Abschätzungen die verhältnismäßig kurze Form des § 2 zu finden.

§ 1.

Definition und grundlegende Eigenschaften.

Das Integral

$$A(x, \xi) = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}t^2 + \xi t} t^x \, dt \tag{1}$$

erstreckt über die reelle positive Axe, konvergiert für $R(x) > -1$ und definiert, analog wie das Eulersche Integral für die Gammafunktion, eine analytische Funktion, die in der Umgebung jedes Punktes dieser Halbebene regulär ist. In vielfach verwendeter Weise liefert das Schleifenintegral

$$A(x, \xi) = (e^{2\pi i x} - 1)^{-1} \int_l e^{-\frac{1}{2}t^2 + \xi t} t^x \, dt \tag{2}$$

die analytische Fortsetzung der Funktion für alle endlichen x, wobei die Schleife l in ∞ beginnt und endigt und den Punkt $t = 0$ umschließt; an ihrem Anfang ist $|\arg t| < \frac{\pi}{4}$, am Ende $|\arg t - 2\pi| < \frac{\pi}{4}$.

Aus (1) entnimmt man mit Hilfe einer partiellen Integration, daß $A(x, \xi)$ der Differenzengleichung

$$y(x+1) - \xi y(x) - x y(x-1) = 0 \tag{3}$$

genügt. Umgekehrt ergibt die Laplacesche Transformation, daß eine Lösung von (3) dargestellt wird durch das Integral (1). (3) ist die Gleichung, der die Hermiteschen Polynome genügen, vgl. Hermite oeuvres II, p. 302.

Da in (1) Differentiation nach ξ unter dem Integralzeichen ausgeführt werden kann, ist nur eine partielle Integration nötig, um zu zeigen, daß $A(x, \xi)$ Lösung der Differentialgleichung

$$y''_\xi - \xi y'_\xi - (x+1) y = 0 \tag{4}$$

ist und daß

$$D_\xi A(x, \xi) = A(x+1, \xi).$$

Die Methode von Frobenius ergibt, daß (4) für die Umgebung der Stelle $\xi = 0$ das Fundamentalsystem besitzt

$$y_1(x+1, \xi) = 1 + \frac{x+1}{2!}\xi^2 + \cdots + \frac{(x+1)(x+3)\cdots(x+2k-1)}{(2k)!}\xi^{2k} + \cdots$$

$$y_2(x+1, \xi) = \xi\left\{1 + \frac{x+2}{3!}\xi^2 + \cdots + \frac{(x+2)(x+4)\cdots(x+2k)}{(2k+1)!}\xi^{2k} + \cdots\right\}.$$

Dies sind ganze transzendente Funktionen von ξ für jedes endliche x.

Benutzt man noch, was aus (1) folgt,

$$A(x, 0) = 2^{(x-1)/2} \Pi\left(\frac{x-1}{2}\right),$$

wo Π das Gaußsche Zeichen für die Gammafunktion ist, so findet man leicht

$$A(x, \xi) = 2^{(x-1),2}\left\{\Pi\left(\frac{x-1}{2}\right) y_1(x+1, \xi) + \sqrt{2}\,\Pi\left(\frac{x}{2}\right) y_2(x+1, \xi)\right\},$$

indem man die Werte rechts und links für A und für $D_\xi A$ an der Stelle $\xi = 0$ berechnet. Dies ist eine weitere Darstellung von A für alle endlichen x. Sie zeigt, daß A eine meromorphe Funktion von x ist mit Polen erster Ordnung für $x = -1, -2, -3, \ldots$

Wenn $0 < \xi$, $-1 < x$, kann man in derselben Weise wie bei der Gammafunktion zeigen, daß der Verlauf der Werte von A ähnlich ist demjenigen der Werte von $\Pi(x)$, nämlich $A(x, \xi) > 0$; $D^2_\xi A > 0$; ein Minimum links von $x = 1$.

Verwendet man das von Prym bei der Gammafunktion eingeschlagene Verfahren, setzt

$$A = \int_0^1 + \int_1^\infty = P + Q$$

und verwendet die Formel von Hermite

$$\exp\left(-\tfrac{1}{2}t^2 + \xi t\right) = \sum_0^\infty U_\nu(\xi)(\nu!)^{-1} t^\nu = \Sigma P_\nu t^\nu,$$

so findet man die Partialbruchreihe

$$P = \sum_{0}^{\infty} P_\nu(\xi)(\nu + x + 1)^{-1},$$

während Q eine ganze transzendente Funktion von x ist, für jeden endlichen Wert von ξ. $U_\nu(\xi) = \xi^\nu - + \ldots$ (absteigende Potenzen von ξ) ist das Hermitesche Polynom. Somit besitzt A am Pole $x = -\nu - 1$ das Residuum $U_\nu(\xi)(\nu!)^{-1}$ und man hat in $P + Q$ eine neue Darstellung von A für alle endlichen x.

Diese Andeutungen mögen genügen, um ersichtlich zu machen, daß die Einführung der Funktion A in natürlicher Weise begründet ist. Infolge ihrer Doppelstellung als Lösung von (3) und (4) ergeben sich eine große Zahl von Beziehungen, aus denen für die Untersuchung der Lösungen von (3) allerlei Folgerungen fließen, die man bisher nicht bemerkt zu haben scheint. Unter ihnen ist die Formel (3) S. 395 von G. N. Watson [3] enthalten, die in der hier benutzten Bezeichnungsweise lautet

$$(5) \qquad U_x(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\xi^2}\{e^{\pi i x/2} A(x, -i\xi) + e^{-\pi i x/2} A(x, i\xi)\}.$$

Durch sie ist das Hermitesche Polynom für andere als ganzzahlige positive x erklärt.

Aus den allgemeinen Resultaten von J. Horn über das asymptotische Verhalten der Lösungen linearer Differentialgleichungen ergibt sich leicht, das asymptotische Verhalten von A für festes x und $|\xi| \to \infty$. In den folgenden Paragraphen wird das asymptotische Verhalten von A für festes ξ und $|x| \to \infty$ ermittelt.

§ 2.

Einführung des Integrals $J(\xi, \Theta)$ und Abspaltung infinitär kleinerer Bestandteile.

Um die Abschätzungen zur Herleitung asymptotischer Darstellungen zu vereinfachen und andererseits ihren Geltungsbereich möglichst groß zu erhalten, schlage ich folgenden Weg ein. Für das Integral

$$J(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\tfrac{1}{2}w^2 + \xi w) w^x \, dw$$

sei der Integrationsweg die Gerade g, die parallel ist zur reellen Achse, in der positiv imaginären Halbebene mit dem Abstand $|\sin\Theta|\,|\sqrt{x}|$ von $w = 0$, wo $x = |x| e^{2i\Theta}$; $\Theta = 0, \pm\pi$ sind ausgeschlossen. Am Anfang des Integrationsweges ist $\arg w = \pi$, am Ende $\arg w = 0$.

Die zu g symmetrische Gerade in der negativ imaginären Halbebene sei mit h, dasselbe Integral erstreckt über h, sei mit $J(h)$ bezeichnet;

m Anfang des Integrationsweges ist hier $\arg w = -\pi$, an seinem Ende $\arg w = 0$. Beide Integrale konvergieren für alle endlichen x und es ist

$$J(g) = A(x, \xi) + e^{\pi i x} A(x, -\xi),$$
$$J(h) = A(x, \xi) + e^{-\pi i x} A(x, -\xi),$$

wie man leicht für solche x feststellt, deren $R(x) > -1$, so daß der Integrationsweg in den Nullpunkt hineingeführt werden kann.

Man hat zwei Fälle zu unterscheiden, in denen die Transformationen nicht die gleichen sind. Es werde bezeichnet

$$J(\xi, \Theta) = x^{(x+1)/2} \int_{1-\infty e^{-i\Theta}}^{1+\infty e^{-i\Theta}} \exp\left(-\tfrac{1}{2} u^2 x + \xi u \sqrt{x}\right) u^x \, du$$

Fall I. $0 < \Theta < \pi$. Transformiert man $J(g)$ durch $w = u\sqrt{x}$, so erhält man

(6) $$A(x, \xi) + e^{\pi i x} A(x, -\xi) = J(\xi, \Theta).$$

Transformiert man $J(h)$ durch $w = e^{-\pi i} u\sqrt{x}$, so folgt

(7) $$A(x, \xi) + e^{-\pi i x} A(x, -\xi) = e^{-\pi i x} J(-\xi, \Theta).$$

Fall II. $-\pi < \Theta < 0$. Transformiert man $J(g)$ durch $w = e^{\pi i} u\sqrt{x}$, so folgt

(8) $$A(x, \xi) + e^{\pi i x} A(x, -\xi) = e^{\pi i x} J(-\xi, \Theta).$$

Die Transformation $w = u\sqrt{x}$ ausgeführt in $J(h)$ liefert

(9) $$A(x, \xi) + e^{-\pi i x} A(x, -\xi) = J(\xi, \Theta).$$

Wenn man noch beachtet, daß

$$-e^{\pi i x} J(\xi, \alpha) = J(\xi, \alpha + \pi),$$

wobei zu $-\pi < \alpha < 0$ sich ergibt $0 < \alpha + \pi < \pi$, so ist ersichtlich, daß man das asymptotische Verhalten der linken Seiten angeben kann, wenn man dasjenige von $J(\xi, \Theta)$, $0 < \Theta < \pi$ ermittelt hat.

Der Integrationsweg für $J(\xi, \Theta)$ geht durch $u = 1$ hindurch; dies ist ein „Sattelpunkt" und die von ihm ausgehenden Kurven mit dem „stärksten Gefälle" haben den Integrationsweg zur Tangente.

Um die asymptotische Darstellung zu erhalten, setze man:

$$a = 1 - \infty e^{-i\Theta}, \quad b = 1 - \varrho e^{-i\Theta}, \quad c = 1 + \varrho e^{-i\Theta}, \quad d = 1 + \infty e^{-i\Theta};$$

$$J(\xi, \Theta) = x^{(x+1)/2} \left\{ \int_a^b + \int_b^c + \int_c^d \right\}$$
$$= x^{(x+1)/2} e^{-\frac{1}{2}x} e^{\xi\sqrt{x}} \{J_1 + J_2 + J_3\},$$

alle drei Integrationswege geradlinig. Der Integrand wird hierdurch

$$\exp\left\{|x| e^{2i\Theta}\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}u^2 + \lg u\right) + \xi(u-1)\sqrt{x}\right\}.$$

Zur Abkürzung sei gesetzt

$$x^{(x+1)/2}\, e^{-x/2}\, e^{\xi\sqrt{x}} = G(\xi).$$

Der Schluß dieses Paragraphen enthält nun den Beweis, daß

$$J_1 + J_3 = O(e^{-\delta|x|}),\ 0 < \delta.$$

Das Verhalten von J_1 und J_3 für $|x| \to \infty$ wird bestimmt durch dasjenige von

$$P = R(e^{2i\Theta}[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}u^2 + \lg u]).$$

Setzt man in J_1: $u = 1 + v\,e^{i(\pi-\Theta)}$, $\varrho \leqq v$, so ist

$$P(v) = R\{e^{2i\Theta}[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(1 - v\,e^{-i\Theta})^2 + \lg(1 - v\,e^{-i\Theta})]\} \tag{10}$$

$$P'(v) = R\left\{(1 - v\,e^{-i\Theta})\,e^{i\Theta} - \frac{e^{i\Theta}(1 - v\,e^{i\Theta})}{1 - 2v\cos\Theta + v^2}\right\}$$

$$= -v\,\frac{2 - 3v\cos\Theta + v^2}{1 - 2v\cos\Theta + v^2} = -v\,\frac{Z}{N}.$$

Für $\frac{\pi}{2} \leqq \Theta \leqq \pi$ sei $|\cos\Theta| = \mathfrak{a}$; dann ist

$$Z N^{-1} = 1 + (1 + v\,\mathfrak{a})\,N^{-1} > 1,$$

somit

$$P'(v) < -v$$

also

$$P(v) < -\tfrac{1}{2}v^2.$$

Für $0 < \Theta \leqq \frac{\pi}{2}$ ist $\cos\Theta \geqq 0$.

Wenn gleichzeitig $0 < v\cos\Theta \leqq 1$, so ist

$$P'(v) = -v[1 + (1 - v\cos\Theta)\,N^{-1}]; \tag{11}$$

somit ist

$$P'(v) \leqq -v. \tag{12}$$

Ist zweitens $\frac{1}{2} \leqq v\cos\Theta$, so ist

$$N = (1 - v\cos\Theta)^2 + v^2\sin^2\Theta \leqq v^2\cos^2\Theta + v^2\sin^2\Theta = v^2,$$

folglich

$$v^2 N^{-1} \geqq 1. \tag{13}$$

Weiter ist $(Z\,v^{-2})' = v^{-2}(3\cos\Theta - 4\,v^{-1})$; folglich besitzt $Z\,v^{-2}$ für $v = \frac{4}{3}\cos^{-1}\Theta$ ein Minimum $d = 1 - 2(\frac{3}{4}\cos\Theta)^2$. d ist positiv für $\cos^2\Theta < \frac{8}{9}$. Es sei

$$\cos^2\Theta_0 = \frac{5}{6} > \frac{1}{2} \quad \text{also} \quad 0 < \Theta_0 < \frac{\pi}{4}.$$

Dann ist für $\Theta_0 < \Theta \leqq \frac{1}{2}\pi$, $d > 2^{-4}$; also

$$P'(v) < -v\,d < -2^{-4}v$$

folglich

$$P(v) < -2^{-5} v^2.$$

Es bleibt übrig eine analoge Ungleichung für den Bereich $0 < \Theta \leqq \Theta_0$ herzustellen. Hierzu ist es nötig, den Integrationsweg, der bisher geradlinig war, ein wenig abzuändern. Das ist möglich, ohne den Wert des Integrals zu verändern, solange keine Überschreitung der Stelle $u = 0$ stattfindet.

Man bezeichne, immer unter der Voraussetzung $0 < \Theta \leqq \Theta_0$ mit den großen Buchstaben die Punkte:

$$A\colon\ u = 1 - \varrho\, e^{-i\Theta};$$

$$B\colon\ u = 1 - \cos^{-1}\Theta\, e^{-i\Theta} = \operatorname{tg}\Theta\, e^{i\pi/2};$$

$$C\colon\ u = \operatorname{tg}\Theta\, e^{i(\pi - 2\Theta)};$$

$$D\colon\ u = e^{i(\pi - 2\Theta)};$$

$$E\colon\ u = 1 - \infty\, e^{-i\Theta};$$

dann ist

$$J_1 = \int_A^B + \int_B^C + \int_C^D + \int_D^E = K_1 + K_2 + K_3 + K_4,$$

wobei in $K_1 K_3 K_4$ der Integrationsweg geradlinig ist, während er in K_2 der (kleinere) Kreisbogen mit $u = 0$ als Mittelpunkt ist.

Für K_1 ist $0 < v\cos\Theta \leqq 1$; daher gelten (11) und (12); also ist

$$P(v) < -\tfrac{1}{2} v^2 \qquad \text{(in } K_1\text{)}.$$

Für K_4 ist $2\cos\Theta \leqq v$; unter dieser Beschränkung ist

$$Z = \tfrac{1}{2}\{(2 - v\cos\Theta)^2 + v(v - 2\cos\Theta) + v^2\sin^2\Theta\} \geqq \tfrac{1}{2} v^2 \sin^2\Theta.$$

Da noch (13) gilt, folgt

$$P'(v) < -\tfrac{1}{2}\sin^2\Theta\, v,$$

also, von $2\cos\Theta$ bis v integriert

$$P(v) < -\tfrac{1}{4}\sin^2\Theta\,[v^2 - 4\cos^2\Theta] + P(2\cos\Theta).$$

$P(2\cos\Theta)$ ist der Wert von P für $u = e^{i(\pi - 2\Theta)}$; er erscheint bei K_3 von selbst und ist

$$P(2\cos\Theta) = -(\pi - 2\Theta)\sin 2\Theta.$$

Dies eingesetzt gibt

$$P(v) < -\tfrac{1}{4}\sin^2\Theta\, v^2 - \sin 2\Theta\,[\pi - 2\Theta - \tfrac{1}{4}\sin 2\Theta].$$

Da $0 < \Theta \leqq \Theta_0 < \tfrac{1}{4}\pi$ also $\sin 2\Theta < 1$, so ist

$$\pi - 2\Theta - \frac{1}{4}\sin 2\Theta > \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} > 0,$$

folglich

$$P(v) < -\tfrac{1}{4}\sin^2\Theta\, v^2 \qquad \text{(in } K_4\text{)}.$$

Für K_2 setze man

$$u = t e^{i\tau}, \quad \frac{\pi}{2} \leqq \tau \leqq \pi - 2\Theta, \quad t = \operatorname{tg}\Theta.$$

Das gibt

$$P = \cos 2\Theta\,[\tfrac{1}{2} + \lg t - \tfrac{1}{2} t^2 \cos 2\tau] - \tfrac{1}{2}\sin 2\Theta\,[2\tau - t^2 \sin 2\tau].$$

Da $\operatorname{tg}^2\Theta \leqq \operatorname{tg}^2\Theta_0 = \frac{1}{5}$, so ist $t < \frac{1}{2}$, somit $2\tau - t^2 \sin 2\tau > 0$; für $0 < t \leqq \frac{1}{2}$ ist $\frac{5}{8} - \lg t^{-1} < -0{,}068$; da ferner

$$\cos 2\Theta \geqq 2\cos^2\Theta_0 - 1 = \tfrac{2}{3},$$

so ist

$$P < -\tfrac{1}{30} \qquad \text{(in } K_2\text{)}.$$

Auf K_3 ist

$$u = t e^{i(\pi - 2\Theta)}, \quad \operatorname{tg}\Theta \leqq t \leqq 1.$$

Man findet

$$X = P = \tfrac{1}{2}\cos 2\Theta - \tfrac{1}{2} t^2 \cos 2\Theta + \cos 2\Theta \lg t - \sin 2\Theta\,[\pi - 2\Theta].$$

Es ist

$$\pi - 2\Theta > \pi - 2\Theta_0 > \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = -t\cos 2\Theta + \cos 2\Theta\, t^{-1} \geqq 0 \quad \text{für} \quad 0 < t \leqq 1;$$

also ist X wachsend mit von 0 zu 1 wachsendem t. Nun ist

$$X(1) = -\sin 2\Theta\,[\pi - 2\Theta] < -\tfrac{1}{2}\pi \sin 2\Theta.$$

Das ist der oben bei K_4 verwendete Wert. Er ist negativ und somit ist auf K_3

$$P < -\pi \sin\Theta \cos\Theta,$$

also endlich, da $\cos\Theta > \cos\Theta_0 > \frac{3}{4}$,

$$P < -\tfrac{3}{4}\pi \sin\Theta \qquad \text{(in } K_3\text{)}.$$

Der Faktor $\sin\Theta$ in der Schranke kommt durch den Endpunkt D von K_3 herein. Man kann aus P entnehmen, daß das Intervall von Θ-Werten, für die P längs des Integrationsweges einen negativen Wert hat, die größte Ausdehnung besitzt, wenn er durch D hindurchgeführt wird. Dies bewirkt, daß $\Theta = 0$ Grenze für das Gültigkeitsgebiet der asymptotischen Darstellung ist, die nicht verbessert werden kann.

Obige Abschätzungen ergeben

$$|K_1 + K_2 + K_3| \leqq e^{-\delta|x|} \int |d\,u| = O(e^{-\delta|x|})$$

$0 < \delta$, gleichmäßig für $0 < \eta \leqq \Theta \leqq \Theta_0$, da das Integral über einen Weg zu erstrecken ist, dessen Länge kleiner ist als eine von Θ unab-

hängige Schranke. δ läßt sich aus den obigen Abschätzungen durch η, ϱ ausdrücken und ist größer als 0 solange $\eta > 0$, $\varrho > 0$. Weiter ergeben sie

$$|J_1| \leqq \int_{\varrho}^{\infty} \exp[-|x|\delta_1 v^2 - R(\xi v e^{-i\theta}\sqrt{x})]\,dv \quad \text{für} \quad \Theta_0 \leqq \Theta \leqq \pi,$$

$$K_4| \leqq \int_{2\cos\Theta}^{\infty} \exp[-|x|\delta_1 v^2 - R(\xi v e^{-i\theta}\sqrt{x})]\,dv \quad \text{für} \quad 0 < \eta \leqq \Theta \leqq \Theta_0.$$

$0 < \delta_1$ läßt sich aus den Abschätzungen durch $\eta > 0$ ausdrücken.

Es ist $R(\xi v e^{-i\theta}\sqrt{x}) = v|\sqrt{x}|\,R(\xi)$. Setzt man

$$\delta_1^{-1}\varrho^{-1}|R(\xi)| = a$$

und bestimmt $x_0 > 0$ aus $a = \frac{1}{2}x_0^{\frac{1}{2}}$, so ist für alle $|x| \geqq x_0$, $\varrho \leqq v$

$$1 + \delta_1^{-1}v^{-1}R(\xi)|x^{-\frac{1}{2}}| \geqq 1 - \delta_1^{-1}\varrho^{-1}|R(\xi)|x_0^{-\frac{1}{2}} = 1 - a x_0^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}.$$

Das ergibt für die vorangehenden Integrale die obere Schranke

$$\int_{\varrho}^{\infty} \exp[-|x|\tfrac{1}{2}\delta_1 v^2]\,dv \leqq \exp[-\tfrac{1}{2}\delta_1\varrho^2(|x|-1)] \int_{\varrho}^{\infty} \exp[-\tfrac{1}{2}\delta_1 v^2]\,dv$$
$$= 0\{\exp(-\delta_2|x|)\},$$

gleichmäßig für $0 < \eta \leqq \Theta \leqq \pi$. x_0 hängt ab von ξ, dem in diesem Paragraphen ermittelten δ_1 und dem im § 3 sich ergebenden ϱ.

In J_3 setzt man $u = 1 + v e^{-i\theta}$, $\varrho \leqq v$; dann ist

$$P = P_1(v) = R\{e^{2i\theta}[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(1 + v e^{-i\theta})^2 + \lg(1 + v e^{-i\theta})]\}.$$

Ersetzt man in (10) Θ durch $\pi - \Theta$, so erhält man

$$P_2(v) = R\{e^{-2i\theta}[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(1 + v e^{i\theta})^2 + \lg(1 + v e^{i\theta})]\}.$$

Dieser reelle Teil bleibt unverändert, wenn man i durch $-i$ ersetzt; somit ist $P_1(v) = P_2(v)$; somit geht $P_1(v)$ aus $P(v)$ in (10) hervor, indem man dort Θ ersetzt durch $\pi - \Theta$. Folglich erhält man die Abschätzungen für J_3, indem man in denen für J_1 überall Θ ersetzt durch $\pi - \Theta$. Somit folgt

$$|J_3| = 0(\exp(-\delta_3|x|)), \qquad 0 < \delta_3,$$

gleichmäßig für $0 \leqq \Theta \leqq \pi - \eta < \pi$.

Damit ist bewiesen

$$J(\xi, \Theta) = G(\xi)\{J_2 + 0(\exp[-\delta|x|])\} \tag{14}$$

gleichmäßig für $0 < \eta \leqq \Theta \leqq \pi - \eta$, womit die Ermittlung der asymptotischen Darstellung reduziert ist auf die Untersuchung des Integrals J_2. Die Grenzen des Gültigkeitssektors sind bedingt durch den zweiten „Sattelpunkt" $u = -1$ des Integranden.

§ 3.

Erweiterung der Perronschen Methode. Die asymptotische Reihe für J_2.

In J_2 setzt man $u = 1 + z$. Bezeichnet man

$$e^{2i\Theta}\left[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(1+z)^2 + \lg(1+z)\right] = g,$$

$$\Phi_x = \int_0^{\varrho e^{-i\Theta}} \exp\{|x|g + \xi z\sqrt{x}\}\, dz, \quad \Phi'_x = \int_0^{\varrho e^{i(\pi-\Theta)}} \ldots,$$

so ist

$$J_2 = \Phi_x - \Phi'_x.$$

Auf diese zwei Integrale läßt sich das von Perron [2] § 3, S. 195—202, dargestellte Verfahren anwenden. Dies ist eine Erweiterung gegenüber den bisher ausgeführten Anwendungen. Ich benutze dieselben Bezeichnungen wie Perron [2], um den Vergleich zu erleichtern. Man setzt

$$\begin{aligned} g &= z^p(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots) \\ &= e^{i2\Theta}(-z^3 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \ldots) \\ b_0 &= r\,e^{i\beta}, \quad z = v\,e^{i\omega}. \end{aligned}$$

Es ist also im vorliegenden Falle

$$p = 2, \quad r = 1, \quad \beta = \pi + 2\Theta, \ \ldots;$$

die Winkelhalbierenden der Sektoren, in denen $\Re(g) < 0$, sind

$$\omega_0 = -\Theta, \quad \omega_1 = -\Theta + \pi.$$

Weiter ist (analog Perron)

$$\frac{g + e^{i2\Theta}z^2}{z^3} = e^{i2\Theta}F(z) = e^{i2\Theta}(\tfrac{1}{3}z - \tfrac{1}{4}z^2 + \ldots);$$

dann ist (ebenso wie bei Perron, da hier $f(z) = 1$)

$$e^{xF(z)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_\nu(x)\, z^\nu \tag{15}$$

$$\psi_\nu(x) = \sum_{\mu=0}^{\nu} g_{\nu,\mu}\, x^\mu$$

und

$$F(z) = \tfrac{1}{3}z - \tfrac{1}{4}z^2 + \tfrac{1}{5}z^3 - + \ldots.$$

Die Polynome ψ stimmen überein mit denjenigen auf S. 209 [2].

Folgt man nun der Abschätzung des Restes, die Perron S. 197—198 durchführt, mit den hier eintretenden Vereinfachungen, so folgt

$$|\sum_{k}^{\infty} \psi_\nu(x)\, z^\nu| \leqq (1 + |x|)^k\, |z|^k\, (1 - |z|)^{-1-|x|}. \tag{16}$$

Da

$$e^{|x|g} = e^{|x|b_0 z^2}\, e^{x z^2 F(z)} = e^{|x|b_0 z^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_\nu(x z^2)\, z^\nu,$$

so ist

$$\Phi_x = \int_0^{\varrho e^{i\omega_0}} \exp\{\xi z\sqrt{x} + |x| b_0 z^2\} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_\nu(x z^2) z^\nu\right) dz.$$

Jetzt kann man, trotz des erweiterten Integranden, dieselbe Substitution anwenden wie Perron (S. 198):

$$z = e^{i\omega_0} (t\,|x|^{-1})^{\frac{1}{2}},$$

also

$$|x| z^2 = e^{i 2\omega_0} t = -t b_0^{-1}; \qquad x z^2 = t.$$

Setzt man noch $|x| \varrho^2 = \tau$, so erhält man

$$\Phi_x = \Psi(\omega_0, \xi) \tag{17}$$
$$= \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{k-1} e^{i\omega_0(\nu+1)} |x|^{-1/2(\nu+1)} \int_0^{\tau} e^{-t+\xi\sqrt{t}}\, t^{(\nu-1)/2}\, \psi_\nu(t)\, dt + R_k,$$

wo der Rest

$$R_k = \tfrac{1}{2} e^{i\omega_0} \int_0^{\tau} e^{-t+\xi\sqrt{t}} \left\{\sum_{\nu=k}^{\infty} \psi_\nu(t)\, e^{i\omega_0 \nu} t^{(\nu-1)/2} |x|^{-(\nu+1)/2}\right\} dt. \tag{18}$$

Nach (16) ist

$$T = \left|\sum_{\nu=k}^{\infty} \psi_\nu(t) (e^{i\omega_0} t^{1/2} |x|^{-1/2})^\nu\right|$$
$$\leqq (1+t)^k\, t^{k/2} |x|^{-k/2} (1 - t^{1/2} |x|^{-1/2})^{-1-t},$$

sobald $t^{1/2} |x|^{-1/2} < 1$ ist. Im Integral (18) ist aber $t \leqq \tau = |x| \varrho^2$; also muß $t^{1/2} |x|^{-1/2} \leqq \varrho < 1$ sein. Dann ist

$$T \leqq (1+t)^k\, t^{k/2} |x|^{-k/2} (1-\varrho)^{-1-t}$$

und somit

$$|R_k| \leqq \tfrac{1}{2} |x|^{-(k+1)/2} (1-\varrho)^{-1} \int_0^{\tau} e^{-t+R(\xi)\sqrt{t}} (1+t)^k\, t^{(k-1)/2} (1-\varrho)^{-t}\, dt.$$

Verfügt man jetzt weiter über die Zahl ϱ so, daß

$$\delta = e(1-\varrho) > 1,$$

dann konvergiert das letzte Integral, wenn die obere Grenze ins Unendliche rückt, wodurch es einen größeren von x unabhängigen Wert erhält. Wenn somit $\varrho < 1 - e^{-1} = 0{,}632\ldots$, so ist

$$|R_k| < C_k |x|^{-(k+1)/2},$$

wo C_k nicht von x abhängt.

Weiter setzt man im Integral in (17) für $\psi_\nu(t)$ den Ausdruck (15)

$$\sum_{\mu=0}^{\nu} g_{\nu,\mu} \int_0^{\tau} e^{-t+\xi\sqrt{t}}\, t^{(\nu-1)/2+\mu}\, dt = \Sigma\, g_{\nu,\mu} \left\{\int_0^{\infty} - \int_{\tau}^{\infty}\right\}. \tag{19}$$

Hier ist das letzte Integral absolut kleiner als

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-t+R(\xi)\sqrt{t}}\, t^{(\nu-1)/2+\mu+2}\,\frac{dt}{t^2} < e^{-\sqrt{\tau}(\sqrt{\tau}-R(\xi))}\,\tau^{(\nu-1)/2+\mu+1} = 0\,(|x|^{-(k+1)/2})$$

für alle $|x|$, die groß genug sind. Für das erste Integral der rechten Seite (19) findet man

$$(20)\qquad \int_{0}^{\infty} e^{-t+\xi\sqrt{t}}\, t^{(\nu-1)/2+\mu}\,dt = 2^{-(\nu-1)/2-\mu}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}v^2+\frac{\xi}{\sqrt{2}}v}\, v^{\nu+2\mu}\,dv$$

$$= 2^{-(\nu-1)/2-\mu}\,A\left(\nu+2\mu, \frac{\xi}{\sqrt{2}}\right) = c_{\nu,\mu}(\xi).$$

Setzt man

$$P_\nu(\xi) = e^{i\omega_0(\nu+1)}\sum_{\mu=0}^{\nu} g_{\nu,\mu}\, c_{\nu,\mu}(\xi),$$

so ergibt sich

$$\Phi_x = \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{k-1} P_\nu\,|x|^{-(\nu+1)/2} + 0\,(|x|^{-(k+1)/2}),$$

wodurch Φ_x asymptotisch dargestellt ist, gleichmäßig für alle Θ und $|x| \to \infty$.

Behandelt man das Integral Φ'_x analog, so hat man die Substitution zu verwenden

$$z = e^{i\omega_1}(t\,|x|^{-1})^{1/2}.$$

Dadurch wird

$$\Phi'_x = \Psi(\omega_1, -\xi)$$

(für das Zeichen Ψ siehe (17)); wenn man setzt

$$(21)\qquad Q_\nu(\xi) = \sum_{\mu=0}^{\nu} g_{\nu,\mu}\,[c_{\nu,\mu}(\xi) - (-1)^{\nu+1}\,c_{\nu,\mu}(-\xi)],$$

so findet man schließlich für J_2 die asymptotische Entwicklung

$$J_2 \sim S(\xi) = \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu(\xi)\,|x|^{-(\nu+1)/2}\,e^{-i\Theta(\nu+1)} = \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu(\xi)\,x^{-(\nu+1)/2},$$

gleichmäßig für alle $\Theta = \frac{1}{2}\arg x$; denn in diesem Paragraphen ist Θ ohne Einfluß auf die Abschätzungen.

§ 4.

Die asymptotischen Darstellungen.

Hierdurch sind folgende asymptotischen Darstellungen bewiesen:

I. für $0 < \Theta < \pi$.

$$(22)\qquad A(x,\xi) + e^{\pi i x}\,A(x,-\xi) \sim G(\xi)\,S(\xi),$$

aus (6),

$$(32)\qquad A(x,\xi) + e^{-\pi i x}\,A(x,-\xi) \sim e^{-\pi i x}\,G(-\xi)\,S(-\xi),$$

aus (7); beide gelten, wegen (14), gleichmäßig für $\eta \leqq \arg x \leqq 2\pi - \eta$. Sie liefern

$$(24) \qquad (1 - e^{2\pi i x})\, A(x, \xi) \sim G(\xi)\, S(\xi) - e^{\pi i x}\, G(-\xi)\, S(-\xi).$$

II. für $-\pi < \Theta < 0$.

$$(25) \qquad A(x, \xi) + e^{\pi i x}\, A(x, -\xi) \sim e^{\pi i x}\, G(-\xi)\, S(-\xi),$$

aus (8),

$$(26) \qquad A(x, \xi) + e^{-\pi i x}\, A(x, -\xi) \sim G(\xi)\, S(\xi),$$

aus (9), beide gelten gleichmäßig für $-2\pi + \eta \leqq \arg x \leqq -\eta$. Sie liefern

$$(27) \qquad (1 - e^{-2\pi i x})\, A(x, \xi) \sim G(\xi)\, S(\xi) - e^{-\pi i x} G(-\xi)\, S(-\xi).$$

Die Relationen (22), (23) *und* (25), (26) *stellen die wesentlichen Rechnungsergebnisse dieses Aufsatzes dar.* Ihre rechten Seiten sind entstanden durch Entwicklung analytischer Ausdrücke für die Funktionen auf den linken Seiten und die Sektoren, in denen sie gelten, können nicht vergrößert werden.

Ich leite daraus eine Folgerung ab, indem ich in (24) und (27) die infinitär kleineren Bestandteile abspalte.

Man hat $e^{2\pi i x} = e^{-2\pi |x| \sin 2\Theta}\, e^{i\, 2\pi |x| \cos 2\Theta}$, daher ist für $\sin 2\Theta > 0$ $e^{2\pi i x}$ infinitär kleiner als die Reihenreste und für $\sin 2\Theta < 0$ trifft dies für $e^{-2\pi i x}$ zu. Setzt man $x^{(x+1)/2} e^{-x/2} = G_1$, so folgt hiermit aus (24)

$$A(x, \xi) \sim G_1\, e^{\xi \sqrt{x}}\, \{S(\xi) - e^{\pi i x} e^{-2\xi \sqrt{x}}\, S(-\xi)\}, \quad 0 < 2\Theta < \pi,$$

und aus (27)

$$A(x, \xi) \sim G_1\, e^{\xi \sqrt{x}}\, \{S(\xi) - e^{-\pi i x} e^{-2\xi \sqrt{x}}\, S(-\xi)\}, \quad -\pi < 2\Theta < 0.$$

Weiter ist

$$R\left[\pi i x \left(1 + \frac{2i\xi}{\pi \sqrt{x}}\right)\right] \sim R(\pi i x) \quad \text{für} \quad |x| \to \infty,$$

somit

$$\sim -\pi |x| \sin 2\Theta$$
$$< 0 \quad \text{für} \quad \sin 2\Theta > 0.$$

$$R\left[-\pi i x \left(1 - \frac{2i\xi}{\pi \sqrt{x}}\right)\right] \sim R(-\pi i x) \quad \text{für} \quad |x| \to \infty,$$

somit

$$\sim \pi |x| \sin 2\Theta$$
$$< 0 \quad \text{für} \quad \sin 2\Theta < 0.$$

Diese Ungleichungen gelten bzw. gleichmäßig für $\zeta \leqq \Theta \leqq \frac{\pi}{2} - \zeta$, und für $\zeta \leqq -\Theta \leqq \frac{\pi}{2} - \zeta$.

Somit ist bewiesen

$$A(x, \xi) \sim G(\xi)\, S(\xi)$$

gleichmäßig mit Ausnahme eines kleinen Sektors, der die reelle Achse enthält. Für den Teil dieses Sektors, der den positiven Teil der reellen Achse enthält, gilt aber die Formel auch, gleichmäßig, wie man leicht aus den Abschätzungen des § 2 entnimmt, indem man den Integrationsweg für $R(x) > -1$, d. h. $\cos 2\Theta > 0$, dadurch vereinfacht, daß man ihn z. B. für $|\Theta| < \frac{\pi}{4}$ von $u = i \operatorname{tg} \Theta$ geradlinig nach $u = 0$ führt, wodurch man, für diese Θ, die Darstellung des ursprünglichen Integrals (1) erhält. Damit ist bewiesen:

Satz. *Es gilt die Gleichung*

$$A(x,\xi) = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}w^2 + \xi w} w^x \, dw$$

$$= x^{1/2 x} e^{-1/2 x} e^{\xi \sqrt{x}} \tfrac{1}{2} \{ \sum_{\nu=0}^{k-1} Q_\nu(\xi) \, x^{-1/2 \nu} + c_k x^{-1/2 k} \} \tag{28}$$

$|c_k| < C_k$ *(unabhängig von* x*),* $k = 1, 2, 3, \ldots$, *gleichmäßig im Sektor* $|\arg x| \leqq \pi - \varepsilon$, $x_0 \leqq |x|$.

Die Grenzen des Sektors sind hier, im Gegensatz zu (14), nicht durch die Funktion A, sondern durch $e^{2\pi i x}$ bedingt.

Wenn man nur zu dieser Darstellung gelangen will, so ist nicht alles erforderlich, was in § 2 bewiesen wurde; man kann vom Integral (2) ausgehen und es genügt $|\Theta| < \frac{\pi}{2}$ zu betrachten. Die mühsamen Teile von § 2 für Θ nahe an π (in J_3) braucht man nicht und diejenigen für Θ nahe an Null (in J_1) kann man, wie soeben bemerkt, vereinfachen, indem man den Integrationsweg in 0 endigen läßt. Die Ersparnis an Umfang gegenüber § 2 ist jedoch gering und die Relationen (22) bis (27) enthalten mehr als man, umgekehrt, aus (28) erhalten kann.

Zur Vervollständigung von (28) sei bemerkt, daß man unter Verwendung von (5) und (20) in (21) erhält

$$c_{\nu,\mu}(\xi) + (-1)^\nu c_{\nu,\mu}(-\xi) = 2^{-1/2 n + 1} e^{-\pi i n/2} i \sqrt{2\pi} \, e^{\frac{1}{4}\xi^2} U_{n-1}(i 2^{-1/2} \xi)$$

$$(\nu + 2\mu + 1 = n)$$

und

$$Q_\nu(\xi) = \sqrt{\pi} \, 2^{-\nu/2 + 1} e^{-\pi i \nu/2} e^{\frac{1}{4}\xi^2} \sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^\mu 2^{-\mu} g_{\nu,\mu} U_{\nu + 2\mu}(i 2^{-1/2} \xi)$$

speziell $Q_0 = 2\sqrt{\pi} \, e^{\frac{1}{4}\xi^2}$; $Q_1 = {}^1/_{12} \sqrt{\pi} \, e^{\frac{1}{4}\xi^2} \xi (\xi^3 + 6)$; damit sind alle Koeffizienten der Reihe durch „elementare" Funktionen von ξ explizit dargestellt.

Die zwei ersten Terme der Reihe (28) für $+\xi$ und für $-\xi$ sind aufgefunden worden von P. M. Batchelder [1] S. 194; jedoch ist der dort

ngegebene Gültigkeitssektor kleiner als der hier gefundene und die Funk-ionen, die diese asymptotischen Darstellungen besitzen, werden von Bat-helder nicht in konvergierender Form bestimmt.

$A(x, \xi)$ und, wie man durch Substitutionen einfachster Art zeigt, $e^{\pi i x} A(x, -\xi)$ sind Lösungen der Differenzengleichung (3); somit sind auch die linken Seiten in (22) und (23) Lösungen von (3). Letztere zwei Funktionen und $A(x), \xi)$, $e^{\pi i x} A(x, -\xi)$ sind vier Lösungen von (3), die jeweils in der ganzen x-Ebene mit Ausnahme eines kleinen Sektors durch die gefundenen Reihen gleichmäßig asymptotisch dargestellt werden.

Literaturverzeichnis.

P. M. Batchelder.

[1] An introduction to linear difference equations. Cambridge, Mass., The Harvard Univ. Press, 1927.

O. Perron.

[2] Über die näherungsweise Berechnung von Funktionen großer Zahlen. Sitz.-Ber. kgl. Bayr. Akad. Wiss. (1917), S. 191—219.

G. N. Watson.

[3] The harmonic Functions associated with the parabolic Cylinder. Proc. London Math. Soc. (2) 8 (1910), S. 393—421.

(Eingegangen am 26. Mai 1936.)

Zur Integration einer Klasse von Systemen linearer homogener partieller Differentialgleichungen erster Ordnung.

Von

A. Tonolo in Padua.

§ 1.

Einleitung.

Die Methode, die ich in meinen früheren Abhandlungen[1]) entwickelt habe, um die Auflösungsformeln der Diracschen Gleichungen der Wellenmechanik des Drehelektrons festzustellen, läßt sich auf alle Diracschen Systeme von linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten anwenden, wenn die Zahl der Gleichungen gleich der der Unbekannten ist und wenn außerdem der entsprechende Laplacesche Operator von elliptischem oder normal-hyperbolischem Typus ist und eine ungerade Zahl $m \geqq 3$ von positiven Koeffizienten hat. Unter diesen Bedingungen werden in der vorliegenden Arbeit die Darstellungsformeln der Integrale der obgenannten Systeme in beiden folgenden Aufgaben gegeben. Wir betrachten die zum negativen Koeffizienten des normal-hyperbolischen Laplaceschen Operators gehörige Veränderliche als Zeitvariable t und die übrigen m Veränderlichen x_k als Cartesische rechtwinklige Koordinaten eines m-dimensionalen linearen Hyperraumes. Im Anfangswertproblem habe ich die Ausdrücke der Integrale des oben erwähnten Systems durch Quadraturen erhalten, vorausgesetzt, daß die Anfangswerte der Integrale im Hyperraum x_k bekannt sind. Im Randwertproblem finde ich diese Darstellungsformeln zu jeder beliebigen Zeit in den inneren Punkten eines Gebietes x_k, das von einer $m-1$-dimensionalen geschlossenen Hyperfläche begrenzt ist, vorausgesetzt, daß die Werte der Integrale auf der Mannigfaltigkeit in jeder beliebigen Zeit gegeben sind. Meine Methode, die auf zwei Tedoneschen Formeln — Verallgemeinerungen der entsprechenden Poissonschen und Kirchhoffschen Formeln der räumlichen Wellengleichung — be-

[1]) A. Tonolo, Integrazione con quadrature di un particolare sistema di Dirac, in dem dem Professor Berzolari gewidmeten Bande, Verlag Rossetti (Pavia), 1936; A. Tonolo, Integrazione con quadrature delle equazioni di Dirac, Annali di matematica pura ed applicata, Vol. XV, Serie Quarta, 1936.

ruht, gestattet obige Aufgaben folgendermaßen zu lösen: Man erhält die Darstellungsformeln der Integrale des gegebenen Diracschen Systems, wenn man an Stelle der unbekannten Funktionen die gleiche Anzahl von geeignet bestimmten Funktionen der Veränderlichen t, x_k einsetzt, die nur durch Quadraturen dargestellt werden [2]).

§ 2.

Tedonesche Formeln zur Integration der Gleichung

$$\sum_1^m {}_k \frac{\partial^2 U}{\partial x_k^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0.$$

a) In der Gleichung

$$\text{(1)} \qquad \underset{2}{\Delta} U - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \qquad \underset{2}{\Delta} = \sum_1^m {}_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2},$$

$$m = 2p + 1 \geqq 3$$

fassen wir die Veränderliche t als Zeitvariable und die übrigen Veränderlichen x_k als Cartesische rechtwinklige Koordinaten eines m-dimensionalen linearen Hyperraumes S_m auf. In der vorliegenden Untersuchung ist es von der größten Bedeutung, daß die Zahl $m \geqq 3$ ungerade ist. Nun sei $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ein beliebiger Punkt von S_m, t ein beliebiger positiver Zeitwert, Σ die Fläche einer $m-1$-dimensionalen Hyperkugel um den Punkt P vom Radius $r = t$; ferner seien $f(Q)$, $\varphi(Q)$ zwei reguläre Ortsfunktionen in S_m. Setzen wir dann

$$\text{(2)} \qquad F(P,t) = \frac{1}{(4\pi)^p} \sum_0^{p-1} {}_i\, 2^{p-1-i} \frac{(p-1+i)!}{i!\,(p-1-i)!} D_t^{p-1-i} \int_\Sigma \frac{f(Q)}{r^{p+i}}\, d\Sigma,$$

$$\text{(3)} \qquad \Phi(P,t) = \frac{1}{(4\pi)^p} \sum_0^{p-1} {}_i\, 2^{p-1-i} \frac{(p-1+i)!}{i!\,(p-1-i)!} D_t^{p-1-i} \int_\Sigma \frac{\varphi(Q)}{r^{p+i}}\, d\Sigma,$$

wobei das Symbol D_t^{p-1-i} die $(p-1-i)$-te Ableitung nach t bedeutet, so erfüllt nach Tedone die Funktion

$$\text{(4)} \qquad U(P,t) = \Phi(P,t) + D_t F(P,t)$$

die Gleichung (1) und außerdem stimmen $U(P,t)$ und ihre erste Ableitung nach t für $t = 0$ in S_m mit den vorgeschriebenen Funktionen $f(P)$, $\varphi(P)$ überein.

---

[2]) Mit der Integration der Diracschen Systeme haben sich unter Anwendung verschiedener Methoden beschäftigt die Herren: C. Moisil, Sur une classe de Systèmes aux dérivées partielles de la Physique mathématique, Bucarest, Imprimerie F. Göbl Fils (1931), S. 1—40; N. Théodoresco, Le problème de Cauchy pour une classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles, Annali della R. Scuola normale Superiore di Pisa, serie II, Vol. IV (1935), S. 51—70.

b) Ein im Endlichen gelegenes Hyperraumstück Ω sei von einer $m-1$-dimensionalen geschlossenen Hyperfläche Σ begrenzt; P bedeutet einen beliebigen, aber bestimmten und im Innern gelegenen Punkt von Ω, Q einen auf Σ laufenden Punkt, r die Entfernung PQ, $d\Sigma$ das Hyperflächenelement an der Stelle Q, n ist die in Q nach Ω gezogene Normale der Hyperfläche Σ und $\frac{\partial}{\partial n}$ die entsprechende Normalableitung auf Σ. Man bezeichnet ferner mit $[f]$ das, was eine beliebig gewählte Funktion f der Veränderlichen x_k, t wird, wenn an die Stelle von t die Größe $t-r$ tritt: d. h. $[f] = f(x_1, x_2, \ldots, x_m, t-r)$. Es sei nun U eine reguläre Funktion von x_k und t, die zu jeder positiven Zeit t im Hyperraum Ω die Gleichung (1) erfüllt. Nach Tedone läßt sich der Wert der Funktion U im Punkt P und in einer beliebigen aber bestimmten positiven Zeit t in der folgenden Form darstellen[3]):

$$(5)\quad U(P,t) = \frac{1}{(4\pi)^p} \sum_0^{p-1} {}_i\, 2^{p-1-i} \frac{(p-1+i)!}{i!\,(p-1-i)!} D_t^{p-1-i} \int_\Sigma \left\{ [U] \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{p+i}} - \frac{1}{r^{p+i}} \left[\frac{\partial U}{\partial n}\right] - \frac{1}{r^{p+i}} \frac{\partial r}{\partial n} \left[\frac{\partial U}{\partial t}\right] \right\} d\Sigma.$$

§ 3.

Das Anfangswertproblem für die Diracschen Systeme und dessen Lösung durch Quadraturen.

Es sei[4])

$$(6)\quad f_r \equiv \sum_1^n {}_h\, \gamma_{rh}^0 \frac{\partial \varphi_h}{\partial t} + \sum_1^n {}_h \sum_1^m {}_k\, \gamma_{rh}^k \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_k} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

ein System von n linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit n Unbekannten φ_h, die von den $m+1$ unabhängigen Veränderlichen t, x_k abhängen. Wir setzen voraus, daß die Koeffizienten γ_{rh}^0, γ_{rh}^k konstant sind und außerdem, daß sie die Elemente von $m+1$

[3]) Diese Formel findet man auch in einer Note Volterras, die der Arbeit Tedones zeitlich vorangeht. Volterra, Sulle vibrazioni luminose nei mezzi isotropi, Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. I, serie 5 (1892), S. 161—170; Tedone, Sull' integrazione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \sum_1^m {}_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2},$$

Annali di matematica, T. XXVII (1898), S. 1—23.

[4]) In der ganzen Arbeit durchlaufen die Indizes h, r die Werte 1, 2, ..., n und der Index k die Werte 1, 2, ..., m.

Diracschen Matrizen bilden[5]) (r Index der Zeile, h Index der Spalte). Bezeichnet man dieselben mit γ^p, dann bestehen definitionsgemäß die Identitäten

$$\gamma^p \gamma^q + \gamma^q \gamma^p = 2\,\delta^{pq}\, e, \tag{7}$$
$$(p, q = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

wobei e die Einheitsmatrix darstellt, und

$$\delta^{pq} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } p \neq q, \\ 1, & \text{„ } p = q \neq 0, \\ -1, & \text{„ } p = q = 0. \end{cases}$$

Mit dem Summenzeichen ist (7) mit den folgenden Gleichungen identisch

$$\Sigma_h (\gamma^p_{ih}\gamma^q_{hr} + \gamma^q_{ih}\gamma^p_{hr}) = 2\,\delta^{pq}\, e_{ir}, \tag{8}$$

worin e_{ir} die Elemente der Einheitsmatrix bedeuten. Unter diesen Voraussetzungen ist es bekannt, daß die Identitäten

$$\sum\nolimits_h \gamma^0_{rh} \frac{\partial f_h}{\partial t} + \sum\nolimits_{hk} \gamma^k_{rh} \frac{\partial f_h}{\partial x_k} = \tfrac{1}{2} \Delta \varphi_r - \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial t^2} \tag{9}$$

gelten, und deshalb bilden die Funktionen φ_h, wenn sie den Gleichungen (6) genügen, ebenso viele Integrale der Gleichung

$$\tfrac{1}{2} \Delta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \tag{10}$$

In bezug auf das System (6) wollen wir zuerst das folgende Anfangswertproblem lösen: Im ganzen linearen Hyperraum S_m sind die Anfangswerte $\varphi_h(P)$ der Integrale $\varphi_h(P, t)$ für $t = 0$ gegeben. Es handelt sich darum, die Darstellungsformeln der Funktionen $\varphi_h(P, t)$ im Hyperraum S_m für jeden positiven Zeitwert durch Quadraturen herzustellen.

Zuerst beobachten wir, daß die Kenntnis der Anfangswerte $\varphi_h(P)$ in S_m, wegen des Systems, gestattet, auch die Anfangswerte $\frac{\partial \varphi_h(P, t)}{\partial t}$ der Ableitungen zu bestimmen. In der Tat schreiben wir in den Gleichungen (6) l anstatt r, dann multiplizieren wir dieselben mit γ^0_{jl} und summieren nach l[6]). Unter Benutzung der Diracschen Identitäten (8) bekommt man für $t = 0$

$$\varphi^{(0)}_j = \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial t}\right)_{t=0} = \sum\nolimits_{hk} \Gamma^{0\,k}_{jh} \frac{\partial \varphi^{(0)}_h}{\partial x_k} = -\sum\nolimits_{hk} \Gamma^{k\,0}_{jh} \frac{\partial \varphi^{(0)}_h}{\partial x_k}, \tag{11}$$

wo die Größen $\Gamma^{0\,k}_{jh}$ aus den Größen $\gamma^0_{jl}, \gamma^k_{lh}$ nach dem folgenden Gesetze gebildet sind:

$$\Gamma^{0\,k}_{jh} = \Sigma_l \gamma^0_{jl} \gamma^k_{lh} = -\Sigma_l \gamma^k_{jl} \gamma^0_{lh} = -\Gamma^{k\,0}_{jh}. \tag{12}$$

---

[5]) Gemäß einer Bemerkung Théodorescos muß die Zahl n gerade sein.

[6]) In der ganzen Arbeit durchlaufen die Indizes j, l die Werte $1, 2, \ldots, n$.

Mit Berücksichtigung der ersten Tedoneschen Formel (4) setzen wir

$$(13)\quad F_j(P,t)=\frac{1}{(4\pi)^p}\sum_0^{p-1}{}_i\,2^{p-1-i}\frac{(p-1+i)!}{i!\,(p-1-i)!}D_t^{p-1-i}\int_\Sigma\frac{\varphi_j^{(0)}(Q)}{r^{p+i}}d\Sigma,$$

$$(14)\quad \Phi_j(P,t)=\frac{1}{(4\pi)^p}\sum_0^{p-1}{}_i\,2^{p-1-i}\frac{(p-1+i)!}{i!\,(p-1-i)!}D_t^{p-1-i}\int_\Sigma\frac{\dot\varphi_j^{(0)}(Q)}{r^{p+i}}d\Sigma,$$

$$(15)\quad \varphi_j(P,t)=\Phi_j(P,t)+D_tF_j(P,t)$$

und beweisen, daß das obige Problem durch die Funktionen $\varphi_j(P,t)$ vollständig gelöst wird. Zu diesem Zwecke ersetzen wir in den ersten Gliedern der Gleichungen (6) die Unbekannten φ_h durch die gefundenen Funktionen (15) und bezeichnen mit f_r das Ergebnis dieser Substitutionen. Es gelten die Identitäten (9), nur sind jetzt die zweiten Glieder gleich Null, weil unsere Funktionen φ_j der Gleichung (10) genügen. Deshalb können wir behaupten, daß die $f_r(P,t)$ ebenso viele Integrale der Gleichung

$$\underset{2}{\Delta}f-\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0$$

bilden. Ihre Werte lassen sich im Punkte P und zur Zeit t durch die Tedonesche Formel (4) ausdrücken, in der natürlich $f(P)$ und $\varphi(P)$ durch die $f_r^{(0)}(P)=f_r(P,0)$ und $\dot f_r^{(0)}(P)=\left(\frac{\partial f_r(P,t)}{\partial t}\right)_{t=0}$ ersetzt werden müssen. Für $t=0$ aber verschwindet $f_r(P,t)$, weil die $\varphi_r(P,t)$ und $\frac{\partial\varphi_r(P,t)}{\partial t}$ für $t=0$ mit den Anfangswerten $\varphi_r^{(0)}(P)$, $\dot\varphi_r^{(0)}(P)$ übereinstimmen. Man erhält also $f_r(P,t)=0$ für $t=0$ und für irgendein P. Aus (9), wo jetzt die zweiten Glieder gleich Null sind, folgt auch $\frac{\partial f_r(P,t)}{\partial t}=0$ für $t=0$ und für jedes P. Der Tedoneschen Formel (4) gemäß erkennt man, daß $f_r(P,t)$ für jeden beliebig gewählten Punkt P und positiven Zeitwert verschwindet. Die gewonnenen Funktionen (15) $\varphi_j(P,t)$ lösen also die obengenannte Anfangswertaufgabe auf.

Um den Darstellungsformeln (15) eine übersichtliche Form zu geben, setzen wir die Ausdrücke (11) in (14) ein.

Man bekommt

$$(16)\quad (4\pi)^p\,\Phi_j(P,t)$$
$$=\sum_0^{p-1}{}_i\,2^{p-1-i}\frac{(p-1+i)!}{i!\,(p-1-i)!}D_t^{p-1-i}\int_\Sigma\frac{\Sigma_{hk}\,\Gamma_{jh}^{0k}\frac{\partial\varphi_h^{(0)}}{\partial\xi_k}}{r^{p+i}}d\Sigma,$$

wobei wir, um jede Verwirrung zu vermeiden, mit ξ_k die Koordinaten des variablen Punktes Q auf der Hyperkugel Σ bezeichnet haben. Es sei dx_k die Länge einer festen unendlich kleinen Translation von Σ in der x_k-Richtung. Wegen dieser Verschiebung verändert sich die Funktion φ_h um $\frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_k} dx_k$ und das entsprechende Integral

$$\int_\Sigma \frac{\varphi_h}{r^{p+i}} d\Sigma$$

verändert sich um

$$\int_\Sigma \frac{\frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_k} dx_k}{r^{p+i}} d\Sigma = dx_k \int_\Sigma \frac{\frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_k}}{r^{p+i}} d\Sigma,$$

weil dx_k für alle Flächenelemente $d\Sigma$ gleich ist. Hieraus schließt man

$$\int_\Sigma \frac{\frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_k}}{r^{p+i}} d\Sigma = \frac{\partial}{\partial x_k} \int_\Sigma \frac{\varphi_h}{r^{p+i}} d\Sigma.$$

Aus dieser Beziehung folgt, wegen (12),

$$(17)\quad \Phi_j(P,t) = -\frac{1}{(4\pi)^p} \sum_{lk} \gamma_{jl}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\sum_{i=0}^{i=p-1} {}_{ih}\, 2^{p-1-i} \frac{(p-1+i)!}{i!\,(p-1-i)!} D_t^{p-1-i} \int_\Sigma \frac{\gamma_{lh}^0 \varphi_h^{(0)}}{r^{p+i}} d\Sigma \right].$$

Führen wir jetzt die folgenden n Funktionen des Ortes P und der Zeit t ein

$$(18)\quad \psi_l(P,t) = -\frac{1}{(4\pi)^p} \sum_{i=0}^{i=p-1} {}_{ih}\, 2^{p-1-i} \frac{(p-1+i)!}{i!\,(p-1-i)!} D_t^{p-1-i} \int_\Sigma \frac{\gamma_{lh}^0 \varphi_h^{(0)}}{r^{p+i}} d\Sigma,$$

dann beobachten wir, daß mit Rücksicht auf (8) die Relationen

$$(19)\quad \sum_l \gamma_{jl}^0 \psi_l = \frac{1}{(4\pi)^p} \sum_0^{p-1} {}_i\, 2^{p-1-i} \frac{(p-1+i)!}{i!\,(p-1-i)!} D_t^{p-1-i} \int_\Sigma \frac{\varphi_j^{(0)}(Q)}{r^{p+i}} d\Sigma = F_j(P,t)$$

gelten. Aus (15) erhalten wir, wegen (17), (19), durch triviale Umbenennung der Indizes, die endgültigen gewünschten Ausdrücke der $\varphi_r(P,t)$ in der übersichtlichen Form

$$\varphi_r(P,t) = \sum_1^n {}_h \gamma_{rh}^0 \frac{\partial \psi_h}{\partial t} + \sum_1^n {}_h \sum_1^m {}_k \gamma_{rh}^k \frac{\partial \psi_h}{\partial x_k}.$$

§ 4.

Das Randwertproblem für die Diracschen Systeme und dessen Lösung durch Quadraturen.

In bezug auf das System (6) wollen wir das folgende Randwertproblem lösen: Auf einer $m-1$-dimensionalen geschlossenen regulären Hyperfläche Σ des Hyperraumes S_m sind die Integrale $\varphi_h(P, t)$ zu jeder positiven Zeit gegeben. Es handelt sich darum, die Darstellungsformeln der Funktionen $\varphi_h(P, t)$ im Innern des von Σ begrenzten Gebietes Ω und für jeden positiven Zeitwert durch Quadraturen herzustellen.

Die Anwendung der zweiten Tedoneschen Formel (5) auf die Funktion φ_j ermöglicht die Lösung der Aufgabe. Der Integrand dieser Formel enthält $[\varphi_j]$, $\left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial t}\right]$, $\left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial n}\right]$. Wegen der „Daten" sind die ersten zwei von diesen Funktionen auf Σ vollkommen bekannt; nun behaupte ich, daß auch die dritte Funktion auf Σ bestimmt ist. Um das zu beweisen, bezeichnen wir mit τ die Zeitvariable t und mit Σ^* ein Stück von Σ und setzen voraus, daß dessen Gleichung von der Form

$$\xi_m = \xi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1})$$

ist. Wegen der „Daten" wird jede Funktion

$$\varphi_j = \varphi_j(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \tau)$$

auf diesem Stück und für $\tau = t - r$ eine bekannte Funktion

$$\overline{\varphi}_j = \overline{\varphi}_j(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}, t)$$

per Veränderlichen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}, t$. Deshalb sind auch ihre Ableitungen nach ξ_q $(q = 1, 2, \ldots, m-1)$ für jede Zeit bestimmt. Durch Anwendung der Kettenregel auf Funktionen von mehreren Variablen gelten auf Σ^* die Gleichungen

$$\frac{\partial \overline{\varphi}_j}{\partial \xi_q} = \left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_q}\right] + \left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_m}\right]\frac{\partial \varphi_m}{\partial \xi_q} - \left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial \tau}\right]\frac{\partial r}{\partial \xi_q} \tag{20}$$

$$(q = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Fügen wir diese $n(m-1)$ Relationen den n Diracschen Gleichungen hinzu, so bekommen wir ein System von nm linearen nichthomogenen Gleichungen mit den nm Unbekannten $\left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_k}\right]$. Stellen wir uns obige Gleichungen nach diesen Differentialquotienten aufgelöst vor, so wird $\left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_k}\right]$ auf Σ^* durch die totalen $\frac{\partial \overline{\varphi}_j}{\partial \xi_q}$ und die partiellen $\left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial \tau}\right]$ Differen-

tialableitungen der Funktionen φ_j dargestellt. Also sind auf der ganzen Hyperfläche Σ alle räumlichen partiellen Ableitungen $\left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_k}\right]$ für jeden positiven Zeitwert, und damit auch die Normalableitung $\left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial n}\right]$, vollkommen bestimmt.

Im folgenden wollen wir den Darstellungsformeln (5), in denen natürlich an die Stelle von U die Funktion φ_j gesetzt wird, eine übersichtliche Form geben. Um jede Verwechslung zu vermeiden, bezeichnen wir mit ξ_k die Koordinaten eines im Innern des Gebietes Ω oder auf der Hyperfläche Σ bewegten Punktes und mit τ die Zeitvariable, dagegen bezeichnen wir mit x_k die Koordinaten eines nur im Innern von Ω beliebig gelegenen festen Punktes P und mit t einen bestimmten positiven aber beliebigen Zeitwert. Darauf fixieren wir in den Gleichungen (6) einen Index k und setzen l an die Stelle von r. Man hat

$$\sum_h \gamma_{lh}^k \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_k} = -\sum_h \gamma_{lh}^0 \frac{\partial \varphi_h}{\partial \tau} - \sum_{hk'} \gamma_{lk'}^{k'} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_{k'}}, \tag{21}$$

wo der Index k' nur die Indizes $1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, m$ durchlaufen soll. Multiplizieren wir (21) mit γ_{jl}^k und summieren wir nach l, so ergibt sich auf Grund der Diracschen Identitäten (8)

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_k} = -\sum_h \Gamma_{jh}^{k0} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \tau} - \sum_{hk'} \Gamma_{jh}^{kk'} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_{k'}}; \tag{22}$$

hierbei sind die Koeffizienten $\Gamma_{jh}^{kk'}$ aus den Koeffizienten γ_{jh}^k, $\gamma_{jh}^{k'}$ nach dem folgenden Gesetze gebildet:

$$\Gamma_{jh}^{kk'} = \sum_l \gamma_{jl}^k \gamma_{lh}^{k'}. \tag{23}$$

Aus (22) folgt

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial n} = \sum_k \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_k} \cos n\,\xi_k = -\sum_{hk} \Gamma_{jh}^{k0} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \tau} \cos n\,\xi_k - \sum_h \sum_{kk'}{}' \Gamma_{jh}^{kk'} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_{k'}} \cos n\,\xi_k. \tag{24}$$

Die Glieder der Summe

$$\sum_{kk'}{}' \Gamma_{jh}^{kk'} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_{k'}} \cos n\,\xi_k \tag{25}$$

lassen sich durch Umordnung in den partiellen Summen

$$-\Gamma_{jh}^{kk'} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_{k'}} \cos n\,\xi_k - \Gamma_{jh}^{k'k} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_k} \cos n\,\xi_{k'}$$

vereinigen, die unter Berücksichtigung der Identitäten (8) in der folgenden Form

$$\Gamma_{jh}^{kk'}\left\{\frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_k}\cos n\,\xi_{k'}-\frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_{k'}}\cos n\,\xi_k\right\}$$

geschrieben werden können. Infolgedessen nimmt die Summe (25) die endgültige Gestalt

$$\sum_{kl}{}' \Gamma_{jh}^{kl}\left\{\frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_k}\cos n\,\xi_l-\frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_l}\cos n\,\xi_k\right\} \tag{26}$$

an, wobei jetzt die Summe Σ'_{kl} sich über alle Kombinationen ohne Wiederholung zur zweiten Klasse der Indizes $1, 2, \ldots, n$ erstrecken soll. Wir haben also

$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial n}=-\sum_{hk}\Gamma_{jh}^{k0}\frac{\partial\varphi_h}{\partial\tau}\cos n\,\xi_k + \sum_h\sum_{kl}{}'\Gamma_{jh}^{kl}\left\{\frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_k}\cos n\,\xi_l-\frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_l}\cos n\,\xi_k\right\}. \tag{27}$$

In der Tedoneschen Formel (5) setzt man φ_j an die Stelle von U; man erhält

$$(4\pi)^p\varphi_j(P,t)=\sum_0^{p-1}{}_i\,2^{p-1-i}\frac{(p-1+i)!}{i!\,(p-1-i)!}D_t^{p-1-i}\int_\Sigma\left\{[\varphi_j]\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{p+i}} - \frac{1}{r^{p+i}}\left[\frac{\partial\varphi_j}{\partial n}\right]-\frac{1}{r^{p+i}}\left[\frac{\partial\varphi_j}{\partial\tau}\right]\frac{\partial r}{\partial n}\right\}d\Sigma. \tag{28}$$

Unter Benutzung von (27) bekommt man

$$\int_\Sigma\frac{1}{r^{p+i}}\left[\frac{\partial\varphi_j}{\partial n}\right]d\Sigma=-\sum_{hk}\Gamma_{jh}^{k0}\int_\Sigma\frac{1}{r^{p+i}}\left[\frac{\partial\varphi_h}{\partial\tau}\right]\cos n\,\xi_k\,d\Sigma + \sum_h\sum_{kl}{}'\Gamma_{jh}^{kl}\int_\Sigma\frac{1}{r^{p+i}}\left[\frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_k}\cos n\,\xi_l-\frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_l}\cos n\,\xi_k\right]d\Sigma. \tag{29}$$

Es gelten, laut der Kettenregel, die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial[\varphi_h]}{\partial\xi_k}=\left[\frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_k}\right]-\left[\frac{\partial\varphi_h}{\partial\tau}\right]\frac{\partial r}{\partial\xi_k}, \tag{30}$$

$$\frac{\partial[\varphi_h]}{\partial\xi_l}=\left[\frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_l}\right]-\left[\frac{\partial\varphi_h}{\partial\tau}\right]\frac{\partial r}{\partial\xi_l}. \tag{31}$$

Daraus folgt

$$(32)\qquad \int_{\Sigma}\left[\frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_k}\cos n\xi_l-\frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_l}\cos n\xi_k\right]\frac{d\Sigma}{r^{p+i}}$$

$$=\int_{\Sigma}\left\{\frac{\partial[\varphi_h]}{\partial\xi_k}\cos n\xi_l-\frac{\partial[\varphi_h]}{\partial\xi_l}\cos n\xi_k\right\}\frac{d\Sigma}{r^{p+i}}$$

$$+\int_{\Sigma}\left[\frac{\partial\varphi_h}{\partial\tau}\right]\left\{\frac{\partial r}{\partial\xi_k}\cos n\xi_l-\frac{\partial r}{\partial\xi_l}\cos n\xi_k\right\}\frac{d\Sigma}{r^{p+i}}.$$

Aus dem Greenschen Satze ergibt sich

$$(33)\qquad \int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial\xi_k}\frac{\partial}{\partial\xi_l}\frac{[\varphi_h]}{r^{p+i}}d\Omega=-\int_{\Sigma}\cos n\xi_k\frac{\partial}{\partial\xi_l}\frac{[\varphi_h]}{r^{p+i}}d\Sigma,$$

$$\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial\xi_l}\frac{\partial}{\partial\xi_k}\frac{[\varphi_h]}{r^{p+i}}d\Omega=-\int_{\Sigma}\cos n\xi_l\frac{\partial}{\partial\xi_k}\frac{[\varphi_h]}{r^{p+i}}d\Sigma.$$

Durch Subtraktion bekommt man[7])

$$(34)\qquad \int_{\Sigma}[\varphi_h]\left\{\cos n\xi_k\frac{\partial}{\partial\xi_l}\frac{1}{r^{p+i}}-\cos n\xi_l\frac{\partial}{\partial\xi_k}\frac{1}{r^{p+i}}\right\}d\Sigma$$

$$=\int_{\Sigma}\left\{\cos n\xi_l\frac{\partial[\varphi_h]}{\partial\xi_k}-\cos n\xi_k\frac{\partial[\varphi_h]}{\partial\xi_l}\right\}\frac{d\Sigma}{r^{p+i}}$$

---

[7]) Man erhält die Formel (34), um genau zu sein, nach dem folgenden wohlbekannten Verfahren: Wir wählen als Integrationsbereich den Bereich Ω mit Ausnahme einer kleinen Hyperkugel vom Radius ε und mit P als Mittelpunkt. Zu der Randhyperfläche Σ kommt dann bei der Integration die Hyperkugeloberfläche σ hinzu. Man erhält

$$(\alpha)\quad \int_{\Sigma}[\varphi_h]\left\{\cos n\xi_k\frac{\partial}{\partial\xi_l}\frac{1}{r^{p+i}}-\cos n\xi_l\frac{\partial}{\partial\xi_k}\frac{1}{r^{p+i}}\right\}d\Sigma$$

$$+\int_{\Sigma}\left\{\cos n\xi_k\frac{\partial[\varphi_h]}{\partial\xi_l}-\cos n\xi_l\frac{\partial[\varphi_h]}{d\xi_k}\right\}\frac{d\Sigma}{r^{p+i}}$$

$$+\int_{\sigma}[\varphi_h]\left\{\cos n\xi_k\frac{\partial}{\partial\xi_l}\frac{1}{r^{p+i}}-\cos n\xi_l\frac{\partial}{\partial\xi_k}\frac{1}{r^{p+i}}\right\}d\sigma$$

$$+\int_{\sigma}\left\{\cos n\xi_k\frac{\partial[\varphi_h]}{\partial\xi_l}-\cos n\xi_l\frac{\partial[\varphi_h]}{\partial\xi_k}\right\}\frac{d\sigma}{r^{p+i}}=0.$$

Auf σ verschwindet das dritte Integral und es bleibt nur das vierte. Es gilt aber

$$d\sigma=\varepsilon^{m-1}d\omega=\varepsilon^{2p}d\omega,$$

und deshalb aus (32) die endgültige Formel

$$(35)\qquad \int_\Sigma \left[\cos n\,\xi_l \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_k} - \cos n\,\xi_k \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_l}\right] \frac{d\Sigma}{r^{p+i}}$$

$$= \int_\Sigma [\varphi_h] \left\{\cos n\,\xi_k \frac{\partial}{\partial \xi_l}\frac{1}{r^{p+i}} - \cos n\,\xi_l \frac{\partial}{\partial \xi_k}\frac{1}{r^{p+i}}\right\} d\Sigma$$

$$+ \int_\Sigma \left[\frac{\partial \varphi_h}{\partial \tau}\right] \left\{\cos n\,\xi_l \frac{\partial r}{\partial \xi_k} - \cos n\,\xi_k \frac{\partial r}{\partial \xi_l}\right\} \frac{d\Sigma}{r^{p+i}}.$$

Man kann (29) wegen (35) in der folgenden Form schreiben

$$(36)\qquad \int_\Sigma \frac{1}{r^{p+i}}\left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial n}\right] d\Sigma = -\sum_h \sum_{k} \Gamma_{jh}^{k0} \int_\Sigma \cos n\,\xi_k \left[\frac{\partial \varphi_h}{\partial \tau}\right] \frac{d\Sigma}{r^{p+i}}$$

$$+ \sum_h \sum_{kl}{}' \Gamma_{jh}^{kl} \int_\Sigma [\varphi_h] \left\{\cos n\,\xi_k \frac{\partial}{\partial \xi_l}\frac{1}{r^{p+i}} - \cos n\,\xi_l \frac{\partial}{\partial \xi_k}\frac{1}{r^{p+i}}\right\} d\Sigma$$

$$+ \sum_h \sum_{kl}{}' \Gamma_{jh}^{kl} \int_\Sigma \left[\frac{\partial \varphi_h}{\partial \tau}\right] \left\{\cos n\,\xi_l \frac{\partial r}{\partial \xi_k} - \cos n\,\xi_k \frac{\partial r}{\partial \xi_l}\right\} \frac{d\Sigma}{r^{p+i}}.$$

Es ist

$$\left[\frac{\partial \varphi_h}{\partial \tau}\right] = \frac{\partial [\varphi_h]}{\partial t} = -\frac{\partial [\varphi_h]}{\partial r},$$

und deshalb

$$(37)\qquad \left\{[\varphi_h] \frac{\partial}{\partial \xi_l}\frac{1}{r^{p+i}} - \frac{1}{r^{p+1}}\frac{\partial r}{\partial \xi_l}\left[\frac{\partial \varphi_h}{\partial \tau}\right]\right\} \cos n\,\xi_k$$

$$= \left\{[\varphi_h] \frac{\partial}{\partial \xi_l}\frac{1}{r^{p+i}} + \frac{1}{r^{p+i}}\frac{\partial [\varphi_h]}{\partial \xi_l}\right\} \cos n\,\xi_k = \cos n\,\xi_k \frac{\partial}{\partial \xi_l}\frac{[\varphi_h]}{r^{p+i}}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{[\varphi_h]}{r^{p+i}} \cos n\,\xi_k,$$

wo jetzt und im folgenden bei der Bildung der räumlichen Ableitung nach x_l nur das Argument $t - r$ variieren soll. Auf ähnliche Art folgt

$$(38)\qquad \left\{[\varphi_h] \frac{\partial}{\partial \xi_k}\frac{1}{r^{p+i}} - \frac{1}{r^{p+i}}\frac{\partial r}{\partial \xi_k}\left[\frac{\partial \varphi_h}{\partial \tau}\right]\right\} \cos n\,\xi_l$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{[\varphi_h]}{r^{p+i}} \cos n\,\xi_l.$$

---

wo $d\omega$ das Flächenelement der Einheitshyperkugel bedeutet. Man erhält also

$$\int_\sigma \left\{\cos n\,\xi_k \frac{\partial [\varphi_h]}{\partial \xi_l} - \cos n\,\xi_l \frac{\partial [\varphi_h]}{\partial \xi_k}\right\} \frac{d\sigma}{\varepsilon^{p+i}}$$

$$= \varepsilon^{p-i} \int \left\{\cos n\,\xi_k \frac{\partial [\varphi_h]}{\partial \xi_l} - \cos n\,\xi_l \frac{\partial [\varphi_h]}{\partial \xi_k}\right\} d\omega,$$

deshalb verschwindet beim Grenzübergang für $\varepsilon \to 0$ auch das letzte Integral der Formel (α) und es bleiben nur die ersten beiden Integrale. W. z. b. w.

Wegen (37), (38) lautet die Formel (36) folgendermaßen:

$$(39)\quad \int_\Sigma \frac{1}{r^{p+i}}\left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial n}\right] d\Sigma = -\sum_{hk} \Gamma_{jh}^{k0} \frac{\partial}{\partial t}\int_\Sigma [\varphi_h] \cos n\xi_k \frac{d\Sigma}{r^{p+i}}$$

$$-\sum_h \sum_{kl}{}' \Gamma_{jh}^{kl}\left\{\frac{\partial}{\partial x_l}\int_\Sigma [\varphi_h]\cos n\xi_k \frac{d\Sigma}{r^{p+i}} - \frac{\partial}{\partial x_k}\int_\Sigma [\varphi_h]\cos n\xi_l \frac{d\Sigma}{r^{p+i}}\right\}.$$

Man hat ferner

$$(40)\quad \int_\Sigma \left\{[\varphi_j]\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{p+i}} - \frac{1}{r^{p+i}}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial \tau}\right]\right\} d\Sigma$$

$$= \int_\Sigma \left\{[\varphi_j]\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{p+i}} + \frac{1}{r^{p+i}}\frac{\partial [\varphi_i]}{\partial n}\right\} d\Sigma$$

$$= -\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\int_\Sigma [\varphi_j]\cos n\xi_k \frac{d\Sigma}{r^{p+i}}.$$

Mit Hilfe von (39), (40) kann (28) auf folgende Weise geschrieben werden:

$$(41)\quad (4\pi)^p\ \varphi_j(P,t)$$

$$= \sum_0^{p-1}{}_i\, 2^{p-1-i}\frac{(p-1+i)!}{i!\,(p-1-i)!} D_t^{p-1-i}\left\{\sum_{hk}\Gamma_{jh}^{k0}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Sigma [\varphi_h]\cos n\xi_k\frac{d\Sigma}{r^{p+i}}\right.$$

$$+\sum_h\sum_{kl}{}'\Gamma_{jh}^{kl}\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\int_\Sigma [\varphi_h]\cos n\xi_k\frac{d\Sigma}{r^{p+i}} - \frac{\partial}{\partial x_k}\int_\Sigma [\varphi_h]\cos n\xi_l\frac{d\Sigma}{r^{p+i}}\right)$$

$$\left.-\sum_k\frac{\partial}{\partial x_k}\int_\Sigma [\varphi_j]\cos n\xi_k\frac{d\Sigma}{r^{p+i}}\right\}.$$

Mit Rücksicht auf (8) ergibt sich

$$(42)\quad \sum_{kl}{}'\Gamma_{jh}^{kl}\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\int_\Sigma [\varphi_h]\cos n\xi_k\frac{d\Sigma}{r^{p+i}} - \frac{\partial}{\partial x_k}\int_\Sigma [\varphi_h]\cos n\xi_l\frac{d\Sigma}{r^{p+i}}\right)$$

$$-\sum_k\frac{\partial}{\partial x_k}\int_\Sigma [\varphi_j]\cos n\xi_k\frac{d\Sigma}{r^{p+i}}$$

$$= \sum_{kl}\Gamma_{jh}^{kl}\frac{\partial}{\partial x_l}\int_\Sigma [\varphi_h]\cos n\xi_k\frac{d\Sigma}{r^{p+i}}$$

$$= -\sum_{kl}\Gamma_{jh}^{lk}\frac{\partial}{\partial x_l}\int_\Sigma [\varphi_h]\cos n\xi_k\frac{d\Sigma}{r^{p+i}},$$

wobei sich in den zweiten Gliedern die Summe $\sum_{kl}$ über alle Variationen mit Wiederholung zur zweiten Klasse der Indizes 1, 2, ..., n erstrecken

soll. Unter Benutzung der Ausdrücke (12), (23) von Γ_{jh}^{0k}, Γ_{jh}^{lk} folgt [8])

$$(43)\quad \sum_{hk} \Gamma_{jh}^{k0} \frac{\partial}{\partial t} \int_\Sigma [\varphi_h] \cos n\,\xi_k \frac{d\Sigma}{r^{p+i}}$$

$$= -\sum_{hk} \Gamma_{jh}^{0k} \frac{\partial}{\partial t} \int_\Sigma [\varphi_h] \cos n\,\xi_k \frac{d\Sigma}{r^{p+i}}$$

$$= -\sum_f \gamma_{jf}^0 \frac{\partial}{\partial t} \int_\Sigma \frac{\Sigma_{hk}\, \gamma_{fh}^k [\varphi_h] \cos n\,\xi_k}{r^{p+i}} d\Sigma,$$

$$(44)\quad \sum_h \sum_{kl} \Gamma_{jh}^{lk} \frac{\partial}{\partial x_l} \int_\Sigma [\varphi_h] \cos n\,\xi_k \frac{d\Sigma}{r^{p+i}}$$

$$= \sum_{fl} \gamma_{jf}^l \frac{\partial}{\partial x_l} \int_\Sigma \frac{\Sigma_{hk}\, \gamma_{fh}^k [\varphi_h] \cos n\,\xi_k}{r^{p+i}} d\Sigma.$$

Setzt man (43), (44) in die obigen Ausdrücke (42) ein, so erhält man

$$(45)\quad (4\pi)^p \varphi_j(P,t) = -\sum_f \gamma_{jf}^0 \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=0}^{i=p-1} \sum_{ihk} 2^{p-1-i} \frac{(p-1+i)!}{i!\,(p-1-i)!} D_t^{p-1-i}$$

$$\int_\Sigma \frac{\gamma_{fh}^k [\varphi_h] \cos n\,\xi_k}{r^{p+i}} d\Sigma$$

$$-\sum_{fl} \gamma_{jf}^l \frac{\partial}{\partial x_l} \sum_{i=0}^{i=p-1} \sum_{ihk} 2^{p-1-i} \frac{(p-1+i)!}{i!\,(p-1-i)!} D_t^{p-1-i}$$

$$\int_\Sigma \frac{\gamma_{fh}^k [\varphi_h] \cos n\,\xi_k}{r^{p+i}} d\Sigma.$$

Führen wir jetzt die folgenden n Funktionen des Ortes P und der Zeit t ein

$$(46)\quad \psi_f(P,t)$$

$$= -\frac{1}{(4\pi)^p} \sum_{i=0}^{i=p-1} \sum_{ihk} 2^{p-1-i} \frac{(p-1+i)!}{i!\,(p-1-i)!} D_t^{p-1-i} \int_\Sigma \frac{\gamma_{fh}^k [\varphi_h] \cos n\,\xi_k}{r^{p+i}} d\Sigma,$$

so bekommen wir aus (45), durch formale Indizesvertauschung, die endgültigen gewünschten Ausdrücke von $\varphi_j(P,t)$ in der übersichtlichen Form

$$(47)\quad \varphi_r(P,t) = \sum_1^n h\, \gamma_{rh}^0 \frac{\partial \psi_h}{\partial t} + \sum_1^n h \sum_1^m k\, \gamma_{rh}^k \frac{\partial \psi_h}{\partial x_k}.$$

Wir müssen jetzt beweisen, daß diese Funktionen (47) das System (6) erfüllen. Zu diesem Zweck führen wir in den ersten Gliedern der Gleichungen (6) an die Stelle der Unbekannten φ_h die gefundenen Funk-

[8]) Der Index f durchläuft die Werte 1, 2, ..., n.

tionen (47) ein und bezeichnen mit f_r das Resultat dieser Substitutionen. Es gelten die Identitäten (9): jetzt aber genügen unsere Funktionen (47) der Gleichung (10) und deshalb erhalten wir die Identitäten

$$\sum_{1}{}_h \gamma^0_{rh} \frac{\partial f_h}{\partial t} + \sum_{hk} \gamma^k_{rh} \frac{\partial f_h}{\partial x_k} = 0.$$

Infolgedessen bilden die Funktionen f_r ebenso viele Integrale der Gleichung

$$\underset{2}{\Delta} f - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Die f_r verhalten sich wie die φ_r und dadurch können wir auf f_r die vorhergehenden Überlegungen anwenden. Die Darstellungsformeln (47), in denen wir uns an Stelle von φ_h die Funktionen f_r gesetzt denken müssen, liefern den Wert von $f_r(P, t)$ durch Integrale ausgedrückt, die nur die Werte von f_r für jede Zeit auf Σ enthalten. Auf Σ aber sind die f_r gleich Null für jeden beliebig gewählten Zeitwert und es verschwinden deshalb auch die Werte $f_r(P, t)$ im Innern von Ω und für irgendeine Zeit. W. z. b. w.

(Eingegangen am 22. Juni 1936.)

Integralgeometrie 19.

Mittelwerte an dem Durchschnitt bewegter Flächen.

Von

O. Varga in Hamburg und Prag.

Eine Raumkurve besitzt bekanntlich zwei wesentliche Differentialinvarianten, nämlich die Krümmung und die Torsion. Gibt man sich die Raumkurve als Schnitt zweier Flächen vor, so bestimmt sie auf beiden Flächen zwei Flächenstreifen, die ihrerseits zu je drei Invarianten Veranlassung geben.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit folgender Frage: ist J eine der zuvorerwähnten Invarianten — oder eine Potenz derselben — so bilden wir durch Integration längs der Raumkurve die Invariante $I = \int J\,ds$. Wenn wir nun festsetzen, daß wir unter „allen" Lagen der Flächen F_1 in denen sie F_2 schneidet, daß $\int \dot{F}_1$ der kinematischen Dichte von F_1 verstehen[1]), dann ergibt sich als Mittelwert von I, das Integral

$$\int_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} I\,\dot{F}_1.$$

So kann man z. B. den Mittelwert für das Integral der Normalkrümmung[2]) längs der Durchschnittslinie ermitteln u. s. f. Aus unseren Ausführungen ergibt sich ferner der Mittelwert des Quadrates eines gewissen Winkels der beiden Flächen[3]). Zum Schluß behandeln wir noch diejenigen speziellen Fälle, in denen die eine Fläche eine Ebene oder eine Kugel ist.

Wie aus den späteren Auseinandersetzungen hervorgeht, ist bei der Lösung dieser Fragen eine von Herrn Blaschke angegebene kinematische „Grundformel"[4]) wesentlich.

Herrn Blaschke möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie für wertvolle Ratschläge meinen herzlichsten Dank aussprechen.

---

[1]) Vgl. W. Blaschke, Integralgeometrie 1, Ermittlung der Dichten für lineare Unterräume im E_n, Actualités scientifiques et industrielles 252, Paris 1935, Hermann & Cie., sowie den folgenden § 1.

[2]) Siehe S. 775.

[3]) Vgl. § 3 dieser Arbeit.

[4]) Vgl. W. Blaschke, Integralgeometrie 17, Zur Kinematik, Deltion Athen 1936.

§ 1.

W. Blaschkes kinematische Grundformel.

Die Lagen eines starren Systems im Raume sind vollständig bestimmt, wenn man die Bewegungen eines mit diesem System fest verbundenen Achsenkreuzes beherrscht. Sei x der Ursprung des Achsenkreuzes und e_1, e_2, e_3 die drei Einheitsvektoren seiner rechtwinkligen Achsen. Da die Bewegungen von sechs Parametern abhängen, so werden x, e_1, e_2 und e_3 Funktionen von sechs Parametern sein. Wir deuten das totale Differential durch einen übergesetzten Punkt an und bilden

$$\dot{F}_1 = (\dot{x}e_1)\,(\dot{x}\,e_2)\,(\dot{x}\,e_3)\,(\dot{e}_2\,e_3)\,(\dot{e}_3\,e_1)\,(\dot{e}_1\,e_2). \tag{1}$$

Die rechte Seite hat folgende Bedeutung; jeder Klammerausdruck ist ein skalares Produkt und das Produkt derselben ist alternierend zu nehmen[5]). (1) ist die kinematische Dichte unseres Achsenkreuzes und besitzt neben der *Bewegungsinvarianz* noch die Eigenschaft *wahlinvariant* zu sein, d. h. man darf das Achsenkreuz durch ein anderes mit ihm starr verbundenes ersetzen.

Wir betrachten nun zwei Flächen F_1 und F_2, von denen F_2 raumfest und F_1 beweglich sein soll. Ist $\dot{s}$ das Bogenelement eines auf der Durchschnittslinie beweglichen Punktes P, so bilden wir die siebenfache alternierende Differentialform $\dot{s}\dot{F}_1$. Dabei gilt über den Anfangspunkt der Zählung der Bogenlänge folgendes: wenn wir von einer beliebig gewählten Anfangsstellung der beiden Flächen und des Punktes P ausgehen, so möge sich P bei Bewegung von F_1 senkrecht zur Schnittlinie von F_1 und F_2 fortbewegen. Herr Blaschke hat nun gezeigt, daß wir diese Differentialform in der Form

$$\dot{s}\dot{F}_1 = \sin^2\sigma\,\dot{\sigma}\,\dot{L}_1\dot{L}_2 \tag{2}$$

darstellen können[6]). Wir wollen uns nun mit der Erläuterung der rechten Seite von (2) beschäftigen. Der Winkel σ ist erklärt als Winkel der Tangentialebenen im Punkte P an F_1 und F_2. Die Tangente in P an die Durchschnittslinie, die im Sinne wachsender Bogenlänge orientiert sei, bildet zusammen mit dem Punkte P ein Linienelement L_1 hinsichtlich F_1 und ein Linienelement L_2 in bezug auf F_2. Ist ϑ_1 der Winkel des Linienelementes mit irgend einer festen Richtung durch P auf F_1 und $\dot{O}_1$ das Oberflächenelement von F_1 in P, dann ist

$$\dot{L}_1 = \dot{\vartheta}_1\dot{O}_1 \tag{3}$$

---

[5]) Wegen der hier vorkommenden alternierenden Produkte vergleiche man etwa E. Kähler, Hamburger Math. Einzelschriften 16, Teubner, Leipzig und Berlin 1935.

[6]) Vgl. die in [4]) zitierte Arbeit, wo diese Formel als „kinematische Grundformel" bezeichnet wird.

die Dichte des Linienelementes L_1. Bei entsprechender Bedeutung von $\dot{\vartheta}_2$ und $\dot{O}_2$ ist die Dichte des Linienelementes L_2 bestimmt durch

$$\dot{L}_2 = \dot{\vartheta}_2 \dot{O}_2. \tag{4}$$

Die Dichte eines Linienelementes in bezug auf eine Fläche ist biegungsinvariant wie die Darstellung (3) oder (4) zeigt[7]).

§ 2.

Mittelwerte für die Integrale der Krümmung und des Quadrates der Krümmung längs der Durchschnittlinie zweier Flächen.

Seien F_1 und F_2 die schon früher betrachteten Flächen, die wir als stetig gekrümmt und beschränkt betrachten, $\varkappa(s)$ die Krümmung ihrer Schnittkurve, die wir auf die Bogenlänge s als Parameter beziehen und

$$K' = \int \varkappa^2(s)\, ds, \tag{5}$$

das entlang derselben genommene Integral. Entsprechend dem in der Einleitung Gesagten ist dann der Mittelwert von K' gegeben durch

$$\int\limits_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} K' \cdot \dot{F}_1. \tag{6}$$

Wegen (2) und (5) gilt für (6) auch

$$\int\limits_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} K' \cdot \dot{F}_1 = \tfrac{1}{2} \int \varkappa^2 \sin^2 \sigma\, \dot{\sigma}\, \dot{L}_1 \dot{L}_2. \tag{7}$$

Über die Integrationsgrenzen der rechten Seite von (7) ist folgendes zu sagen: σ variiert im Intervall $\langle 0, 2\pi \rangle$, die Linienelemente L_1 und L_2 haben unabhängig voneinander F_1 und F_2 zu durchlaufen, d. h. in (4) und (5) variieren ϑ_1 und ϑ_2 in $\langle 0, 2\pi \rangle$, und $\dot{O}_1$ und $\dot{O}_2$ beschreiben die gesamte Oberfläche von bzw. F_1 und F_2. Da bei der Umorientierung des Linienelementes in bezug auf eine Fläche eine gegenseitige Lage von F_1 und F_2 erzielt wird, die schon vorhanden war, treten alle Lagen von F_1 und F_2 doppelt auf, weswegen der Faktor $\frac{1}{2}$ in (7) auftritt.

Um die Integration rechterhand von (7) ausführen zu können, benötigen wir für $\varkappa$ einen Ausdruck, in dem der Winkel σ auftritt, sowie Größen, die von F_1 und F_2 abhängen. In den letzteren muß $\varkappa$ natürlich symmetrisch sein.

Wir betrachten einen beliebig gewählten Punkt P auf der Schnittlinie von F_1 und F_2. Die Hauptnormale der Kurve in P bildet mit den

---

[7]) Siehe dazu auch W. Blaschke, Integralgeometrie 11, Zur Variationsrechnung, wo diese Dichte zuerst eingeführt wurde und die Biegungsinvarianz noch besser ersichtlich ist. Abh. aus dem Math. Sem. der Hansischen Universität, Bd. 11, 1936.

Flächennormalen von F_1 und F_2 im gleichen Punkte die Winkel φ_1 und φ_2. Nach dem Meusnierschen Satz gilt dann für die Krümmung $\varkappa$ unserer Kurve

(8′) $$\varkappa \cos \varphi_1 = N^{(1)},$$

(8″) $$\varkappa \cos \varphi_2 = N^{(2)},$$

wenn $N^{(1)}$ und $N^{(2)}$ diejenigen Normalkrümmungen von F_1 und F_2 sind, die durch die Tangente der Kurve im Punkte P bestimmt sind. Die Normalkrümmungen hängen nur von dem Linienelement auf der Fläche ab. Da der Winkel σ, der in (2) und (7) auftritt, durch

(9) $$\sigma = |\varphi_1 - \varphi_2|$$

bestimmt ist, liefern (8′) und (8″) unmittelbar den gesuchten Ausdruck

(10) $$\varkappa = \frac{\sqrt{N^{(1)2} + N^{(2)2} - 2 N^{(1)} N^{(2)} \cos^2 \sigma}}{|\sin \sigma|}$$

für unsere Krümmung. Die Wurzel ist dabei positiv zu nehmen, da der Raumkrümmung ein positiver Wert zugesprochen wird.

Wir integrieren auf der rechten Seite von (7) zunächst nach σ, wegen (10) kommt, da $N^{(1)}$ und $N^{(2)}$ zufolge der zuvor gemachten Bemerkung hinsichtlich dieser Integration konstant sind,

(11) $$\tfrac{1}{2} \int_{\sigma=0}^{2\pi} \varkappa^2 \sin^2 \sigma \, \dot{\sigma} = \pi (N^{(1)2} + N^{(2)2})$$

und daher

(12) $$\int_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} K' \cdot \dot{F}_1 = \pi \int [N^{(1)2} + N^{(2)2}] \, \dot{L}_1 \dot{L}_2.$$

Wir beziehen nun unsere Flächen F_1 und F_2 auf die Krümmungslinien als Parameterkurven. Die Winkel ϑ_1 und ϑ_2 von (4) und (5) sind dann diejenigen, die die Tangentenrichtung in P mit einer der Krümmungslinien von bzw. F_1 und F_2 bilden. Für die in (12) auftretenden Normalkrümmungen gilt nach der Eulerschen Formel

(13) $$N^{(i)} = N_2^{(i)} \cos^2 \vartheta_i + N_2^{(i)} \sin^2 \vartheta_i \qquad (i = 1, 2),$$

wenn $N_1^{(i)}$ und $N_2^{(i)}$ die Hauptkrümmungen von F_i in P sind. Wegen (4) und (5) hat man dann für (12) auch

(14) $$\int_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} K' \cdot \dot{F}_1 = \pi \int \{(N_1^{(1)} \cos^2 \vartheta_1 + N_2^{(1)} \sin^2 \vartheta_1)^2 + (N_1^{(2)} \cos^2 \vartheta_2 + N_2^{(2)} \sin^2 \vartheta_2)^2\} \, \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 \dot{O}_1 \dot{O}_2.$$

Die Integration von (14) nach ϑ_1 und ϑ_2 gibt, bei Beachtung des nach (7) über die Integrationsintervalle Ausgeführtem, wegen

(15′) $$\int_0^{2\pi} \cos^4 \vartheta_i \, \dot{\vartheta}_i = \int_0^{2\pi} \sin^4 \vartheta_i \, \dot{\vartheta}_i = \tfrac{3}{4} \pi \qquad (i = 1, 2).$$

$$(15'') \qquad \int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta_i \sin^2\vartheta_i \dot{\vartheta}_i = \tfrac{1}{4}\pi \qquad (i = 1, 2),$$

$$(16) \qquad \int_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} K' \cdot \dot{F}_1 = \int \{6\pi^3 \{[\tfrac{1}{2}(N_1^{(1)} + N_2^{(1)})]^2 - [\tfrac{1}{2}(N_1^{(2)} + N_1^{(2)})]^2\} + 2\pi^3 \{N_1^{(1)} N_2^{(1)} - N_1^{(2)} N_2^{(2)}\}) \dot{O}_1 \dot{O}_2.$$

Auf der rechten Seite von (16), treten die mittlere Krümmung und die Gaußsche Krümmung von F_i auf. Wir bezeichnen sie mit

$$(17) \qquad H_i = \tfrac{1}{2}(N_1^{(i)} + N_2^{(i)}) \qquad (i = 1, 2).$$

$$(18) \qquad K_i = N_1^{(i)} N_2^{(i)} \qquad (i = 1, 2).$$

Ist O_i der Flächeninhalt von F_i so nimmt (16), wegen (17) und (18) folgende Gestalt an:

$$(19) \qquad \boxed{\begin{aligned} \int K' \cdot \dot{F}_1 = {} & 6\pi^3 [O_2 \int H_1^2 \dot{O}_1 + O_1 \int H_2^2 \dot{O}_2] \\ & - 2\pi^3 [O_2 \int K_1 \dot{O}_1 + O_1 \int K_2 \dot{O}_2]. \end{aligned}}$$

Sind unsere Flächen F_i geschlossen und vom Geschlechte p_i, so kann man für die in (19) auftretenden Totalkrümmungen[8]

$$(20) \qquad \int K_i \dot{O}_i = 4\pi(1 - p_i) \qquad (i = 1, 2)$$

setzen.

Wir wollen jetzt in entsprechender Weise wie zuvor, den Mittelwert des Integrals der Krümmung längs der Schnittlinie von F_1 und F_2 ermitteln, d. h. also das Integral

$$(21) \qquad \int_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} K \cdot \dot{F}_1, \quad K = \int \varkappa \, \dot{s}$$

betrachten. Dabei ist $\varkappa$ die Krümmung der Schnittlinie. Wir müssen jetzt unsere ziemlich allgemein gehaltenen Voraussetzungen über F_1 und F_2 einschränken. Zunächst sollen F_1 und F_2 durchwegs positiv gekrümmt sein. Ferner setzen wir voraus

$$(22) \qquad N^{(1)} \geqq N^{(2)},$$

d. h. keine Normalkrümmung von F_1 ist kleiner, als irgendeine Normalkrümmung von F_2.

Für (21) gilt wegen (2) und (10)

$$(23) \qquad \int_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} K \cdot \dot{F}_1 = \tfrac{1}{2} \int \sqrt{N^{(1)2} + N^{(2)2} - 2N^{(1)} N^{(2)} \cos^2\sigma} \, |\sin\sigma| \, \dot{\sigma} \dot{L}_1 \dot{L}_2.$$

Über die Integrationsgrenzen gilt dasselbe wie für (7). Wie früher führen wir bei der schrittweisen Integration der rechten Seite von (23), zunächst

[8]) Vgl. etwa in W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. 1, 3. Aufl., Springer 1930, Berlin, die Seiten 163—166.

liejenigen nach σ aus. Beachten wir dabei unsere Voraussetzung (22), so erhält man

$$(24)\quad \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{N^{(1)2} + N^{(2)2} - 2N^{(1)}N^{(2)}\cos^2\sigma}\,|\sin\sigma|\,\dot{\sigma} = 2N^{(1)} + \frac{2}{3}\frac{N^{(2)2}}{N^{(1)}}.$$

Wenn F_1 und F_2 wie zuvor[9]) auf die Krümmungslinien als Parameterkurven bezogen sind, so gelten unter denselben Voraussetzungen und Bezeichnungen wie dort, die Eulerschen Gleichungen (13). Wegen (4), (5), (13) und (24) hat man für das Integral (21) den Ausdruck

$$(25)\quad \int_{F_1\cdot F_2\neq 0} K\cdot\dot{F}_1 = 2\int (N_1^{(1)}\cos^2\vartheta_1 + N_2^{(1)}\sin^2\vartheta_1)\,\dot{\vartheta}_1\dot{\vartheta}_2\dot{O}_1\dot{O}_2 + \frac{2}{3}\int \frac{(N_1^{(2)}\cos^2\vartheta_2 + N_2^{(2)}\sin^2\vartheta_2)^2}{N_1^{(1)}\cos^2\vartheta_1 + N_2^{(1)}\sin^2\vartheta_1}\,\dot{\vartheta}_1\dot{\vartheta}_2\dot{O}_1\dot{O}_2.$$

Der erste Posten auf der rechten Seite von (25) läßt sich sofort integrieren. Wegen

$$(26)\quad \int \cos^2\vartheta_i\,\dot{\vartheta}_i = \pi \qquad (i = 1, 2)$$

und (17) kommt, wenn O_i wieder der Flächeninhalt von F_i $(i = 1, 2)$ ist,

$$(27)\quad 2\int (N_1^{(1)}\cos^2\vartheta_1 + N_2^{(1)}\sin^2\vartheta_1)\,\dot{\vartheta}_1\dot{\vartheta}_2\dot{O}_1\dot{O}_2 = 8\pi O_2 M_1.$$

In (27) wurde die Steinersche Kantenkrümmung von F_i mit

$$(28)\quad M_i = \int H_i\dot{O}_i \qquad (i = 1, 2)$$

bezeichnet[10]), sie ist nach einem klassischen Satz von Minkowski auch gleich dem Ebenenmaß der Fläche F_i[11]), falls dieselbe eine Eifläche ist. Wir integrieren jetzt den zweiten Posten der rechten Seite von (25). Wegen (17) und (18) hat man

$$(29)\quad \int (N_1^{(2)}\cos^2\vartheta_2 + N_2^{(2)}\sin^2\vartheta_2)^2\,\dot{\vartheta}_2\dot{O}_2 = 3\pi\int H_2^2\dot{O}_2 - \pi\int K_2\dot{O}_2$$

und

$$(30)\quad \int \frac{\dot{\vartheta}_1\dot{O}_1}{N_1^{(1)}\cos^2\vartheta_1 + N_2^{(1)}\sin^2\vartheta_1} = 2\pi\int \frac{\dot{O}_1}{\sqrt{K_1}},$$

woraus folgt

$$(31)\quad \frac{2}{3}\int \frac{(N_1^{(2)}\cos^2\vartheta_2 + N_2^{(2)}\sin^2\vartheta_2)^2}{N_1^{(1)}\cos^2\vartheta_1 + N_2^{(1)}\sin^2\vartheta_1}\,\dot{\vartheta}_1\dot{\vartheta}_2\dot{O}_1\dot{O}_2 = \frac{4}{3}\pi^2\left[3\int H_2^2\dot{O}_2 - \int K_2\dot{O}_2\right]\int\frac{\dot{O}_1}{\sqrt{K_1}}.$$

---

[9]) Vgl. S. 771.

[10]) Siehe J. Steiner, Über parallele Flächen, Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1840), S. 114—118, sowie die unter 4 zitierte Arbeit von W. Blaschke.

[11]) Vgl. in R. Deltheil, Probabilités gémétriques, Bd. II, von Borels Traité du Calcul des probabilités et de ses applications, Gauthier-Villars, Paris, (1926), S. 91—99.

Aus (27) und (31) ergibt sich jetzt die gesuchte Formel

$$(32)\qquad \boxed{\int\limits_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} K \cdot \dot{F}_1 = \frac{4}{3}\pi^2 \left[3\int H_2^3 \dot{O}_2 - \int K_2 \dot{O}_2\right] \int \frac{\dot{O}_1}{\sqrt{K_1}} + 8\pi^2 O_2 M_1.}$$

Ist die Fläche F_2 geschlossen, dann muß sie wegen unseren Annahmen eine Eifläche sein. Für die in (32) auftretende Totalkrümmung von F_2 ist dann 4π zu setzen, da jetzt (20) mit $p_2 = 0$ gilt. Hätten wir über unsere Flächen die zu (22) entgegengesetzte Voraussetzung gemacht, daß keine Normalkrümmung $N^{(2)}$ von F_2 kleiner als irgendeine Normalkrümmung $N^{(1)}$ von F_1 ist, so hätten wir statt (32) erhalten

$$(33)\qquad \boxed{\int\limits_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} K \cdot \dot{F}_1 = \frac{4}{3}\pi^2 \left[3\int H_1^3 \dot{O}_1 - \int K_1 \dot{O}_1\right] \int \frac{\dot{O}_2}{\sqrt{K_2}} + 8\pi^2 O_1 M_2,}$$

wo alle auftretenden Größen so erklärt sind wie zuvor und M_2 die Kantenkrümmung von F_2 ist. Aus denselben Gründen wie bei (32) ist in (33) 4π für die Totalkrümmung von F_1 zu setzen, wenn diese Fläche geschlossen ist.

§ 3.

Über Mittelwerte von Integralen die längs Flächenstreifeninvarianten[12]) genommen sind.

Wie schon einleitend erwähnt wurde, bestimmt die Schnittkurve der Flächen F_1 und F_2 auf beiden Flächen je einen Flächenstreifen. Wir setzen F_i $(i = 1, 2)$ wie zu Beginn des § 2 als stetig gekrümmt und beschränkt voraus. Durch Betrachtung der Ableitungsgleichungen eines Flächenstreifens kommt man zu seinen drei unabhängigen Differentialinvarianten niedrigster Ordnung. Ist $\mathfrak{t}_1^{(i)}$ der Tangentenvektor der Streifenkurve, $\mathfrak{n}^{(i)}$ der Einheitsnormalvektor seines Flächenelementes und $\mathfrak{t}_2^{(i)}$ der zu ihnen senkrechte Einheitsvektor, so sind die Ableitungsgleichungen des durch F_i bestimmten Streifens·

$$(33)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\,\mathfrak{t}_1^{(i)}}{ds} = \quad * \quad G^{(i)}\,\mathfrak{t}_2^{i} + N^{(i)}\,\mathfrak{n}^{(i)} \\ \dfrac{d\,\mathfrak{t}_2^{(i)}}{ds} = -G^{(i)}\,\mathfrak{t}_1^{(i)} \quad * \quad - T^{(i)}\,\mathfrak{n}^{(i)} \qquad (i = 1, 2). \\ \dfrac{d\,\mathfrak{n}^{(i)}}{ds} = -N^{(i)}\,\mathfrak{t}_1^{(i)} + T^{(i)}\,\mathfrak{t}_2^{(i)} \quad * \end{cases}$$

[12]) Über Flächenstreifen, vgl. das Kap. 3 des unter [8]) zitierten Buches.

In (33) sind $G^{(i)}$ die geodätische Krümmung, $N^{(i)}$ die Normalkrümmung und $T^{(i)}$ die geodätische Torsion unseres Streifens.

Wir wollen uns zunächst mit Mittelwerten beschäftigen, zu denen die Normalkrümmung Veranlassung gibt.

Die Normalkrümmung $N^{(i)}$ hängt allein von dem Linienelement auf der Fläche F_i ab[13]) und ist identisch mit der schon in § 2 betrachteten Normalkrümmung. Wir wollen jetzt die durch

$$(34') \qquad \int\limits_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} N_1 \dot{F}_1, \qquad N_1 = \int N^{(1)}\, \dot{s},$$

und

$$(34'') \qquad \int\limits_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} N_2 \dot{F}_1, \qquad N_2 = \int N^{(2)}\, \dot{s}.$$

definierten Mittelwerte berechnen.

Führt man auf F_1 und F_2 wieder die Krümmungslinien als Parameterkurven ein, so erhält man auf Grund von Überlegungen wie sie in § 2. S. 771, angestellt wurden mit denselben Bezeichnungen wie dort, wegen (2), (3), (4) und (13) für (34')

$$(35) \qquad \int\limits_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} N_1 \dot{F}_1 = \tfrac{1}{2} \int (N_1^{(1)} \cos^2 \vartheta_1 + N_2^{(1)} \sin^2 \vartheta_1) \sin^2 \sigma\, \dot{\sigma}\, \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 \dot{O}_1 \dot{O}_2.$$

Die Integrationsveränderlichen variieren unabhänglich voneinander in Intervallen wie sie unter Gleichung (7) angegeben sind. Ist O_i die Oberfläche von F_i $(i = 1, 2)$, so kommt aus (35) bei Beachtung von (17) und (28) unmittelbar

$$(36) \qquad \boxed{\int\limits_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} N_1 \cdot F_1 = 2\pi^2 O_2 M_1.}$$

Für (34) erhält man durch eine entsprechende Rechnung

$$(37) \qquad \boxed{\int\limits_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} N_2 \dot{F}_2 = 2\pi^2 O_1 M_2.}$$

Wir betrachten jetzt diejenigen Mittelwerte, in denen die Quadrate der Normalkrümmungen auftreten, also

$$(38') \qquad \int\limits_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} N_1' \dot{F}_1, \qquad N_1' = \int N^{(1)^2}\, \dot{s},$$

$$(38'') \qquad \int\limits_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} N_2' \dot{F}_1, \qquad N_2' = \int N^{(2)^2}\, \dot{s}.$$

Wegen (2), (3), (4) und (13) findet man für (38')

$$(39) \qquad \int\limits_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} N_1' \dot{F}_1 = \tfrac{1}{2} \int (N_1^{(1)} \cos^2 \vartheta_1 + N_2^{(1)} \sin^2 \vartheta_1)^2 \sin^2 \sigma\, \dot{\sigma}\, \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 \dot{O}_1 \dot{O}_2.$$

[13]) Vgl. das unter [8]) zitierte Buch, S. 67—69.

Da

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \sigma \, \dot{\sigma} = \pi \tag{39'}$$

ist, hat man zufolge (17), (18), (28) und (29) für (39):

$$\boxed{\int_{F_1 \cdot \dot{F}_2 \neq 0} N_1' \dot{F}_1 = \pi^3 O_2 (3 \int H_1^2 \dot{O}_1 - \int K_1 \dot{O}_1).} \tag{40}$$

Entsprechend gilt für (38″)

$$\boxed{\int_{F_1 \cdot \dot{F}_2 \neq 0} N_2' \cdot \dot{F}_1 = \pi^3 O_1 (3 \int H_2^2 \dot{O}_2 - \int K_2 \dot{O}_2).} \tag{41}$$

Wir gehen jetzt zur Berechnung der Mittelwerte, in denen die Quadrate der geodätischen Krümmungen auftreten, über. Die Integrale um die es sich jetzt handelt, sind:

$$\int_{F_1 \cdot \dot{F}_2 \neq 0} G_1 \dot{F}_1, \qquad G_1 = \int G^{(1)2} \, \dot{s}, \tag{42'}$$

$$\int_{F_1 \cdot \dot{F}_2 \neq 0} G_2 \dot{F}_1, \qquad G_2 = \int G^{(2)2} \, \dot{s}. \tag{42''}$$

Ist $\varkappa$ die Raumkrümmung unserer Streifenkurve, dann gilt für $N^{(i)}$ und $G^{(i)}$ folgende Relation [14])

$$G^{(i)2} + N^{(i)2} = \varkappa^2 \quad (i = 1, 2) \tag{43}$$

Für die Integrale (42) hat man deswegen

$$\int_{F_1 \cdot \dot{F}_2 \neq 0} G_i \dot{F}_1 = \int_{F_1 \cdot \dot{F}_2 \neq 0} K_i' \dot{F}_i - \int N_i' \cdot \dot{F}_1 \quad (i = 1, 2). \tag{44}$$

Die auf der rechten Seite von (44) auftretenden Integrale sind unter (19), (40) und (41) berechnet und man hat demnach

$$\boxed{\begin{aligned} \int_{F_1 \cdot \dot{F}_2 \neq 0} G_1 \cdot \dot{F}_1 &= 3\pi^3 [2 O_1 \int H_2^2 \dot{O}_2 + O_2 \int H_2^1 \dot{O}_1] \\ &\quad - \pi^3 [2 O_1 \int K_2 \dot{O}_2 + O_2 \int K_1 \dot{O}_1]. \end{aligned}} \tag{45}$$

Für (42″) hat man in entsprechender Weise

$$\boxed{\begin{aligned} \int_{F_1 \cdot \dot{F}_2 \neq 0} G_2 \cdot \dot{F}_1 &= 3\pi^3 [2 O_2 \int H_1^2 \dot{O}_1 + O_1 \int H_2^2 \dot{O}_2] \\ &\quad - \pi^3 [2 O_2 \int K_1 \dot{O}_1 + O_1 \int K_2 \dot{O}_2]. \end{aligned}} \tag{46}$$

[14]) Vgl. das unter [8]) zitierte Buch, S. 69.

Wir ermitteln jetzt die Mittelwerte für die geodätischen Torsionen $T^{(i)}$ $(i = 1, 2)$. Die Integrale, die dann zu Grunde liegend, sind

$$(47') \qquad \int\limits_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} T_1 \dot{F}_1, \qquad T_1 = \int T^{(1)} \dot{s},$$

$$(47'') \qquad \int\limits_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} T_2 \dot{F}_1, \qquad F_2 = \int T^{(2)} \dot{s}.$$

Wegen (2) hat man für (47')

$$\int\limits_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} T_1 \dot{F}_1 = \tfrac{1}{2} \int T^{(1)} \sin^2 \sigma \, \dot{\sigma} \, \dot{L}_1 \dot{L}_2.$$

Wir führen in (48) zunächst die Integration nach σ aus. Bei dieser Integration ist $T^{(1)}$ konstant, denn das Linienelement wird ja dabei festgehalten und die geodätische Torsion hängt nur von denselben ab [15]), wie man sich leicht überzeugt. Man hat also

$$(49) \qquad \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} T^{(1)} \sin^2 \sigma \, \dot{\sigma} = \frac{\pi}{2} T^{(1)}.$$

Ist ϑ_1, wie immer, der Winkel, den unsere Kurve mit der einen Krümmungslinie auf F_1 bildet, so gilt die Beziehung [16])

$$(50) \qquad T^{(1)} = (N_1^{(1)} - N_2^{(1)}) \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_1,$$

wo wie bisher $N_1^{(1)}$ und $N_2^{(1)}$ die beiden Hauptkrümmungen von F_1 sind.

Für (48) gilt wegen (49) und (50)

$$(51) \qquad \int\limits_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} T_1 \dot{F}_1 = \frac{\pi}{2} \int (N_1^{(1)} - N_2^{(1)}) \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_1 \, \dot{\vartheta}_1 \dot{O}_1 \dot{L}_2.$$

Integrieren wir in (49) nach ϑ_1, so wird wegen der Orthogonalität von $\sin \vartheta_1$ und $\cos \vartheta_1$ in bezug auf das Intervall $\langle 0, 2\pi \rangle$, dieses Integral verschwinden. Man hat also [17])

$$(52) \qquad \boxed{\int\limits_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} T_1 \cdot \dot{F}_1 = 0}$$

und ebenso

$$(53) \qquad \boxed{\int\limits_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} T_2 \cdot \dot{F}_1 = 0.}$$

---

[15]) Vgl. das unter [8]) zitierte Buch, S. 67—69.

[16]) Zur Herleitung dieser Beziehung genügt es zu wissen, daß die geodätische Torsion längs einer Krümmungslinie Null ist, vgl. dazu [8]).

[17]) Der geometrische Grund für das Verschwinden dieser Integrale liegt im Theorem von Bonnet, nach welchem die geodätischen Torsionen zweier sich rechtwinklig schneidender Kurven im Schnittpunkt entgegengesetzt gleich sind.

Wir betrachten jetzt die mit den Quadraten der geodätischen Torsionen gebildeten Ausdrücke

$$(54') \qquad \int_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} T_1' \dot{F}_1, \qquad T_1' = \int T^{(1)2}\, \dot{s},$$

$$(54'') \qquad \int_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} T_2' \dot{F}_2, \qquad T_2' = \int T^{(2)2}\, \dot{s}.$$

Zufolge dem über die Integrale (47) Ausgeführten, ergeben sich durch elementare Integrationen die Ausdrücke

$$(55') \qquad \boxed{\int_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} T_1' \cdot \dot{F}_1 = \frac{\pi^3}{4} O_2 \cdot \int (N_2^{(1)} - N_2^{(1)})^2 \dot{O}_1}$$

oder

$$(55) \qquad \boxed{\int_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} T_1' \cdot \dot{F}_1 = \pi^3 O_2 \left[\int H_1^2 \dot{O}_1 - \int K_1 \dot{O}_1\right]}$$

und

$$(56') \qquad \boxed{\int_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} T_2' \cdot \dot{F}_1 = \frac{\pi^3}{4} O_1 \cdot \int (N_1^{(2)} - N_2^{(2)})^2 \dot{O}_2}$$

oder

$$(56) \qquad \boxed{\int_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} T_2' \cdot \dot{F}_1 = \pi^3 O_1 \left[\int H_2^2 \dot{O}_2 - \int K_2 \dot{O}_2\right].}$$

Für das Integral des Quadrates der mittleren Krümmung einer Fläche ergibt sich aus (40) und (55)

$$(57) \qquad \boxed{\int_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} \dot{F}_1 \int (N^{(1)2} - T^{(1)2})\, \dot{s} = 2\pi^3 O_2 \int H_1^2 \dot{O}_1}$$

und analog

$$(58) \qquad \boxed{\int_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} \dot{F}_1 \int (N^{(2)2} - T^{(2)2})\, \dot{s} = 2\pi^3 O_1 \int H_2^2 \dot{O}_1.}$$

Zu den Formeln (40), (41), (45), (46), (55) und (56) sei noch folgendes bemerkt: Ist eine der Flächen F_i geschlossen und vom Geschlechte p_i, dann kann man die Totalkrümmung die in diesen Formeln auftritt, gemäß (20) durch das Geschlecht ausdrücken.

§ 4.

Über den Winkel, unter dem sich zwei Flächen schneiden.

Wir betrachten auf der Schnittlinie der Flächen F_1 und F_2 über die dieselben Voraussetzungen wie in den vorhergehenden Paragraphen gemacht seien, einen Punkt P. Die Hauptnormale in demselben bilde mit

den Einheitsvektoren $\mathfrak{t}_2^{(i)}$ von (33)[18]) die Winkel ψ_i $(i = 1, 2)$, die natürlich Funktionen der Bogenlänge s unsrer Kurve sind. Es läßt sich dann leicht zeigen, daß zwischen der Torsion der Kurve und den geodätischen Torsionen $T^{(i)}$, die in (33) eingeführt wurden, folgende Beziehungen bestehen

$$T^{(i)} = -\tau + \frac{d\psi_i}{ds} \quad (i = 1, 2). \tag{59}$$

Es ist nun $\sigma = |\psi_1 - \psi_2|$ der in (2) auftretende Winkel den die Tangentialebene an F_1 und F_2 im Punkte P miteinander bilden und folglich

$$\frac{d\sigma}{ds} = |T^{(1)} - T^{(2)}|. \tag{60}$$

Da aus (52) und (53)

$$\int\limits_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} \dot{F}_1 \int T^{(1)} T^{(2)} \, \dot{s} = 0 \tag{61}$$

folgt, hat man wegen (55) und (56) schließlich

$$\boxed{\int\limits_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} \dot{F}_1 \int \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 \dot{s} = \frac{\pi^3}{4} \left(\dot{O}_2 \int (N_1^{(1)} - N_2^{(1)})^2 \dot{O}_1 + O_1 \int (N_1^{(2)} - N_2^{(2)}) \dot{O}_2\right),} \tag{62'}$$

oder

$$\begin{aligned} \int\limits_{F_1 \cdot F_2 \neq 0} \dot{F}_1 \int \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 \dot{s} &= \pi^3 \left(O_2 \int H_1^2 \dot{O}_1 + O_1 \int H_2^2 \dot{O}_2\right) \\ &\quad - \pi^3 \left(O_2 \int K_1 \dot{O}_1 + O_1 \int K_2 \dot{O}_2\right). \end{aligned} \tag{62}$$

In (62′) ist folgendes Ergebnis enthalten:

Zwei Flächen, die sich für jede gegenseitige Lage unter konstantem Winkel schneiden, sind notwendigerweise Kugeln oder Teile von je zwei Kugelflächen.

In der Tat soll das Integral (62) Null sein, dann muß für die rechte Seite von (62)

$$\int (N_1^{(i)} - N_2^{(i)})^2 \dot{O}_i = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

gelten, d. h. $N_1^{(i)} = N_2^{(i)}$ sein, dann besteht aber F_i aus lauter Nabelpunkten und ist demnach ein Teil einer Kugelfläche.

Sind unsere Flächen F_i geschlossen und vom Geschlecht p_i, dann kann man die Totalkrümmung von F_i, die in (62) vorkommt, wegen (20) durch $4\pi(1 - p_i)$ $(i = 1, 2)$ ersetzen.

§ 5.

Der Fall, wo eine der beiden Flächen eine Ebene oder eine Kugel ist.

In den beiden Spezialfällen, die wir hier betrachten wollen, werden gegenüber den Untersuchungen der §§ 2, 3 und 4 in gewisser Hinsicht

[18]) Vgl. das zu Beginn des § 3 Auseinandergesetzte.

Änderungen eintreten müssen. Der Grund hierfür liegt im folgenden: das Maß für eine gewisse Anzahl von Ebenen-Lagen — die von drei Parametern abhängen — ist schon durch eine dreifache Differentialform, nämlich die Ebenendichte[19]) festgelegt. Ebenso ist auch die von drei Parametern abhängende Anzahl von Lagen einer Kugel — mit festem Radius — durch das Raumelement ihres Mittelpunktes bestimmt.

Wir behandeln zunächst denjenigen Fall, wo die eine Fläche F_1 in eine Ebene E_1 ausartet. Es ist dann vor allem festzustellen, wie sich Blaschkes kinematische Grundformel (2) ändert.

Hängen wir an E_1 ein kartesisches Achsenkreuz $\{x, e_1, e_2, e_3\}$ so an, daß sein Ursprung x und die rechtwinkligen Einheitsvektoren e_1 und e_2 auf E_1 fallen, so ist die Dichte[19]) unserer Ebene gegeben durch[20])

$$\dot{E}_1 = (\dot{x}\, e_3)\,(\dot{e}_3\, e_2)\,(\dot{e}_3\, e_1). \tag{63}$$

Wir grenzen nun auf E_1 irgendeinen beschränkten Bereich E_1^* ab, dessen Flächeninhalt O_1 sei. Die kinematische Dichte $\dot{E}_1^*$ von E_1^* wird dann wegen (1) und (63)

$$\dot{E}_1^* = \dot{E}_1\,(\dot{x}\, e_1)\,(\dot{x}\, e_2)\,(\dot{x}\, e_3) \tag{64}$$

In (64) bedeutet $(\dot{x}\, e_1)\,(\dot{x}\, e_2)$ das Flächenelement von E_1 und $(\dot{e}_2\, e_3)$ ist eine infinitesimale Drehung in E_1. Das Produkt dieser drei Faktoren ist also wie ein Vergleich mit (3) zeigt, genau $\dot{L}_1$. Durch teilweise Integration der Grundformel (2), in die jetzt $\dot{E}_1^*$ statt $\dot{F}_1$ einzutragen ist, erhält man, da sich der 2π-fache Flächeninhalt O_1 beiderseits heraushebt

$$\int_{E_1 \cdot F_2 \neq 0} \dot{s}\, \dot{E}_1 = \int_{E_1 \cdot F_2 \neq 0} \sin^2 \sigma\, \dot{\sigma}\, \dot{L}_2 \tag{65'}$$

Da (65′) für ein beliebiges Integrationsgebiet gelten soll, so muß aus Stetigkeitsgründen

$$\boxed{\dot{E}_1\, \dot{s} = \sin^2 \sigma\, \dot{\sigma}\, \dot{L}_2} \tag{65}$$

sein.

Damit haben wir die gewünschte Grundformel erhalten.

Es bietet jetzt keine Schwierigkeiten, auf Grund von (65), die Analoga zu dem Integral der Krümmung (32) und des Quadrates der Krümmung (19) auf entsprechende Weise zu berechnen, wie dies im § 2 geschehen ist.

---

[19]) Vgl. die unter [1]) zitierte Schrift.

[20]) Wegen der Bedeutung von (63) vgl. man das auf Seite 769 zur kinematischen Dichte Gesagte.

Ist $\varkappa$ die Krümmung der Schnittkurve von E_1, F_2 und $\dot{s}$ ihr Bogenelement und sind H_2 und K_2 die unter (17), (18) erklärte mittlere und Gaussche Krümmung von F_2, so gilt jetzt

$$\int_{E_1 \cdot F_2 \neq 0} \dot{E}_1 \int \varkappa^2 \, \dot{s} = \frac{\pi^2}{2} [3 \int H_2^2 \dot{O}_2 - \int K_2 \dot{O}_2] \tag{66}$$

und

$$\int_{E_1 \cdot F_2 \neq 0} \dot{E}_1 \int \varkappa \, \dot{s} = 2\pi M_2. \tag{67}$$

Im Falle, daß F_2 eine Eifläche ist, erhält man (67) unmittelbar auf folgende Weise. Zunächst wird $\int \varkappa \, \dot{s} = 2\pi$ und wegen dem zu (28) Bemerkten folgt dann (67). Es ist also beachtungswert, daß diese für Eiflächen geltende Formel sich ohne Änderung auf beliebige Flächen übertragen läßt.

Wir wollen jetzt die Formeln des § 3 übertragen. (36), (40), (45), (52) und (55) fallen dann aus folgendem Grunde weg: die Normalkrümmung $N^{(1)}$ und die geodätische Torsion $T^{(1)}$ eines Streifens auf E_1 sind Null und für die geodätische Krümmung gilt $|G^{(1)}| = \varkappa$ wie (43) zeigt. Die Formel für diesen letzten Fall ist durch (66) gegeben.

An Stelle von (37) und (41) treten jetzt

$$\int_{E_1 \cdot F_2 \neq 0} \dot{E}_1 \int N^{(2)} \, \dot{s} = \frac{\pi^2}{2} M_2 \tag{68}$$

und

$$\int_{E_1 \cdot F_2 \neq 0} \dot{E}_1 \int N^{(2)^2} \, \dot{s} = \frac{\pi^2}{4} [3 \int H_2^2 \dot{O}_2 - \int K_2 \dot{O}_2]. \tag{69}$$

Für das Integral, in dem das Quadrat der geodätischen Krümmung $G^{(2)}$ eingeht, findet man wegen (43)

$$\int_{E_1 \cdot F_2 \neq 0} \dot{E}_1 \int G^{(2)^2} \dot{s} = \int_{E_1 \cdot F_2 \neq 0} \dot{E}_1 \int (\varkappa^2 - N^{(2)^2}) \, \dot{s} \tag{70}$$

was wegen (66) und (69)

$$\int_{E_1 \cdot F_2 \neq 0} \dot{E}_1 \int G^{(2)^2} \, \dot{s} = \int_{E_1 \cdot F_2 \neq 0} \dot{E}_1 \int N^{(2)^2} \, \dot{s} \tag{71}$$

gibt.

Die Integrale, in denen die geodätische Torsion bzw. deren Quadrat auftritt, sind hier

$$\int_{E_1 \cdot F_2 \neq 0} \dot{E}_1 \int T^{(2)} \, \dot{s} = 0 \tag{72}$$

und

$$\int\limits_{E_1 \cdot F_2 \neq 0} \dot{E}_1 \int T^{(2)2}\, \dot{s} = \frac{\pi^2}{16} \int (N_1^{(2)} - N_2^{(2)})^2 O_2 \tag{73'}$$

oder

$$\int\limits_{E_1 \cdot F_2 \neq 0} \dot{E}_1 \int T^{(2)2}\, \dot{s} = \frac{\pi^2}{4} \left(\int H_2^2 \dot{O}_2 - \int K_2 \dot{O}_2 \right). \tag{73}$$

Wir gehen jetzt zum zweiten Fall über, in dem F_1 eine Kugel K_1 vom Radius R_1 ist. Auch hier müssen wir zunächst feststellen, wie sich die kinematische Grundformel (2) ändern wird.

Aus (1) folgt durch teilweise Integration für die kinematische Dichte $\dot{K}_1$ von K_1 wegen (1)

$$\int \dot{K}_1 = 8\,\pi^2 \int \dot{P}_1. \tag{74}$$

In (74) bedeutet $\dot{P}_1$ das Raumelement des Kugelmittelpunktes. Ist $\dot{L}_1$ die Linienelementdichte auf der Kugel, so bekommt man wegen (3) die Beziehung

$$\int \dot{L}_1 = 8\,\pi^2\, R_1^2. \tag{75}$$

Wird jetzt (2) beiderseits teilweise integriert, so erhält man wegen (74) und (75) auf Grund derselben Schlußweise, wie sie auf S. 780 angewandt wurde, die Grundformel

$$\frac{\dot{P}_1}{R_1^2}\, \dot{s} = \sin^2 \sigma\, \dot{\sigma}\, \dot{L}_2. \tag{76}$$

Die Formeln (19) und (32) des § 2 können für unseren Spezialfall mit Hilfe von (76) auf dieselbe Weise berechnet werden, wie dies dort unter Zuhilfenahme von (2) geschah. Man erhält so:

$$\int\limits_{K_1 \cdot F_2 \neq 0} \dot{P}_1 \int \varkappa^2\, \dot{s} = 2\,\pi^2 O_2 + \pi^2 R_1^2 \left[3 \int H_2^2 \dot{O}_2 - \int K_2 \dot{O}_2 \right] \tag{77}$$

und

$$\int\limits_{K_1 \cdot F_2 \neq 0} \dot{P}_1 \int \varkappa\, \dot{s} = 4 O_2 R_1 + \frac{2\pi}{3} R_1^3 \left[3 \int H_2^2 \dot{O}_2 - \int K_2 \dot{O}_2 \right]. \tag{78}$$

Von den Formeln, die die Gegenstücke zu denen des § 3 bilden, fallen (52) und (55) weg, da die geodätische Torsion $T^{(1)}$ längs eines auf

einer Kugel gelegenen Streifens Null ist[12]). Entsprechend zu (36) und (37) findet man hier

$$\int_{K_1 \cdot F_2 \neq 0} \dot{P}_1 \int N^{(2)}\, \dot{s} = \pi^2 M_2 R_1^2 \tag{79}$$

und

$$\int_{K_1 \cdot F_2 \neq 0} \dot{P}_1 \int N^{(1)}\, \dot{s} = \pi^2 O_2 R_1. \tag{80}$$

Für die Quadrate der Normalkrümmungen hat man statt (40) und (41)

$$\int_{K_1 \cdot F_2 \neq 0} \dot{P}_1 \int N^{(2)2}\, \dot{s} = \frac{R_1^2 \pi^2}{2} \left[3 \int H_2^2 \dot{O}_2 - \int K_2 \dot{O}_2\right] \tag{81}$$

und

$$\int_{K_1 \cdot F_2 \neq 0} \dot{P}_1 \int N^{(1)2}\, \dot{s} = \pi^2 O_2. \tag{82}$$

Für die Integrale, wo das Quadrat der geodätischen Krümmung auftritt, kommt wegen (77), (81), (82) und der Relation (43),

$$\int_{K_1 \cdot F_2 \neq 0} \dot{P}_1 \int G^{(2)2}\, \dot{s} = 2\pi^2 O_2 + \frac{R_1^2 \pi^2}{2} \left[3 \int H_2^2 \dot{O}_2 - \int K_2 \dot{O}_2\right] \tag{83}$$

und

$$\int_{K_1 \cdot F_2 \neq 0} \dot{P}_1 \int G^{(1)2}\, \dot{s} = \pi^2 O_2 + R_1^2 \pi^2 \left[3 \int H_2^2 \dot{O}_2 - \int K_2 \dot{O}_2\right]. \tag{84}$$

Die Integrale, in denen die geodätische Torsion bzw. deren Quadrat auftritt, werden jetzt statt durch (53) und (56) vermöge

$$\int_{K_1 \cdot F_2 \neq 0} \dot{P} \int T^{(2)}\, \dot{s} = 0 \tag{85}$$

und

$$\int_{K_1 \cdot F_2 \neq 0} \dot{P} \int T^{(2)2}\, \dot{s} = \frac{R_1^2 \pi^2}{8} \int (N_1^{(2)} - N_2^{(2)})^2\, \dot{O}_2 \tag{86'}$$

oder

$$\int_{K_1 \cdot F_2 \neq 0} \dot{P}_1 \int T^{(2)2}\, \dot{s} = \frac{R_1^2 \pi^2}{2} \left[\int H_2^2 \dot{O}_2 - \int K_2 \dot{O}_2\right] \tag{86}$$

dargestellt.

Wir wollen zum Schluß noch diejenige Formel aufstellen, die (62) aus § 4 entspricht. Es ist jetzt zu beachten, daß (59) die folgende Gestalt hat

$$\left\{\begin{aligned} T^{(2)} &= -\tau + \frac{d\psi_1}{ds}, \\ 0 &= -\tau + \frac{d\psi_2}{ds}. \end{aligned}\right. \tag{87}$$

Da $\sigma = |\psi_1 - \psi_2)$ ist, wird also

$$|T^{(2)}| = \frac{d\sigma}{ds} \tag{88}$$

und daher

$$\boxed{\int\limits_{K_1 \cdot F_2 \neq 0} \dot{P}_1 \int \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 \dot{s} = \int\limits_{K_1 \cdot F_2 \neq 0} \dot{P}_1 \int T^{(2)^2}\, \dot{s}.} \tag{89}$$

Für die rechte Seite von (89) kann noch der Wert aus (86) substituiert werden.

Wie in den vorangehenden Paragraphen ist auch hier noch die Bemerkung zu machen, daß man im Falle einer geschlossenen Fläche F_2 die Totalkrümmung derselben wegen (20) durch $4\pi(1 - p_2)$ ersetzen kann, wenn p_2 das Geschlecht von F_2 ist.

(Eingegangen am 27. Juli 1936.)

Integralgeometrie 20.

Zur elliptischen Geometrie.

Von

Wilhelm Blaschke in Hamburg.

Betrachtet man die Euklidische Metrik auf einer Kugel

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

im E_4 und vereinbart man auf ihr, die diametralen Punkte x_i und $-x_i$ nicht zu unterscheiden, so erhält man die elliptische Geometrie des dreidimensionalen Raumes R_3. Ihre gerichteten Geraden G kann man auf Grund von W. K. Cliffords Ideen von 1873 nach G. Fubini und E. Study (1900) derart auf die Punkte l, r zweier Kugelflächen K_l, K_r im E_3 abbilden, daß den elliptischen Bewegungen $G \to G^*$ die Euklidischen Drehungen $l \to l^*$, $r \to r^*$ der beiden Bildkugeln entsprechen und umgekehrt: jedem Paar solcher unabhängiger Drehungen entspricht rückwärts eine elliptische Bewegung des R_3. Den Punkten im R_3 als Ort der hindurchgehenden Geraden entsprechen dabei die Bewegungen $l \to r$[1]).

Von dieser Abbildung von Fubini-Study soll hier eine einfache Anwendung gemacht werden.

Es sei P ein orientierbares, einfach zusammenhängendes Vielflach im elliptischen R_3, das aus endlich vielen ebenen Seitenflächen zusammengesetzt ist. Wir denken seine Normalen gerichtet und auf die Bildkugel, etwa K_l abgebildet. Dann setzt sich dieses Abbild aus zwei Arten von sphärischen Vielecken zusammen, die durch Großkreise begrenzt sind. Erstens die Bilder der *Seitenflächen* von P, die isometrisch (unter Erhaltung der Längen) diesen ebenen Seitenflächen entsprechen. Dann die Vielecke, die den *Ecken* von P entsprechen. Die *Kanten* von P geben zur *Fläche* des sphärischen Bildes keinen Beitrag. Sind nämlich l, r die sphärischen Bilder einer Kante, so liegt das sphärische Bild jeder Normalen zu dieser Kante auf den Großkreisen, die l und r zu Mittelpunkten haben. Somit gilt:

(1) *Fläche des sphärischen Bildes von P*
$= $ *Oberfläche von P + Eckenkrümmung von P,*

---

[1]) Vgl. etwa F. Klein, Vorlesungen über höhere Geometrie 1926, § 80. Die ursprünglichen Arbeiten: G. Fubini, Il parallelismo di Clifford negli spazii ellittici, Pisa 1900 und E. Study, Über nichteuklidische und Liniengeometrie, Greifswald 1900.

dabei hat „Eckenkrümmung“ die entsprechende Bedeutung wie in J. Steiners Arbeit „Über parallele Flächen“ von 1840, nur daß dort der Euklidische Fall betrachtet wird.

Machen wir nun den Grenzübergang von P zu einer genügend regulären krummen Fläche F, so haben wir für die zugehörigen Flächenelemente

$$\dot{\varphi} = \dot{F} + \dot{F}'. \tag{2}$$

Darin ist $\dot{\varphi}$ das Flächenelement des sphärischen Bildes, $\dot{F}$ das Flächenelement von F und $\dot{F}'$ das duale zum Flächenelement, d. h. das Flächenelement der absoluten Polaren F' von F. Zur Richtigkeit von (2) ist natürlich nötig, daß die Vorzeichen dieser drei Elemente in gewisser Weise verknüpft werden. Nebenbei ergibt sich hier wieder $\dot{\varphi}_l = \dot{\varphi}_r = \dot{\varphi}$.

Ist nun F eine orientierbare, stetig gekrümmte, geschlossene Fläche vom Geschlecht p, so ist genau wie im Euklidischen Falle[2])

$$\int_F \dot{\varphi} = 4\pi(1-p). \tag{3}$$

Führen wir also

$$\int \dot{F} = O, \tag{4}$$

die Oberfläche von F und

$$\int \dot{F}' = O', \tag{5}$$

die Oberfläche von F' ein, so folgt aus (2) durch Integration

$$\boxed{4\pi(1-p) = O + O'.} \tag{6}$$

Für konvexe Flächen ($p = 0$) ist das schon von G. Herglotz in seiner „Vorlesungen über geometrische Wahrscheinlichkeiten“ von 1933 angegeben worden.

Da hier mit Vorzeichen und Grenzübergängen leichtsinnig verfahren wurde, hoffe ich auf das Ergebnis (6) an anderer Stelle rechnerisch und in weiterem Zusammenhang zurückzukommen.

Hamburg, im August 1936.

[2]) Vgl. etwa meine Differentialgeometrie 1 (1930), § 77.

(Eingegangen am 6. August 1936.)